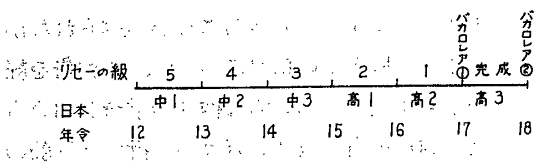
フランスの中等数学教育におけるベクトル

木　村　卓　二

一　目標　フランスのリセの第４級から第２級（日本では中２から高１）までの生徒が使用する数学教科書を取り扱われているベクトルの部分のほぼ完全な紹介。

二　目的　日本では昭和38年４月１日高校入学者から実施される新指導要領によって始めてベクトルが高２の数学に現われて来たが，すでにフランスでは昭和34年の文部省令では指導内容の中にベクトルという項目が，中学２年に相当する第４級に現われている。各所で諸外国の最近の中等数学教育の教科内容が発表され，ベクトルについてもアメリカ，その他の様子が次第に明らかになって来た。これらとともにその内容を比較し合って日本のベクトル指導に参考となるべき材料を提供する。

三　リセーと日本の学校の学年対応



四　使用した材料

C. Lebossé　C. Hémery　共著

４級　Arithmétique. Algébre et Géométrie
３〃　Algébre, Arithmétique et Géométrie
２〃　A'CMM'　Algébre
２〃　A'CMM'　Géométrie
１〃　A'CMM'　Algébre et Trigonométrie
１〃　A'CMM'　Géométrie

五　紹介方法で注意した点

(1)　全教科内容におけるベクトルの配置を知ること。
(2)　各学年間の連絡の仕方を知ること。
(3)　出来るだけ練習問題も数多く紹介すること。

そのため　(1)　各学年の内容目次を一らん表にし，ベクトルに関する課に＊印をつけた。
(2)　各学年ですぐ前の学年との重複部分も１，２の個所をのぞきそのまま記した。

六　文部省令教科内容（ベクトルの部分）

中２　（代）　正負の数
中３　（幾）　ベクトル。等しいベクトル。ベクトルの和と差
高１　（幾）　数×(ベクトル)。平行移動。相似。可換（和)。結合（和)。分配法則。射影。
高２　（代）　運動学
高２　（幾）　スカラー積

七　内容の主な特色

①　中２の正負の数の所で始めてベクトルが導入されている。ここでは一直線上のみでベクトルを取り扱っている。
②　中３では立体幾何でベクトルが取り上げられ，ベクトルの射影，ベクトルの和，差まで扱っている
③　高１代数ではデカルト座標系をもった平面上でベクトルのスカラー成分を定義し，２ベクトル直交の所でスカラー積をはじめて定義している。
④　高１幾何ではベクトルに数をかけること。ベクトルの分解を取り上げ，終りにまとめてベクトルの可換律，結合律，数の加法に関する分配律，ベクトルの加法に関する分配律を満すことを示す。更にベクトルの射影について詳しくしらべ，平行移動，相似をベクトルで定義している。
⑤　高２代数では運動学基礎（等速直線運動，等加速度直線運動）においてベクトル速度，ベクトル加速度を扱ってベクトルの応用としている。
⑥　高２幾何ではスカラー積の性質をまとめて，三角形内のよく知られた計量的関係を導くのに活躍させている。

全体を通じて

①　正負の数の所でしかも中２で導入している。
②　立体幾何をベクトルで扱かい射影を用いている。
③　応用として運動学を入れている。
④　教科全体の各所にベクトルによる扱いが，しみ通っている。ある個所でまとめてベクトルを扱い，後は一度もベクトルが出てこないというのではない。
⑤　各学年とも重複が極めて多く，進み方は漸進的である。

八　まとめ

以上フランスにおけるベクトルの指導については，その導入の時期及び方法で一つの特色ある行き方を示しているし又，その内容の展開においても空間における射影を中心にしている点が著しい。

高2までの所では，一次独立，一次従属の概念を扱っていないし，又ベクトル空間にけおる一次変換の行列を扱う姿勢も見られない様である。従って SMSG の教科書によるベクトルの取り上げ方とは異なっている。

しかし図形の研究や運動の研究にベクトルを十分用いながら，将来公理的にベクトル空間を作る時の一つのモデルをじっくりしらべておくと見ることも出来よう。

ベクトルの代数的測度に関するシャールの関係及び射影を中心としての進め方はよく〝おさえるべき点はおさえて〟いるようであって，参考になるであろう。

九　学年教科内容

第 4 級　(中学2年)

算数と代数	幾　何
1課 巾	定義を思い出す
2　素数	二等辺三角形
3　G.C.M，L.C.M	三角形の合同の場合
4　分数えの応用	三角形内の不等関係
*5　正負の数	直交と斜交
6　正負の数の加法	平行直線
7　正負の数の減法	平行線の角に関する性質
8　正負の数の乗法	三角形の内角の和
9　正負の数の除法	平行四辺行
*10　シャールの関係	長方形。菱形。正方形
11　巾（指数が整数）	台形。等距離平行線群
12　不等式	三角形内で1点に集まる直線
13　単項式	円。円と直線
14　多項式	2円の相対的位置
15　多項式の乗法	円弧
16　注意すべき恒等式	内接円
17　単項式と多項式の除法，因数分解，分数式	内接四辺形
18　一次方程式	作図
19　一次に帰着される方程式（及び系）	三角形の作図
20　代数の問題，点検問題	接線と接する円
21	正多角形。点検問題

第 3 級　(中学3年)

算数と代数	幾　何
1課 比	*1課　2線分の比 与えられた比に線分を分ける点
2　比例式	*2　ターレスの定理
3　整数の整の平方根	3　ターレスの定理の応用
4　平方根の近似値	4　相似三角形
5　根号	5　三角形が相似である場合
6　代数的表現	6　相似の応用
7　多項式	7　直角三角形内における計量的関係
8　単項式と多項式の乗法	8　三角比
9　注意すべき恒等式	9　直角三角形における三角比的関係
10　単項式と多項式の除法	10　円における計量的関係
11　有理分数式	11　作図(代数的解析法)
12　一元一次方程式	12　平面上の一般論
13　一次方程式に帰着される方程式	13　平行直線
14　一次方程式系	14　直線と平面の平行
15　一元一次不等式	15　平行2平面
16　代数の応用問題	16　直線と平面の垂直
17　函数とグラフ	17　直交2直線。直交と斜交
18　$y=ax$ の研究	18　2面角
19　$y=ax+b$ の研究	19　垂直2平面
20　一次函数の応用	*20　正射影。ベクトル

第 2 級　(高1)　代　数

1課　集合の概念。算術的数
2　正負の数
3　巾。算術的数の累乗根正負の数の累乗根
4　等式。等しい比。比例式。不等式
*5　ベクトル。シャールの関係
6　数値計算
7　単項式。多項式
8　注意すべき恒等式。商。多項式の因数分解
9　有理分数式。無理式
10　一元一次方程式
11　一元一次不等式
12　一次二項式のとる符号。不等式えの応用
13　二元一次不等式系
14　多元方程式系
15　二次方程式
16　二次方程式の根の和と積。応用
17　二次に帰着される方　程式系及方程式
18　二次三項式
19　二次不等式。応用
*20　諸函数についての一般論。デカルト座標
21　$y=ax$ の研究　$y=ax+b$
22　$y=ax+b$ の応用
23　$y=x^2$ の研究　$y=ax^2$

24　$y=ax^2+bx+c$ の研究

*25　$y=\frac{1}{x}$ の研究。$y=\frac{a}{x}$

代　数

Ⅰ部　代数計算（1課〜9課）

Ⅱ部　方程式と不等式（10課〜19課）

Ⅲ部　グラフ表現（20課〜25課）

幾　何

Ⅰ部　平面幾何（1課〜12課）

Ⅱ部　空間幾何（13課〜23課）

Ⅲ部　相似　　（24課〜28課）

第2級（高1）幾何

1課　線分，角，円

2　1直線，1点に関する対称。多角形。三角形。二等辺三角形。基本作図

3　三角形の合同。三角形の不等関係

4　平行線。多角形の内角の和

5　平行四辺形。長方形。菱形。正方形。

6　台形。等距離平行線。三角形の内部で1点に会する直線。

7　円。直線と円。2円の位置関係。弧長。弦。

8　内接角

9　軌跡

10　三角形の作図。接線に関する問題。

*11　2線分の比。線分を与えられた比に分ける点。調和に分ける。

12　ターレスの定理。応用。

13　平面上の一般化

14　平行直線。2直線のなす角。直線と平面の平行

15　平行平面。平行平面の計量的性質。

16　直線と平面の垂直

17　直交と斜交。応用

18　二面角。垂直な平面

19　平面えの射影。正射影。

20　三面角。多面角。線対称。面対称。点対称。図形の対称点。対称面。対称線。

*21　ベクトル。ベクトルと実数の積。ベクトルの和。

*22　ベクトルの射影。移動。

23　相似。応用

24　相似三角形。応用

25　円における計量的関係。角の二等分線。軌跡。相似多角形。

26　直角三角形における計量的関係。作図。

27　三角法基礎

28　直角三角形，任意の三角形における三角函数間の関係。

第1級（高2）代数

第Ⅰ章　方程式と不等式

1課　二次三項式の因数分解。二次方程式

2　2根の和と積。応用。

3　根の符号。根の対称式

4　二次に帰着される方程式又は連立方程式

5　三項式の符号。二次不等式。

6　1数と三項式の2根との比較

第Ⅱ章　函数と導函数

*7　函数の一般化。函根の概念。座標とグラフ。

8　$y=x^2$，$y=ax^2$ の研究

9　$y=ax^2+bx+c$ の研究

10　$y=\frac{1}{x}$，$y=\frac{a}{x}$

11　$y=\frac{ax+b}{cx+d}$

12　導函数の概念。導函数の計算

13　導函数の幾何学的意味。函数の変動。

14　$y=x^3+px+q$　$y=ax^4+bx^2+c$

15　グラフ表現に関する問題

第Ⅲ章　三角函数

16　弧と角

17　円函数。同一弧の円函数間の間係。注意すべき弧。関係ある弧。

18　与えられた弧の円函数を求める。円函数の逆函数。

*19　加法定理

*20　三角函数の変形。公式。

21　円函数の導函数，変動。

22　三角方程式。三角不等式。円函数の近似値。

第Ⅳ章　応　用

*23　運動学基礎

*24　等速直線運動。等加速度直線運動。

*25　練習問題

第1級（高2）幾何

*1課　スカラー積　平面　幾何

*2　三角形内の諸関係

3　正多角形。正多角形の内接

4　円の直径

5　面積の計算

6　円の面積

7　調和に分つ。調和線束。点の2直線に関する極

8　調和分割の応用

*9　直線（任意の座標系）

10　直線（応用）

11　円

12　放物線。放物線の方程式

13　放物線えの接線と法線。$xy=k$ えの接線。

空間幾何

14　正射影。三面角。多面角。

15　直線と平面のなす角。平面の傾線。　2直線の共通垂線。平面図形の正射影

16　多面体の一般化。柱体。平行六面体。

17　直方体，直角柱，斜角柱の体積

18　錐体台

19　円柱面と円柱

20　円錐面と円錐

21　球

22　球の決定。軌跡。球の表面積。

上記教科内容において*印のついている課とその課に含まれる節を示す。この際もベクトルに関係のある節を*印で示し，*印の節の内容を完全に紹介する。

順序は中2より指導の順に従う。

これによってベクトル指導の〝流れ〟を追うことができるようにした。

十　ベクトル関係の節の紹介

4 級（中学2年）代　数

5課　正負の数

37　向きを持った量

38　正負の数の定義39等しい数，逆の数

*40　ベクトル

*41　軸

*42　軸の上のベクトルの代数的測度

*43　同一軸上の等しいベクトル，逆のベクトル

*44　軸上の1点の印づけ

40　ベクトル

2点AとBとは2つの異なる向きに見ことの出来る1本の線分を定める。

もしこの線分上にAからBの〝向き〟をえらべば始点A，終点Bの〝有効線分〟又は〝ベクトル〟がえられる。これを記号で $\overrightarrow{AB}$ とかきベクトルABと読む。かくして

『ベクトルとは有向線分のことである。記号 $\overrightarrow{AB}$ は始点A，終点Bのベクトルを示す。』

直線ABはベクトルを支える〝台〟であってABの向きを定義している。AからBえの向きが，このベクトルの向きであって，ABの長さが，このベクトルの〝絶対値〟である。

線分 AB には向きの異なる二つのベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BA}$ とを結びつけることができることを注意しよう。それを混同してはいけない。

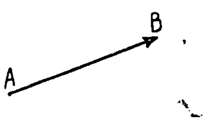
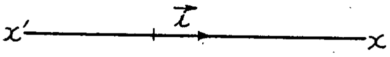


図 2

41　軸

1直線 $x'x$（図3）の上に x' から x への移動の向きをとれば軸 $x'x$ をうる。

『軸とは向きが付けられた1本の直線のことをいう。すなわち軸の向きと呼ばれる移動の向きをその上にえらばれた1本の直線のことである。』



（図3）

与えられた1直線 $x'x$ に対して，逆の向きの二つの軸 $\overrightarrow{x'x}$ と $\overrightarrow{xx'}$ とがともなっている。

ある軸の上にあって，普通用いられる長さの単位をその絶対値として持ち，かつこの軸と同じ向きをもつすべてのベクトル $\vec{i}$ をこの軸の単位ベクトルという。

その軸の上の〝単位ベクトル〟を一つ知ることにって，この軸は全く決定されることに気を付けよう。

42　軸の上のベクトルの代数的測度

『一つの軸上のベクトルの代数的測度とは，その絶対値がベクトルの絶対値であり，その符号がベクトルが軸と同じ向きか逆の向きをとるに従って＋か－をとる様な正負の数のことをいう。』

かくして長さの単位で目もられた軸 $x'x$ の上で（図4）いえば $\overrightarrow{AB}$ の代数的測度は(+3)，$\overrightarrow{CD}$ の代数的測度は (−5) である。

この時 $\overline{AB}=(+3)$　$\overline{CD}=(-5)$ とかくことにする。

さらに $\overline{AC}=(+10)$　$\overline{BC}=(+7)$　$\overline{DA}=(-5)$　$\overline{DB}=(-2)$ 等である。

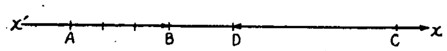
軸上のすべての単位ベクトルの代数的測度は (+1) である。

次の三つの記号の混同はさけなければいけない。

AB ：　線分 AB 又は線分 AB の長さ

$\overrightarrow{AB}$ ：　ベクトル $\overrightarrow{AB}$　（幾何学的要素）

$\overline{AB}$ ：　ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の代数的測度



（図4）

43　同一軸上の等しいベクトルと逆のベクトル

絶対値の等しい二つのベクトルは同一軸上では同じ向きか逆の向きを持つ。前の場合にはベクトルは等しく，後の場合にはベクトルは逆である。

かくして（図5）$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ は等しい。

この時 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ とかく。

これに反して $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{EF}$ とは逆である。

『同一軸上の等しいベクトルは等しい代数的測度をもち，逆のベクトルは符号反対の代数的測度をも

つ。』

かくして（図5）$\overline{AB}=(+3)$　$\overline{CD}=(+3)$

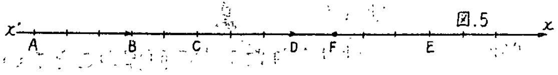


図5これに反して $\overline{EF}=(-3)$。それ故 $\overline{AB}$ と $\overline{EF}$ とは絶対値同じで符号が逆の数である。

逆に（図4）$\overline{AD}=\overline{DC}=(+5)$　従って $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$ と結論してよろしい

又 $\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{DC}$ は逆ベクトルである。

ベクトル $\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{BA}$ とは　逆ベクトルであって $\overline{AB}=(+3)$ ならば $\overline{BA}=(-3)$ であることに気を付けよう。

44　軸上の点の目印しづけ

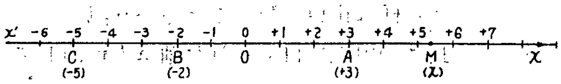
軸 $x'x$ を考えてこの上に固定した1点（これを〝原点〟（図6）と呼ぶ）Oをえらぼう。

『原点Oの軸上の点Mの横座標というのは，$\overrightarrow{OM}$ の代数的測度 $x=\overline{OM}$ のことをいう。』

1°　軸上のすべての点に対して，その点の横座標に等しい正負の数が対応する。かくして

$\overline{OA}=(+3)$ ：Aの横座標は $a=(+3)$

$\overline{OB}=(-2)$ ：Bの横座標は $b=(-2)$



（図6）

2°　逆にすべての正負の数に対して軸上の1点しかも唯1点を結びつけることが出来る。この点のことをこの数の像又は表現点と呼ぶ。かくして負の数（−5）には $\overline{OC}=(-5)$ であるような唯一つの点Cが対応する。

この点Cは軸と逆の向きを持ち，絶対値5のベクトル $\overrightarrow{OC}$ を作ることによってえられる。

かくして次の結論に到達する。

『原点Oの軸上のすべての点Mはその点の横座標 $x=\overline{OM}$ によって決定される。』

相異なる正負の数と一つの軸上の諸点の間に一つの対応が存在する。この軸に目盛りをづければ〝正負の数の梯子〟をうる。

練　習　問　題

1　原点Oの軸 $x'x$ の上に点 A(+3)，B(+11) と M(+7) を置け。$\overline{AB}$，$\overline{AM}$，$\overline{MB}$，$\overline{OM}$ 計算をせよ。線分 AB に対して点Mは何を表わすか。ベクトル $\overrightarrow{MA}$ と $\overrightarrow{MB}$ について何が言えるか。

2　軸 $x'Ox$ の上に A(+5)，B(+9)，CC(−1) と D(−5) を置け。$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{BC}$ を比べよ。

線分 AC と BD に対して点 M(+2) は何を表わすか。

3　軸 xy 上に2点 A(+1)，B(−3) がある。線分ABを8等分する諸点の横座標を求めよ。

4　A，Bを横座標が −2 と −5 の2点とせよ。ABの中点Mの横座標を求めよ。

5　点Aの横座標を +5 とせよ。原点Oに関してAの対称点 A′ の横座標は何か。

横座標 −1 の点Bについて原点Oに関して対称な点 B′ の横座標を求めよ。又 $\overline{AB}$ と $\overline{A'B'}$ を求めよ。

10課　シャールの関係

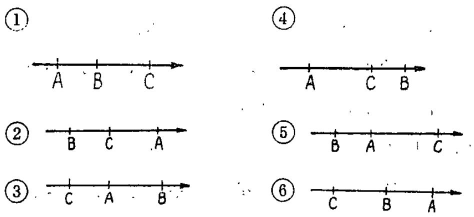
73　定理

『3点A，B，Cが1直線上を並んでいるならば代数的測度 AB，BC，AC は次の関係を満たす。

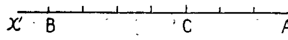
$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ 』

この基本的な関係はシャールの関係の名で知られている。（シャール 1973〜1880）

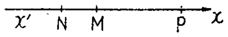
可能な場合の図は六つあることを見よう。



例えば②の場合において即ちCがBとAの間にある場合において証明してみよう。この時 $\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{BA}$。さて $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{BA}$ は軸と同じ向きをもっているからこの関係は $\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{BA}$ 又は $\overline{CB}-\overline{AC}=-\overline{AB}$ 移項すれば $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ かくして（図10）$\overline{AB}=(-7)$　$\overline{BC}=(+4)$　$\overline{AC}=(-3)$ 等式 $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ は $(-7)+(+4)=(+3)$ であるから確かめられた。



（図10）



（図11）

74　諸注意

1°図の場合に従って3点の相対的位置を表わすのには三つの等式を要する。

AB＋BC＝AC と AB−BC＝AC と BC−AB＝AC

これに反して

『シャールの関係は一般的であって，軸の向きに無関係である。』しばしば軸の向きをはっきりさせずにすますことが出来る。

2°　任意に並んだ3点M，NとPの間の関係をかくすために（図11）最初に位置しているNを文字MとPの間にさしはさんで$\overline{MP}=\overline{MN}+\overline{NP}$とかかれる。

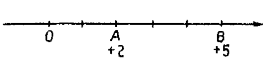
75　軸上のベクトルの代数的測度

『軸上のベクトルの代数的測度は，終点の横座標から始点の横座標を引いたものである。』

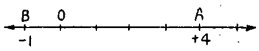
原点Oの軸$x'x$の上に　$\overline{OA}=a$，　$\overline{OB}=b$　なる2点A，Bを考えよう。3点O，A，Bに応用されたシャールの関係は　$\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB}$

$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$

$\overline{AB}=b-a$



（図12）



（図13）

図12　$a=(+2)$，$b=(+5)$

$\overline{AB}=(+5)-(+2)=(+3)$

図13　$a=(+4)$，$b=(-1)$

$\overline{AB}=(-1)-(+4)=(-5)$

例　寒暖計は軸に似させることができる。与えられた二つの時間における温度の変化は（終りの温度－始めの温度）という差である。寒暖計が正午に$+9°$を示し，同じ日の真夜中に$-3°$を示せば温度はこの間に$(-3°)-(+9°)=-12°$に等しい変化をうけた。

76　線分の長さ

『軸の上の線分の長さはその両端点の横座標の差の絶対値である。』事実代数的測度$\overline{AB}$（又は$\overline{BA}$）の絶対値は用いている長さの単位によってはかられた線分の長さに外ならないということを知っている。

それ故　$AB=|\overline{AB}|=|\overline{BA}|$

さて　$\overline{BA}=a-b$

であるから　$AB=|a-b|$

かくして（図12）　$AB=3=|(+5)-(+2)|$

又　　（図13）　$AB=5=|(-1)-(+4)|$

この公式は点Pが軸上のどんな点でも

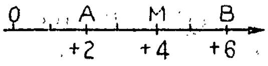
$AB=|\overline{PA}-\overline{PB}|$

とかけることに気を付けよう。

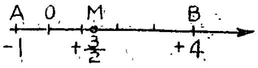
77　線分の中点の横座標

『軸上の線分の中点は横座標としてこの線分の両端点の横座標の和の半分をもつ。』

点M(x)は軸$x'x$の上の2点A(a)，B(b)を両端にもつ線分ABの中点としよう。（図14と図15）



（図14）



（図15）

ベクトル　$\vec{AM}$　と　$\vec{MB}$　は等しいので，　$\overline{AM}=\overline{MB}$，$\overline{OM}-\overline{OA}=\overline{OB}-\overline{OM}$　又は移項して

$2\overline{OM}=\overline{OA}+\overline{OB}$

$\overline{OM}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB})$　又は　$x=\frac{a+b}{2}$

かくして（図14）　$\overline{OA}=(+2)$　$\overline{OB}=(+6)$

$\overline{OM}=(+4)=\frac{(+2)+(+6)}{2}$

又（図15）　$\overline{OA}=(-1)$　$\overline{OB}=(+4)$

$\overline{OM}=(+\frac{3}{2})=\frac{(-1)+(+4)}{2}$

練　習　問　題

1　3点A，B，Cが軸xyに属してA(0)，B(+3)C(+5)の場合に　$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$　をたしかめよ

2　A(0)，B(−3)，C(2)。軸をxy，Oを横座標の原点とする。$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$　なる関係を確かめよ。

3　A(+3)，B(+5)の場合とA(−3)，B(+2)の場合にABの長さを求めよ。

4　A(+5)，B(+9)を軸上の2点，Mをその中点とする。$\overline{OM}=\frac{\overline{OA}+\overline{OB}}{2}$　を確かめよ。

5　軸xyの上に横座標が+2，+4，−1，−3の4点A，B，C，Dがあるとせよ。$\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$　をたしかめよ。この関係はA，B，C，Dの位置にかかわらず成り立つか？

6　軸上に4点A，B，C，Dがあるとせよ。

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}=0$　を示せ。

7　軸上の4点A，B，C，Dの横座標を+2，−3，−1，+4とせよ。

$\overline{DA}\cdot\overline{BC}+\overline{DB}\cdot\overline{CA}+\overline{DC}\cdot\overline{AB}=0$

を確かめよ。A，B，C，Dの横座標をa，b，c，dとかいた時にも成り立つか？

3　級（中学3年）幾　何

Ⅰ章　平面幾何

1課　2線分の比。線分を与えられた比に分ける点。

1　定　義

2　2線分の比の性質

*3　軸上のベクトル

4　比例する諸線分

5　問　題

*6　定　理

3　軸上のベクトル

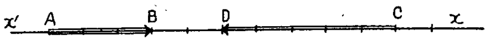
『軸$x'x$の上のベクトル$\vec{AB}$の代数的測度$\overline{AB}$

は，このベクトルが軸と同じ向きを持つか否かに従って，長さABに符号＋か－をつけることによって得られる。』

$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ なる関係と $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$（シャールの関係）は軸 $\overrightarrow{x'x}$ の向きと，点A，B，Cの配列のいかんにかかわらず成り立つ。以上のことを思い出しておこう。

『同一軸上の二つのベクトルの比は，この軸上のそれらの代数的測度の比の値に等しい。』

$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\dfrac{+3}{-5}=-\dfrac{3}{5}$　$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{DC}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\dfrac{3}{5}$（図3）



（図3）

$\overline{AB}$ と $\overline{CD}$ の比又は積はベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ が同じ向きをもつか否かに従って正か負であって軸 $\overrightarrow{xx'}$ の向きに関係がないことを気を付けよう

6　定理

1°『線分ABを1と異なる与えられた算術的比 k に分ける点は二つ存在する。』

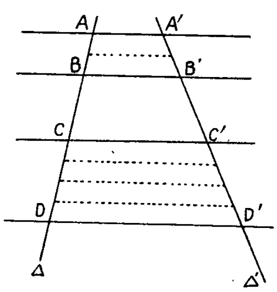
2°『線分ABを1と異なる与えられた代数的比 k に分ける点は一つ，しかも唯一つある。』

2課　ターレスの定理

7　一般的な叙述
*8　注意
9　ターレスの定理の等しい比の書き方
10　台形えの応用（ターレスの定理の第1形）
11　逆
12　三角形えの応用（ターレスの定理の第2形）
13　逆
14　注意

7　一般的な叙述

『いくつかの直線が平行のとき，それらは任意の二つの割線の上に，比例対応する諸線分を定める。』



8　注意

割線 △，△′ は向きが付けられていると仮定してみよう。同じ向きのベクトル $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$… の代数的測度は同符号であり，$\overline{A'B'}$，$\overline{B'C'}$，$\overline{C'D'}$……の代数的測度も同符号である。

それ故絶対値において等しい $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$，$\dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$ …は同符号であって，次のようにかくことができる

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$$

II章　立体幾何

20課　正射影。ベクトル

157　正射影の定義
158　直線の正射影
159　線分の正射影
160　定　理
161　注　意
*162　ベクトルの定義
*163　等しいベクトル
*164　逆のベクトル
*165　平行な二つのベクトルの比
*166　2ベクトルの和
*167　2ベクトルの差
*168　ベクトルの正射影

122　ベクトルの定義

『ベクトルとは向きを付けられた線分のことをいう。』

ベクトルはその絶対値が0の時0である。AとBが一致する時 $\overrightarrow{AB}=0$ である。

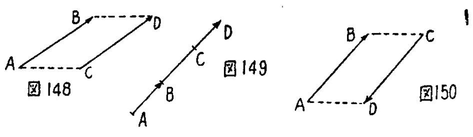
二つのベクトルはその台が一致するか平行のとき同じ方向を持つ。それらのベクトルは平行で同じか又は逆の向きを持つことが出来る。

163　等しいベクトル（同値ベクトル）

『二つのベクトルは同じ方向，同じ向き，同じ絶対値の時等しいという。』

これはベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ の場合であって $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ とかく。

図ABDCは真の（図148）又はつぶれた（図149）平行四辺形である。



もし $\overrightarrow{CD}$ と $\overrightarrow{EF}$ がともに $\overrightarrow{AB}$ に等しければそれらは同じ方向，同じ向き，同じ絶対値を持つそれ故それらは又等しい。

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ かつ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$ より $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$

164　逆ベクトル

『二つのベクトルは同じ方向，同じ絶対値　逆の向きをもつ時，逆であるという。』

これは $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ (図150の場合である。この時 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$ とかく。この場合平行四辺形になるのはABCDであることに注意しよう。
特別の場合として $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BA}$ は逆である。
$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

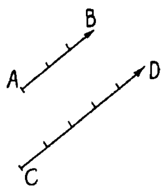
165　二つの平行なベクトルの比

『これは二つのベクトルの絶対値の比を絶対値として持ち，二つのベクトルが同じ向きか，逆の向きかに従って＋か－の符号をとる代数的な数である。』

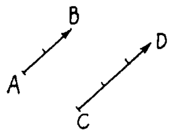
かくして（図151）$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}=+\dfrac{3}{5}$　又（図152）
$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}=-\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}=k$ の時 $\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{CD}$ とかく。

この時〝$\overrightarrow{AB}$ は $\overrightarrow{CD}$ に代数的数 k をかけた積と呼ぶ〟



（図151）

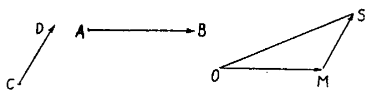


（図152）

こうして二つのベクトルはその比が $+1$ の時等しく，-1 の時逆である。

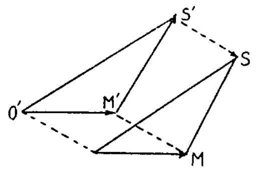
166　2ベクトルの和

1°『二つの引続くベクトル $\overrightarrow{OM}$ と $\overrightarrow{MS}$ との和は $\overrightarrow{OM}$ の始点と $\overrightarrow{MS}$ の終点を結ぶベクトル $\overrightarrow{OS}$ であると定義する。』
図153 では $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{OS}$



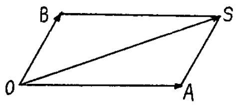
（図153）

2°　与えられた2つのベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ の和を作るには，任意の点Oから出発して $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{CD}$ なる $\overrightarrow{OM}$ と $\overrightarrow{MS}$ を作る。$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MS}$ それ故 $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ ベクトル $\overrightarrow{OS}$ は，〝選ばれた原点Oの位置に関係しない〟ことに注意することは重要である。
$\overrightarrow{O'M'}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OM}$ であるように $\overrightarrow{O'M'}$ を作り $\overrightarrow{M'S'}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MS}$ であるように $\overrightarrow{M'S'}$ を作る。（図154）すると四辺形 OMM′O′ とMM′S′S は平行四辺形で $\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{SS'}$
$\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{SS'}$ は四辺形 OO′S′Sが平行四辺形であることを示す。
それ故 $\overrightarrow{O'S'}=\overrightarrow{OS}$ となる。

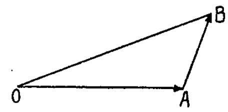


（図 154）

3°　〝もし二つのベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ とが同じ始点をもつ時にはその和 $\overrightarrow{OS}$ は AO と OBを隣辺として作られた平行四辺形AOBSの第4の頂点である。〟（図155）
$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$
二つの同じ始点を持つベクトルの和は，それ故その和の順序に関係しない。
任意の二つのベクトルについても全く同じである。



（図155）



（図156）

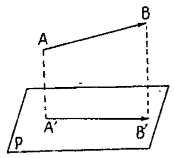
167　二つのベクトルの差

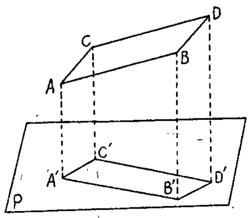
『これは第1のベクトルを求めるために第2のベクトルに加えられるべきベクトルである。』
図156 で $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$
それ故 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
『任意のベクトル $\overrightarrow{AB}$ は任意の点Oをその終点に結びつけたベクトルとその始点と結びつけたベクトルとの差である。』
他方 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$ だから $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ とあわせて考えると $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}$。
ベクトル $\overrightarrow{OA}$ を引くにはベクトル $\overrightarrow{AO}$ を加えればよいことがわかる。

168　ベクトルの正射影

『与えられたベクトル $\overrightarrow{AB}$ の平面Pえの正射影はAの正射影A′を，Bの正射影B′に結びつけた $\overrightarrow{A'B'}$ である。（図157）と定義する。』
次にその諸性質を記載する。
1°『二つの等しいベクトルの同一平面上えの正射影は又二つの等しいベクトルである°』
実際（図158）もし $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ならば，四辺形ABDCは平行四辺形であり，その正射影 A′B′D′C′ も平行四辺形である。これより $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{C'D'}$。
もし平行四辺形がつぶれている場合には，$\overrightarrow{EF}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ なる $\overrightarrow{EF}$ を作る。等式 $\overrightarrow{E'F'}=\overrightarrow{A'B'}$ と $\overrightarrow{E'F'}=\overrightarrow{C'D'}$ より $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{C'D'}$ をうる





(図157)　　(図158)

2°　『二つの平行なベクトルの比はこれらのベクトルの正射影の比に等しい。』

$\overrightarrow{A'B'}$ と $\overrightarrow{C'D'}$ とをP平面（図159）上の平行ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ の正射影としよう。

直線AB上に $\overrightarrow{CD}$ と等しい $\overrightarrow{EF}$ を作れば，$\overrightarrow{E'F'}=\overrightarrow{C'D'}$ ターレスの定理により

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{EF}}=\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{E'F'}}$ だから $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{EF}}=\dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{E'F'}}=\dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{C'D'}}$

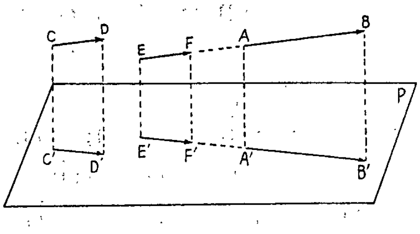
3°　『二つのベクトルの和の正射影は正射影の和に等しい。』

二つのベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ との正射影を $\overrightarrow{A'B'}$ と $\overrightarrow{C'D'}$ とする。（図160）

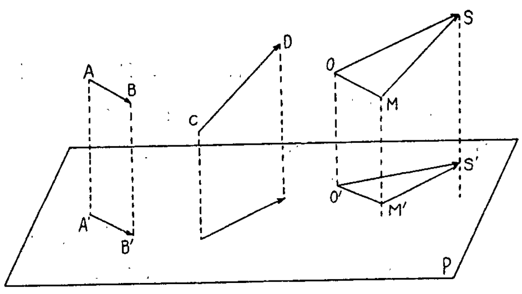
$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{CD}$ なる $\overrightarrow{OM}$ と $\overrightarrow{MS}$ を作れば，$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

O，M，S の正射影を O'，M'，S' とかくと

$$\overrightarrow{O'S'}=\overrightarrow{O'M'}+\overrightarrow{M'S'}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{C'D'}$$



(図 159)



(図 160)

練　習　問　題

1. $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の和を作り OA＝12，OB＝5，∠AOB＝90° の時，その長さを計算せよ。
又同じく OA＝OB＝32，∠AOB＝120° として計算せよ。

2. ① 二つの与ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ がある時，種々の正負の数 k に対して $\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=k\overrightarrow{OB}$ を作れ。
② $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB}$ を証明せよ。

3. I，Jを線分 OA，OB の中点とし，Mを線分 AB の中点とする。
① $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
② $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ であることを証明せよ。

4. 定義により $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$ である。このことから三つのベクトル $\overrightarrow{V_1}$，$\overrightarrow{V_2}$，$\overrightarrow{V_3}$ を知って $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_2}+\overrightarrow{V_3}$ を作る方法をみちびけ。
又 $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_3}+\overrightarrow{V_2}=\overrightarrow{V_3}+\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_2}$ を示せ。

5. 中心Iの平行四辺形ABCDと任意の点Mを考える。
① $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MI}$ を証明せよ。
② これより $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MI}$ を示せ。

6. Gを△ABCの重心とせよ。MAの延長上にDをとってGM＝MDとする。（MはBCの中点）
① $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$ を示せ。
② これより $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$ を導け。
③ Oを任意の点とすれば $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$ を示せ。

7. 線分ABの中点Mと線分CDの中点Nを結ぶ線分の中点をIとせよ。
① $\overrightarrow{IM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})$　$\overrightarrow{IN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID})$
これより $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=0$
② Oを任意の点とするとき，
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OI}$ を証明せよ。

第2級（高1）代数

I章　代数計算

5課　ベクトル。シャールの関係

*88　ベクトルの定義
*89　二つの平行ベクトルの比
*90　軸
*91　ベクトルの代数的測度
*92　直線上の点の目印づけ
*93　正負の数えの応用
*94　二つのベクトルの和
*95　定理　1
*96　注意
*97　一般化
*98　定理　2
*99　線分の中点の横座標

88　ベクトルの定義

『向きが付けられた直線上の線分をベクトルと呼ぶ。』

89　二つの平行ベクトルの比

『これは二つのベクトルの長さの比を絶対値として持ち，二つのベクトルが同じ向きを持つか，反対の向きを持つかに従って＋又は－の符号を持つ正負の数のことである。』

『二つの平行なベクトルは，同じ長さと同じ向きを持てば等しい。同じ長さと逆の向きを持てば逆である。』

90　軸

『向きの付いた直線を軸という。』

軸 $x'x$ の向きをこの軸の〝正の向き〟といい，軸 $x'x$ の向きと反対の向きをこの軸の〝負の向き〟という。単位ベクトル

91　ベクトルの代数的測度

『平行の軸（又は同じ台上の）上のベクトルの代数的測度とは，このベクトルとこの軸上の単位ベクトルとの比をいう。

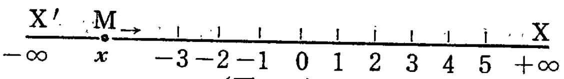
92　直線上の目印づけ軸を X′X とする。この軸の上に原点と呼ばれる固定点Oを選ぶ。

『$\overrightarrow{OM}$ の代数的測度を点Mの横座標という。』

『軸上の１点の位置はその横座標によって決定される。

93　正負の数えの応用

点Mが軸 X′X を正の方向に動く時，その横座標 x は増加の順序に可能なすべての正負の数をとる。(図13)



（図　13）

実験X′からOまでの $x=\overline{OM}$ 対は負でその絶対値は減少する。それ故 x は増加する。

このことから横座標が x の点Mが点 A(−2) と点 B(+3) によって限られる XX′ 軸上の部分に属するための必要十分条件を導くことが出来る。

1°　半直線AX′　:　　$x<-2$

2°　半直線BX　:　　$x>+3$

3°　線分　AB　:　$-2\leqq x\leqq +3$

Mが無限に軸上を遠ざかる時，その横座標 x はあらかじめ，きめられた，すべての値を通過する。

この時 x は無限大になるといい

$x\to+\infty$（x が正の向きに遠ざかる時）

$x\to-\infty$（〃負　　〃　　）とかく

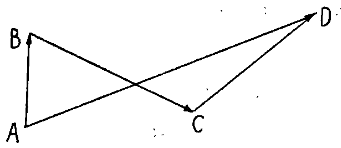
94　2ベクトルの和

『引続く二つのベクトルの幾何学的和（又は合ベクトル）は始点として第１のベクトルの始点を，終点として第２のベクトルの終点を持つベクトルのことである。』

この定義は同一台上の引続くベクトルにも適用されうる。引続かない二つのベクトルの和を作るには，それ等にそれぞれ等しくて引続いている二つのベクトルを作ればよい。

又多くのベクトルの和を定義することができる。

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$　(図17)



二つ又は多くのベクトルの和の長さが一般にはこれらのベクトルの長さの和に等しくないことに注意するのは重要である。

95　定理　1

『同一軸上の引続く二つのベクトルの和の代数的測度はこれらのベクトルの代数的測度の和に等しい。』

96　注意

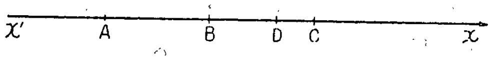
『シャールの関係は一般的で軸の向きに関しない。』

97　一般化

シャールの関係は引続くいくつかのベクトルについて一般化される。もしA，B，C，Dが一直線上に並んでいるならば (図19)

$\overline{AD}=\overline{AC}+\overline{CD}=(\overline{AB}+\overline{BC})+\overline{CD}$

これより $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$



（図　19）

98　定理　2

『軸上のベクトルの代数的測度は，そのベクトルの終点の横座標から始点の横座標を引いたものに等しい。』

99　線分の中点の横座標

『線分の中点の横座標は，この線分の両端点の横座標の和の半分を横座標としてもつ。』

練　習　問　題

1. 同一軸上の二つのベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ の比はそれらの代数的測度の比に等しいことを証明せよ。いいかえれば $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ は $\overline{AB}=k\overline{CD}$ と同値であることを証明せよ。
2. $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ 及び線分ABの中点Iがあるとき $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=O$ 又 $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$
3. 重心がGの△ABCと任意の１点Mを考える

① $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$ を証明せよ。

② これより $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ をみちびけ。

Ⅲ章　グラフ表現

20　課諸函数についての一般論。デカルト座標。

260　任意のデカルト座標

その交点O（図25）を共通の原点とする二つの軸 $x'x$, $y'y$ を平面上で考えよう。

$\overrightarrow{i}$ を軸 Ox の, $\overrightarrow{j}$ を軸 Oy の単位ベクトルとせよ。この時 $\overrightarrow{i}$ の絶対値と $\overrightarrow{j}$ の絶対値とは必ずしも等しい必要はない。

平面上の与えられた点Mを通って Oy に平行線を引き，Ox とPで交わらせ，Ox に平行線を引き Oy とQで交わらせる。

平面上における点Mの位置は点PとQの位置によって決定される。従って代数的測度 $x=\overline{OP}$, $y=\overline{OQ}$ で決定される。数 x は点Mの〝横座標〟，y は点Mの〝縦座標〟である。

『二つの数 $x=\overline{OP}$, $y=\overline{OQ}$ の集合はデカルト座標系に関する点Mの座標をなす。』

点Oは座標の〝原点〟であり，軸 $x'x$ と $y'y$ とは〝座標軸〟である。〝$\overline{OP}$ と $\overline{OQ}$ とは $\overline{OM}$ の軸 Ox と軸 Oy えの射影である。〟各軸えの射影は互に他の軸えの平行線により作られる。

又 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ より

$$\boxed{\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}} \quad (1)$$

逆に与えられた座標 x, y を持つ点Mを決めるためには，ベクトル等式により定められるベクトルを作ればよい。

先づ $\overline{OP}=x$ である点PをOx上に，$\overline{OQ}=y$ である点QをOy上に決め，平行四辺形POQMを作る。〟

かくして得られた点Mは数の組 (x, y) の〝表現点〟又は〝像〟である。

262　直交座標系，正規直交座標系

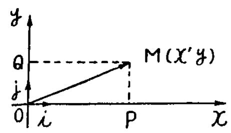
座標軸 $x'x$ と $y'y$ とが垂直の時，デカルト座標系 xOy は直交であって，その座標は〝直交座標〟といわれる。

これと相対する場合〝斜交座標〟という。

『デカルト座標系は各軸の単位ベクトル $\overrightarrow{i}$ と $\overrightarrow{j}$ とが直交して絶対値が等しい時，正規直交系という。』

この場合（図27）この共通絶対値を長さの単位としてとることが出来る。そして長方形POQMにおいて $\overline{OM}^2=\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2$ が成り立ち

$$\boxed{\overline{OX}^2=x^2+y^2}$$



（図27）

この公式は直交座標系においてのみ成り立つことを注意しよう。

263　ベクトルのスカラー成分

デカルト座標系をもった任意の平面において始点 $A(x_1, y_1)$，終点 $B(x_2, y_2)$ なるベクトル $\overrightarrow{AB}$ を考えよう。

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$ なるベクトル $\overrightarrow{OM}$ を作り，(X, Y) をM点の座標とせよ。

$\overrightarrow{OM}=X\overrightarrow{i}+Y\overrightarrow{j}$ より $\boxed{\overrightarrow{AB}=X\overrightarrow{i}+Y\overrightarrow{j}}$

XとYとは $\overrightarrow{AB}$ の〝スカラー成分〟と呼ばれる数XとYとは点Mの位置を決めると同様に，$\overrightarrow{OM}$ すなわち $\overrightarrow{AB}$ に等しいすべてのベクトル $\overrightarrow{V}$ を特徴ずける。

そこで $\overrightarrow{V}(X, Y)$ とか $\overrightarrow{AB}(X, Y)$ とかく。

$X=\overline{OP}$, $Y=\overline{OQ}$ は $\overrightarrow{OM}$ の Ox, Oy えの射影の代数的測度であり，従って $\overrightarrow{AB}$ に等しいベクトルの Ox, Oy えの射影の代数的測度である。この一つの軸えの射影は，他の軸に平行におこなわれる。

『$\overrightarrow{AB}$ のスカラー成分は軸えの射影の代数的測度であって，$\overrightarrow{AB}$ に等しいすべてのベクトルを特徴づける。』

ベクトル等式 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ 又は $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ は軸えの射影において $X=x_2-x_1$, $Y=y_2-y_1$ を与える。

ベクトルのスカラー成分の各々はその終点の各座

標から始点の各座標を引いたものである。

264　1°　線分の中点

線分ＡＢの中点 Ｉ$(x,\ y)$はベクトル等式$\vec{\mathrm{IA}}+\vec{\mathrm{IB}}=0$ によって定義される。つまり $\vec{\mathrm{OA}}-\vec{\mathrm{OI}}+\vec{\mathrm{OB}}-\vec{\mathrm{OI}}=0$

それ故 $\vec{\mathrm{OI}}=\frac{1}{2}(\vec{\mathrm{OA}}+\vec{\mathrm{OB}})$

この関係を座標軸に射影することによって

$$\boxed{x=\frac{1}{2}(x_1+x_2),\quad y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)}$$

2°　2間の距離（正規直交系）

スカラー成分 $\mathrm{X}=x_2-x_1$，$\mathrm{Y}=y_2-y_1$ なるベクトル $\vec{\mathrm{AB}}$ の絶対値は等しいベクトル $\vec{\mathrm{OM}}$（X，Y）の絶対値に等しい。

さて $\overline{\mathrm{OM}}^2=\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2$ であるから

$\overline{\mathrm{AB}}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

〝直交座標においてはベクトルの絶対値の平方は，スカラー成分の平方の和に等しい。〟

265　平行ベクトル

任意の座標系をもった平面で（図29）二つのベクトル $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{X},\ \mathrm{Y})=\vec{\mathrm{OM}}$ と $\vec{\mathrm{V}}'(\mathrm{X}',\ \mathrm{Y}')=\vec{\mathrm{OM}}'$ を考えよう。

この二つのベクトルが平行であるためには

$\vec{\mathrm{V}}'=k\vec{\mathrm{V}}$ 又は $\vec{\mathrm{OM}}'=k\vec{\mathrm{OM}}$

これより $\mathrm{X}'=k\mathrm{X}$，$\mathrm{Y}'=k\mathrm{Y}$　従って $\frac{\mathrm{X}'}{\mathrm{X}}=\frac{\mathrm{Y}'}{\mathrm{Y}}$

逆にもしこの比が等しければ$\mathrm{X}'=k\mathrm{X}$，$\mathrm{Y}'=k\mathrm{Y}$

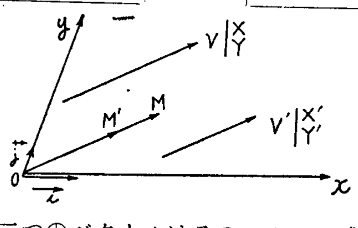
これより $\vec{\mathrm{OM}}'=k\mathrm{X}\vec{i}+k\mathrm{Y}\vec{j}=k(\mathrm{X}\vec{i}+\mathrm{Y}\vec{j})=k\vec{\mathrm{OM}}$

つまり $\vec{\mathrm{V}}'=k\vec{\mathrm{V}}$

従って $\vec{\mathrm{V}}'$ と $\vec{\mathrm{V}}$とは平行である。

$\boxed{\vec{\mathrm{V}}/\!/\vec{\mathrm{V}}'} \iff \boxed{\frac{\mathrm{X}'}{\mathrm{X}}=\frac{\mathrm{Y}'}{\mathrm{Y}}}$

又 $\boxed{\vec{\mathrm{V}}'=k\vec{\mathrm{V}}} \iff \boxed{\mathrm{X}'=k\mathrm{X},\ \mathrm{Y}'=k\mathrm{Y}}$



（図29）

『二つのベクトルはそのスカラー成分が比例し又そのベクトルの比が同じ成分同志の比に等しい時に平行である。』

特に二つのベクトルはそのスカラー成分が互に等しい時に等しい。

$\boxed{\vec{\mathrm{V}}=\vec{\mathrm{V}}'} \iff \boxed{\mathrm{X}=\mathrm{X}',\ \mathrm{Y}=\mathrm{Y}'}$

266　直交ベクトル（正規直交系）

$\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{X},\ \mathrm{Y})=\vec{\mathrm{OM}}$ と $\vec{\mathrm{V}}'(\mathrm{X}',\ \mathrm{Y}')=\vec{\mathrm{OM}}'$が直交するためには（図30）△OMM′において ∠O＝∠Rであることが必要十分である。

$\overline{\mathrm{OM}}^2+\overline{\mathrm{OM}}'^2=\overline{\mathrm{OO}}'^2$

つまり　$(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2)+(\mathrm{X}'^2+\mathrm{Y}^2)^2=(\mathrm{X}'-\mathrm{X})^2+(\mathrm{Y}'-\mathrm{Y})^2$

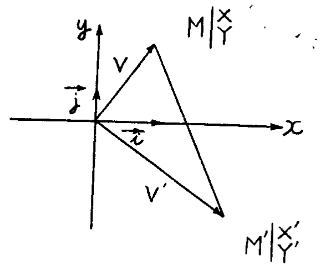
整理して $\boxed{\mathrm{XX}'+\mathrm{YY}'=0}$

$\vec{\mathrm{V}}$と$\vec{\mathrm{V}}'$との同じ成分同士の積の和であるXX′＋YY′を$\vec{\mathrm{V}}$と$\vec{\mathrm{V}}'$との〝スカラー積〟と呼ぶ。

『二つのベクトル$\vec{\mathrm{V}}$(X，Y) と $\vec{\mathrm{V}}'$(X′，Y′) とが直交するためにはそのスカラー積が０になることが必要十分である。』

それ故正規直交系では

$\boxed{\vec{\mathrm{V}}\perp\vec{\mathrm{V}}'} \iff \boxed{\mathrm{XX}'+\mathrm{YY}'=0}$



（図30）

267　座標軸の平行移動

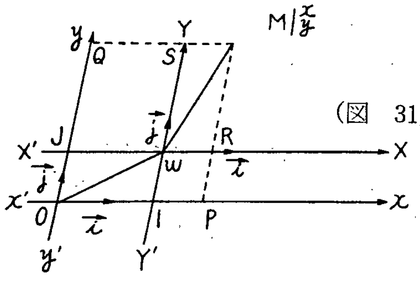
座標系 xOy を持った平面で点 $w(x_0,\ y_0)$ を通って $x'x$ に平行な軸 Y′Y と単位ベクトル$\vec{i}$軸 $y'y$ に平行な軸 Y′Y と単位ベクトル$\vec{j}$をひく。xOy を $\vec{\mathrm{O}w}$ だけ平行移動させると XwY をうる。

点 M$(x,\ y)$ を平面上の任意の点とし，新しい軸 wX と wY に対する座標をX，Yとする。

$\vec{w\mathrm{M}}=\mathrm{X}\vec{i}+\mathrm{Y}\vec{j}$は X，Yが古い軸O，O$y$ に対するベクトル $\vec{w\mathrm{M}}$ のスカラー成分であることを示す。$\mathrm{X}=x-x_0$　$\mathrm{Y}=y-y_0$

これより $\boxed{x=x_0+\mathrm{X},\ \ y=y_0+\mathrm{Y}}$

『古い座標は新しい座標に新しい原点の座標を加えたものに等しい。』



（図　31）

21課　$y=ax$，$y=ax+b$ の研究

270　$y=ax$

271　定　理
272　無限の値
273　変動の表
274　グラフ表現
275　定　理
276　直線　$y=ax$ の方向係数
277　正規直交系における傾き
278　$y=ax+b$
279　定　理
280　変動の表
281　グラフ表現
*282　定　理
283　定　義
284　逆
285　直線　$y=ax+b$ の作図
286　平行直線
287　直交座標における直交直線

282　定理

『$y=ax+b$ は直線 $y=ax$ と平行な直線で軸Oy を縦座標 b の点で切る直線としてグラフに表わされる。』

22課　$y=ax+b$ の応用

288　$ax+by=c$ のグラフ表現
289　定　理
*290　直線の方程式の決定
291　2直線の交点
292　二つの方程式の系のグラフ解法
*293　等速運動
294　等速運動の時間方程式
295　一次式のとる値の符号
296　不等式 $ax+by+c>0$ のグラフ解法
297　応　用

290　直線の方程式の決定

1°　与えられた点 $M_1(x_1, y_1)$ を通り方向係数 m の直線の方程式

2°　$M_1(x_1, y_1)$ と $M_2(x_2, y_2)$ を通る直線

293　等速運動

『動点の通過距離がその間の時間に比例する時この点は等速運動をするといわれる。』

動点の〝速度〟は単位時間中の運動距離のことである。

例1　自転車乗りが午前8時に時速24km で出発する。時刻 x における通過距離 y を決定せよ。

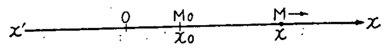
例2　汽車が時速75km でパリに向けて進む。3時にパリから 380km の地点まで来た時，時刻 x におけるこの汽車のパリまでの距離を定めよ。

例3　軸上に原点O，動点M(x)，動点Mの動き出しの点 $M_0(x_0)$ がある。Mが軸の向きに動けば＋，逆向きに動けば－で計算することにして v をMの秒速とする。（Mは等速直線運動をするとする。）いいかえると，1秒間に点Mがえがくベクトルの代数的測度を速度というのである。

従って t 秒間に作られるベクトル $\overrightarrow{M_0M}$ は代数的測度として $\overline{M_0M}=vt$ をもつ。

シャールの公式により $\overline{OM}=\overline{OM_0}+\overline{M_0O}$

つまり　$x=x_0+vt$



25課　$y=\dfrac{1}{x}$ の研究，$y=\dfrac{a}{x}$ の研究

322　例1
323　例2
324　一般の場合
325　グラフ表現
*326　$y=\dfrac{a}{x}$ の対象性
327　双曲線と直線との交点

326　$y=\dfrac{a}{x}$ の対象性

1°　原点が対象の中心である。

双曲線 $xy=a$ の上に横座標が α と $-\alpha$ なる2点 M と M′ を考えよう。

それらの横座標は $\dfrac{a}{\alpha}$ と $-\dfrac{a}{\alpha}$ で絶対値等しく符号反対である。$\overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{OM'}$　2点MとM′はOに関して対象である。Mが曲線上を動けば，その対象点M′も同じである。

2 級（高1）幾　何

I章　平面幾何

11課　2線分の比，線分を与えられた比に分ける点，調和に分ける。

214　方向付けられていない2線分の比
*215　向きの付けられた要素
*216　同一台上の2ベクトルの比
*217　軸上のベクトルの代数的測度
*218　定理219定義
220　問　題
221　定　理
*222　ベクトルを
*223　定　理
*224　系
225　定　義
226　横座標間の関係
227　前の関係における注意すべき公式

228　注意

215　向きの付けられた要素

1°　軸とは向きの付けられた直線のことである。

2°　ベクトルとは向きの付けられた線分である。

216　同一台上の2ベクトルの比

『これはその絶対値が2ベクトルの長さの比で，その符号は二つのベクトルが同じ向きか反対かに従って＋か－の符号をとる正負の数である。』

217　軸上のベクトルの代数的測度

『軸上のベクトルの代数的測度とはこのベクトルの軸上の単位ベクトルとの比のことである。

$$\overline{AB}=\frac{\overrightarrow{AB}}{\vec{i}} \iff \overrightarrow{AB}=\overline{AB}\cdot\vec{i}$$

横座標

1°　シャールの関係

$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC} \iff \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$$

2°　軸上のベクトルの代数的測度はその終点の横座標から始点の横座標を引いたものである。

$$\overline{OB}=\overline{OA}+\overline{AB} \iff \overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$$

$$AB=|\overline{OB}-\overline{OA}|$$

218　定理

『同一軸上の2ベクトルの比はそれらの代数的測度の比に等しい。』

Ⅱ章　空間幾何

21課　ベクトル。ベクトルと数との積。ベクトルの和

*351　向きの付けられた要素
*352　等しいベクトル
*353　平行な二つのベクトルの比
*354　ベクトルに数をかける
*355　ベクトルの代数的測度
*356　定理
*357　ベクトルに数をかけたベクトルの作図
*358　二つのベクトルの和
*359　二つのベクトルの差
*360　多くのベクトルの和
*361　ベクトルの和の諸性質
*362　ベクトルの分解

351　向きの付けられた要素

幾何において向きの付けられた要素を用いることは若干の定理により精密でより一般的な形を与えることを可能にする。

『軸とは向きの付けられた直線である。』

『ベクトルとは向きの付けられた線分である。』

『Vはその絶対値が0の時0である。』

352　等しいベクトル

『二つの等しいベクトルとは同じ方向，同じ向き同じ絶対値をもつベクトルである。』

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CA}$$

つまり〝二つのベクトルの等式においては内側の文字又は外側の文字同士を交換してもよい。〟

$$\vec{V}_1=\vec{V}_3,\ \vec{V}_2=\vec{V}_3 \iff \vec{V}_1=\vec{V}_2$$

つまり

〝第3のベクトルに等しい二つのベクトルは又等しい。〟

353　二つの平行なベクトルの比

『同じ方向の二つのベクトルの比は絶対値として二つのベクトルの絶対値の比を，符号としてその二つのベクトルが同じ向きか否かに従って＋か－を持つ様な正負の数である。』

354　ベクトルと数の積

『二つのベクトル $\vec{V}_1$ と $\vec{V}_2$ が比として k をもてば $\vec{V}_1$ は $\vec{V}_2$ と k との積であると定義する。』

つまり　$\dfrac{\vec{V}_1}{\vec{V}_2}=k \iff \vec{V}_1=k\cdot\vec{V}_2$

この等式は $\vec{V}_1$ と $\vec{V}_2$ とが同じ方向を持っていることを含んでいる。

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}=-1 \iff \overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$$

特に　$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

355　ベクトルの代数的測度

『平行な軸（又は同じ台）上のベクトルの代数的測度はこのベクトルとこの軸の単位ベクトルとの比のことである。

$$\overline{AB}=\frac{\overrightarrow{AB}}{\vec{i}} \iff \overrightarrow{AB}=\overline{AB}\cdot\vec{i}$$

356　定理

『同じ方向を持った任意の軸上において平行な二つのベクトルの比はそれらの代数的測度の比に等しい。』

このことから比 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ は軸 $x'x$ の向きに関係しないことがわかる。

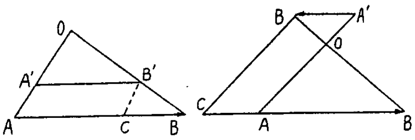
357　ベクトルと数との積ベクトルの作図

$k\overrightarrow{AB}$ を作図するために，直線AB外に任意の点Oをとり，$\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=k\overrightarrow{OB}$ であるように A′，B′ をとって平行四辺形 B′A′AC を作ると

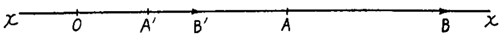
$$\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}}=\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

さて，ターレスの定理によって $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}=k$

それ故 $\dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}}=k$　従って $\overrightarrow{A'B'}=k\cdot\overrightarrow{AB}$



注意　もしOをABの台 $x'x$ 上にえらべば



$\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OB}-k\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{AB}$

又 $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow \overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB}$

かくして

『$k\overrightarrow{AB}$ はOを任意の点とする時 $\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'}=k\overrightarrow{OB}$ であるような $\overrightarrow{A'B'}$ である。』

特にOはA又はBと一致することで出来る。

358　二つのベクトルの和

『二つのベクトルの和はその順序に関係しない。』

359　二つのベクトルの差

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

『任意の $\overrightarrow{AB}$ は与えられた点Oをそのベクトルの終点と始点に引続いて結ぶことによって，えられるベクトルの差である。』

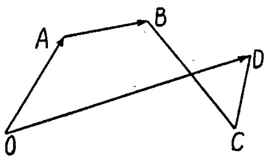
二つの与えられたベクトル $\overrightarrow{V_2}$ と $\overrightarrow{V_1}$ の差ABを作るためには $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{V_2}$, $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{V_1}$ となるように図を作る。

すると $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}+(-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{V_2}+(-\overrightarrow{V_1})$

『あるベクトルを引くには，その逆ベクトルを加えればよい。』

360　多くのベクトルの和

多くのベクトル $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}\cdots\overrightarrow{V_n}$（この順序に並べられた）の和は $\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_2}$ を作り，次にこの辺に $\overrightarrow{V_3}$ を加え，かくしてベクトルがつきるまで続けてえられるベクトル $\overrightarrow{W}$ のことを定義する。



$\overrightarrow{W}$ も用いられた始点には関係しない。

O，A，B，C，D の位置の如何にかかわらず

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$$

361　ベクトルの和の性質

1°『ベクトルの加法は可換である。』

$$\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_2}+\overrightarrow{V_3}+\overrightarrow{V_4}=\overrightarrow{V_3}+\overrightarrow{V_2}+\overrightarrow{V_4}+\overrightarrow{V_1}$$

2°『ベクトルの加法は結合律を満たす。』

言いかえればベクトルの和においては，それらのベクトルの中のいくつかを和でおきかえることができる。

$$\overrightarrow{V_1}+(\overrightarrow{V_2}+\overrightarrow{V_3})+\overrightarrow{V_4}=\overrightarrow{V_1}+(\overrightarrow{V_2}+\overrightarrow{V_3}+\overleftarrow{V_4})$$

この性質は加法の可換性によってどのようなベクトルの集合に対しても正しい。

$$\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_2}+\overrightarrow{V_3}+\overrightarrow{V_4}+\overrightarrow{V_5}$$
$$=\overrightarrow{V_2}+\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_3}+\overrightarrow{V_5}+\overrightarrow{V_4}$$
$$=\overrightarrow{V_2}+(\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_3}+\overrightarrow{V_5})+\overrightarrow{V_4}$$

3°『多くのベクトルをそれぞれ k 倍したベクトルの和はそれらのベクトルの和の k 倍に等しい。』

ベクトルに数をかける乗法はベクトルの加法に関して分配律を満たす。

$$k\overrightarrow{V_1}+k\overrightarrow{V_2}+k\overrightarrow{V_3}=k(\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_2}+\overrightarrow{V_3})$$

4°『一つのベクトルに数の和をかけるのは，そのベクトルに和の各項をかけて加えたものに等しい。』

$$(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{V}=\alpha\overrightarrow{V}+\beta\overrightarrow{V}+\gamma\overrightarrow{V}$$

ベクトルに数をかける乗法は正負の数の加法に関して分配律を満たすという。

362　ベクトルの分配

1°　平面上に1ベクトル $\overrightarrow{OM}$ と二つの別々の方向 Ox, Oy があるとしよう。

M を通って Oy, Ox に平行な直線が Ox, Oy を切る点をA，Bとする。

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$

この時ベクトル $\overrightarrow{OM}$ は二つの方向 Ox, Oy に従って分解されたといわれる。

2°　同様に空間においてベクトル $\overrightarrow{OM}$ と同一平面にない三つの方向 Ox, Oy, Oz があるとしよう。

Mを通って三つの平面 yOz, zOx, xOy に平行な平面はおのおの Ox, Oy, Oz をA，B，Cで切るとする。

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

ベクトル $\overrightarrow{OM}$ は三つの方向 Ox, Oy, Oz に従って分解される。かくして得られた分解は一通りである。

三つのベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ は $\overrightarrow{OM}$ を三つの方向 Ox, Oy, Oz に分解した成分であるという。

練　習　問　題

1　線分 AC，BD，AD，BC の中点を M，N，P，Q とする。A，B，C，D の如何にかかわらず

① $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{MN}$

② $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{PQ}$

2　軸 $x'x$ 上の3点をA，B，Cとせよ。

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overline{BC}\cdot\overrightarrow{MB}\cdot\overline{CA}+\overrightarrow{MC}\cdot\overline{AB}=0$$

3　平面上において三つの長さ a, b, c と点Oと方向OAが与えられているとする。

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0 \text{ 又 } \frac{OA}{a}=\frac{OB}{b}=\frac{OC}{c}$$

であるように $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ を作れ。

4　空間において与えられたベクトル $\overrightarrow{OM}$ を次の各場合絶対値がそれぞれ a, b, c で Ox, Oy, Oz 上にある三つのベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ に分解せよ。

①　$\overrightarrow{OC}$, Ox と $\angle xOy$

②　Ox, Oy, $a+b$ と C

5　三面体 OABC を考えて $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ となるベクトルを作る。

①　直線 OS は△ABC と△OCD の各々の重心Gにおいて平面 ABC を切ることを示せ。

②　$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OS}$ を示し，これより $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$ を示せ。

6　Gを△ABCの重心，A′をBCの中点，Mを空間の任意の1点とする。

①　$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GA'}$, $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$ を証明せよ。

②　これより $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ を導け。

7　GとG′とを△ABCと△A′B′C′の各重心とする。

①　$3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$
$\qquad=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CA'}$

②　このことから二つの△ABCと△A′B′C′が同じ重心をもつための条件を導け。
又 BA′CD と B′AC′D とが二つの平行四辺形になるような点Dが存在することを証せ。

8　中心Oの円に内接する△ABCにおいてGを重心，Hを垂心，MをBCの中点，DをADが直径となるような円周上の点とする。

①　四辺形 BHCD の性質は？ $\overrightarrow{HA}$ と $\overrightarrow{MD}$ を比べよ。

②　$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$

③　$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=O$ から $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$ を導き，OとHに関するGの位置をしらべよ。

9　A′, B′, C′を△ABCの中線の足，Gを重心とせよ。任意の点Mから出発して $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ なる $\overrightarrow{MP}$ を作る。

①　$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{MA'}$ 又 $\overrightarrow{MP}=3\overrightarrow{MG}$

②　Mが円ABCの中心Oにある時，PはHと一致することを示せ。

又 $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$
$\overline{AH}=2\overline{OA'}$, $\overline{OH}=3\overline{OG}$

③　PをOにとると $\overrightarrow{wO}=\overrightarrow{wA}+\overrightarrow{wB}+\overrightarrow{wC}$ なる点 w は $\overrightarrow{OH}$ の中点であって
$\overrightarrow{wA}+\overrightarrow{wB}+\overrightarrow{wC}+\overrightarrow{wH}=O$

22課　ベクトルの射影，移動

ベクトルの射影

*363　ベクトルの平面えの射影

*364　定　理

*365　係

*366　ベクトルの直線えの射影

*367　定　理

*368　定　理

*369　系

*370　ベクトルと数の積の射影

*371　ベクトルの和の射影

*372　軸上えの射影

移　動

*373　定　義

*374　直線の移動

*375　系

*376　平面の移動

*377　円の移動

363　ベクトルの平面えの射影

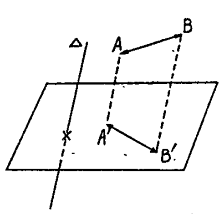
空間内の任意の1点Aを通り，与えられた方向△に平行な射影（平面Pえの）は平面PとAを通って△に平行な直線との交点A′をとることによってえられる。

1点がベクトル $\overrightarrow{AB}$ を画くと（図 321），その射影はA，B点の射影A′，B′によって定義されるベクトル $\overrightarrow{A'B'}$ を画く。

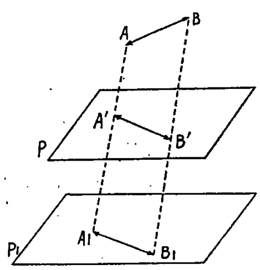
ベクトル $\overrightarrow{A'B'}$ はベクトル $\overrightarrow{AB}$ 射影であり，平面 ABB′A′ は $\overrightarrow{AB}$ を射影される平面である。

『一つのベクトルの同じ方向，平行な平行平面えの射影は等しいベクトルである。』

実際（図322）もし $\overrightarrow{AB}$ が平面1の上に射影されて $\overrightarrow{A'B'}$ となり，P∥P_1なる平面P_1の上に射影されて A_1B_1 となれば，四辺形 $A'B'B_1A_1$ は平行四辺形となり $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{A_1B_1}$



（図321）



（図322）

364　定理

『等しい二つのベクトルの同じ平面えの射影は二つの等しいベクトルである。』

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ をどちらも △ に平行でない二つのベクトルとする。(図323)

$AA' /\!/ CC'$ と同様に $AB /\!/ CD$ であるから平面 $ABB'A' /\!/$ 平面 $CDD'C'$

したがって $A'B' /\!/ C'D'$

そして $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ より同様に $A'C' /\!/ B'D'$

これより平行四辺形ABDCの射影は一般に平行四辺形である。それ故 $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{C'D'}$

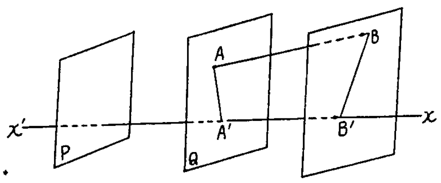
もし平面 $ABB'A'$ と $CDD'C'$ が一致すれば $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ に等しい。補助の $\overrightarrow{EF}$ を射影すればよい。$\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{E'F'}$　$\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{E'F'}$ より $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{C'D'}$

365　系

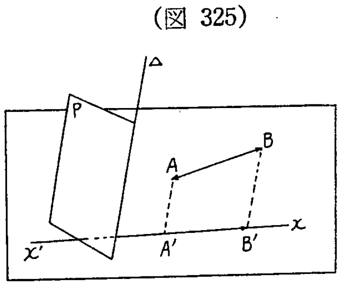
『二つの平行なベクトルの比は同一平面えのそれらの射影の比に等しい。』

366　ベクトルの直線えの射影

1°　空間において定直線 xx' とそれと交わる定平面Pを考えよう。空間の任意の点Aを通ってP平面に平行な平面，Q が $x'x$ を点A′で切る時『A′ は点Aの直線 $x'x$ の上えの (平面Pに平行な) 射影である。』



(図 325)



(図 326)

2°　同様に平面上で定直線 $x'x$ とそれと交わる方向△ (図326) とを考える。平面上の任意の点Aを通り△に平行な直線は $x'x$ を A′で切る。

『A′ は軸 $x'x$ の点Aを通り△に平行なAの射影である。』

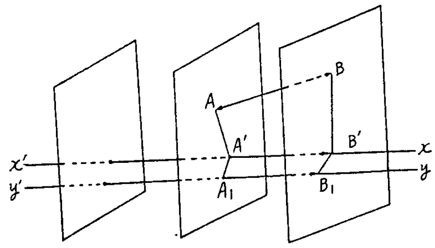
1°, 2°の場合ともベクトル $\overrightarrow{AB}$ の直線 $x'x$ えの射影は A, B の射影 A′, B′ によって定義されるベクトル $\overrightarrow{A'B'}$ である。

もし $P \perp x'x$ の時にはこの射影は正射影といわれ，そうでなければこの射影は斜射影といわれる何等の指示のない場合には問題は正射影である。

367　定理

『一つのベクトルの平行2直線えの射影は等しい二つのベクトルである。』

同じ平面Pに平行に，二つの平行な直線 $x'x$ と $y'y$ えの $\overrightarrow{AB}$ の射影 $\overrightarrow{A'B'}$ と $\overrightarrow{A_1B_1}$ とは二つの平行平面の間にはさまれる平行線の部分として相等しい。(図327)



(図 327)

368　定理

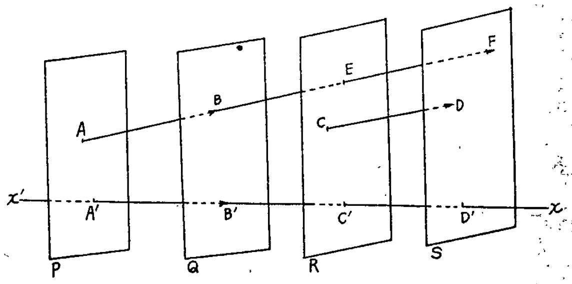
『平行な二つのベクトルの比は同一直線上のそれらの射影の比に等しい。』

二つの平行ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ 及び直線 $x'x$ えのそれらの射影 $\overrightarrow{A'B'}$ と $\overrightarrow{C'D'}$ とがあるとせよ。A, B, C, D を軸 $x'x$ の上え射影する平面をP, Q, R, Sとする。

平面RとSは直線ABの上で $\overrightarrow{CD}$ に等しいベクトル $\overrightarrow{EF}$ をきりとる。

空間内におけるターレスの定理で

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{EF}}=\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{E'F'}}\quad \text{つまり}\quad \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}=\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{C'D'}}$$



(図 328)

369　系

『二つの等ベクトルの直線えの射影は二つの等ベクトルである。』

もし $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ならば先の関係より $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{C'D'}$

370　ベクトルと数の積の射影

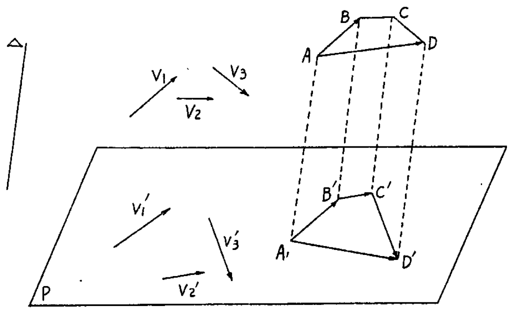
『$\overrightarrow{V}$に k をかけたベクトルの1平面又は1直線えの射影は$\overrightarrow{V}'$の射影V′に k をかけたものに等しい。』

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{V}=k\overrightarrow{CD}$ としよう。射影すれば $\dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{C'D'}}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}=k$　それ故に

$\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{C'D'}=k\overrightarrow{V'}$

371　ベクトルの和の射影

『多くのベクトルの和の平面又は直線えの射影は各ベクルトの射影の和に等しい。』



(図 329)

$\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$ と平面P（又は直線 $x'x$）えのそれらの射影 $\vec{V}_1{}'$, $\vec{V}_2{}'$, $\vec{V}_3{}'$ を考えよう。

$\overrightarrow{AB}=\vec{V}_1$, $\overrightarrow{BC}=\vec{V}_2$, $\overrightarrow{CD}=\vec{V}_3$ とその射影を $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{C'D'}$ とする。

$\overrightarrow{A'B'}=\vec{V}_1{}'$, $\overrightarrow{B'C'}=\vec{V}_2{}'$, $\overrightarrow{C'D'}=\vec{V}_3$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\vec{V}_1+\vec{V}_2+\vec{V}_3$

又$\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}$　$\overrightarrow{C'D'}=\vec{V}_1{}'+\vec{V}_2{}'+\vec{V}_3{}'$

372　軸への射影

平行な $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ の射影をその上に作る直線 $x'x$ がもし向きを付けられていると〝356〟によって

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}=\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{C'D'}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

それ故 $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD} \Rightarrow \overline{A'B'}=k\overline{C'D'}$

『一つのベクトルに k をかけると，軸えの射影の代数的測度も k 倍される。』

同様にベクトルの和の射影においても

$\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'D'} \Rightarrow$

$\overline{A'D'}=\overline{A'B'}+\overline{B'C'}+\overline{C'D'}$

『多くのベクトルの和の軸えの射影の代数的測度はこれらのベクトルのこの軸えの射影の代数的測度の和に等しい。』

これより多くのベクトルの間のすべての一次関係

$$\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{CD}+n\overrightarrow{EF}+p\overrightarrow{GH}$$

から $\overrightarrow{A'B'}=m\overrightarrow{C'D'}+n\overrightarrow{E'F'}+p\overrightarrow{G'H'}$

故に $\overline{A'B'}=m\overline{C'D'}+n\overline{E'F'}+p\overline{G'H'}$

平行移動

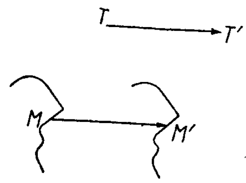
373　平行移動の定義

平行移動のベクトルと呼ばれる固定されたベクトル $\overrightarrow{TT'}$ が与えられている時，空間のすべての点Mに対して $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{TT'}$ なるM′を対応させてみよう。

『1点M′はベクトル$\overrightarrow{TT'}$の平行移動において点Mの対応点である。』という。

かくして図形F上の各点に対する対応点を作ると $\overrightarrow{TT'}$の移動によってFから変換された図形F′をうる。

逆にFは逆ベクトル $\overrightarrow{T'T}=-\overrightarrow{TT'}$ の移動によってF′から作られる。



374　直線の変換

直線DとDに平行でないベクトル $\overrightarrow{TT'}$ の移動を考えよう。D上の定点Aと動点Mは変換によって $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{TT'}$, $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{TT'}$（A′定点，M′動点）であるように変換された点A′，M′をもつ。

それ故 $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MM'}$

図形AMM′A′は平行四辺形となり，Mが直線Dを描くとM′は直線D′を描く。このD′はA′を通りDに平行である。(図331)

もし $\overrightarrow{TT'}$∥D ならばM′は直線Dを描く。

『平行移動によって直線から変換された図形は同じ方向をもつ直線である。』

375　系

1°　〝半直線の変換図は平行な同じ向きの半直線である。〟

2°　〝ベクトルの変換図は等しいベクトルである。〟

3°　〝角の変換図は平行で同じ向きをもつ辺によって出来る等しい角である。〟

376　平面の変換

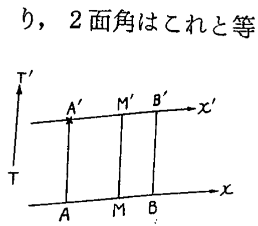
平面Pとベクトル $\overrightarrow{TT'}$ の平行移動があるとする。平面P上の定点Aに $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{TT'}$ によってA′が対応する。直線 Ax がAの廻りを廻転することによって平面Pを生ずる時，Ax に平行な $A'x'$ は A′ を通ってPに平行な平面P′を生ずる。

もし $\overrightarrow{TT'}$ が平面Pに平行ならばPとP′とは一致する。

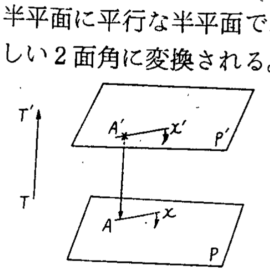
『平行移動によって平面を変換して出来る図形は同じ方向の平面である。』

これより

半平面の変換図はこの半平面に平行な半平面であり，2面角はこれと等しい2面角に変換される。



(図 331)



(図 332)

337 円の変換

『平行移動による円の変換図形はその平面が与えられた平面と同じ方向で，その中心はこの円の中心の変換点を中心とする円（最初の円と等しい所の）である。』

練　習　問　題

1　正n角形ＡＢＣ……Ｌの中心をＯとするとき

①　$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\cdots\cdots+\vec{OL}=0$を示せ。

②　もし空間内の任意の１点をＭとすると$\vec{MA}+\vec{MB}+\cdots\cdots+\vec{ML}=n\vec{MO}$ を示せ。ＭとＡが一致する時はどうなるか。

2　$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=0$ なる３ベクトル$\vec{OA}$，ＯＢ $\vec{OC}$ を考える。直線△が直線 ＯＡ，ＯＢ，ＯＣを α, β, γ 点で切るとする。この時△に平行に行なわれるＯＡえの射影を用いて

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{O\alpha}}+\frac{\overline{OB}}{\overline{O\beta}}+\frac{\overline{OC}}{\overline{O\gamma}}=0$$ を証明せよ。

3　△ＡＢＣにおいてＯ，Ｈ，Ｇ，w で内心，垂心，重心，及び△ＡＢＣの３辺の中点を通る円の中心を表わす時。

①　$\vec{OS}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$ なる $\vec{OS}$ を辺 ＢＣの上え正射影する時，点Ｓはどこに射影されるかこのことからＳとＨは一致することを示せ。

②　同様に $\vec{OS}=3\vec{OG}$ を示せ。又このことから点Ｏ，Ｇ，Ｈの相対的位置を導け。

③　以上のことに類似の考察をして点 w，Ｏ，Ｇの位置関係をしらべよ。

4　平面上に１直線Ｄと１ベクトル$\vec{V}$を考える。

①　Ｄ上の任意の点Ｍを通って$\vec{V}$に等しいベクトル $\vec{MM'}$ をひく点Ｍ′の軌跡を求めよ。

②　Ｄを切る第２の直線をＤ′とせよ。$\vec{AB}=\vec{V}$となるようにＤ及びＤ′上にそれぞれＡ，Ｂ点を見付けよ。

5　平行四辺形ＡＢＣＤにおいて頂点ＡとＢは定点である。Ｃが与えられた円Ｏを描く。

①　$\vec{CD}$ についてどんなことが言えるか。

②　Ｄの軌跡を求めよ。

6　平面Ｐ上に１直線 x, y とこの直線の同じ側に２点Ａ，Ｂと x, y に平行なベクトル$\vec{V}$を与える。

①　$\vec{CD}$ を x, y 上にあって$\vec{V}$に等しいベクトルとする。又$\vec{V}$に等しい$\vec{AE}$をひく。この時折線ＡＣＤＢと折線ＡＥＤＢの長さを比べよ。

②　折線ＡＣＤＢの長さが最小になるように点Ｃ，Ｄを作れ。

7　二つの平行線Ｄ，Ｄ′と，このＤ，Ｄ′によってきまる平面上のこの平行線の両側にＡ，Ｂがある。

①　Ｄ上の点Ｃ，Ｄ′上の点Ｅがある。$\vec{CE}$ に等しい $\vec{AF}$ を作れ。

折線ＡＣＥＢと折線ＡＦＥＢの長さをくらべよ。

②　折線ＡＣＥＢの長さが最小であるように点ＣとＥを定めよ。

8　交わる２平面をＰ，Ｑとする。Ｐ上及びＱ上にそれぞれ動点ＭとＭ′がある。$\vec{MM'}$が与えられたベクトル$\vec{V}$に等しいことを知って点ＭとＭ′の軌跡を求めよ。

9　共通な１点Ｏをもつ３平面 Ｐ，Ｑ，Ｒ がある。$\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ とがそれぞれ与えられた二つのベクトル$\vec{V_1}$，$\vec{V_2}$に等しいことを知って，Ａ，Ｂ，Ｃがそれぞれ Ｐ，Ｑ，Ｒ 上にあるような△ＡＢＣを作れ。

10　①　$\vec{V}$が与えられているとき，与えられた直線△上に１点Ｍを与えられた平面Ｐ上に点Ｎを作り$\vec{MN}=\vec{V}$ とせよ。

②　Ａ，Ｃが直線△上にあり，Ｂ，Ｄが平面Ｐ上にあり，$\vec{AB}$，$\vec{CD}$ がそれぞれ与えられた二つのベクトルV_1とV_2に等しいことを知って４面体ＡＢＣＤを作れ。

11　$\triangle_1$と$\triangle_2$は平行２直線又線分H_1，H_2に点H_1，H_2において垂直とする。$\triangle_1$に関して空間の任意の点Ｍのの対称点をM_1，$\triangle_2$に関してM_1と対称な点をM_2とする。

①　$\vec{MM_2}=2\vec{H_1H_2}$ を示せ。これよりＭとH_2の間の対応関係を導け。

②　任意の平行移動に引続く二つの平行線対称によって無数の方法に分解されることができることを示せ。

12　定点O_1に関して任意の点Ｍの対称点をM_1とする。次に定点O_2に関してM_1の対称点をM_2とする。

①　$\vec{MM_2}=2\vec{O_1O_2}$を証明しＭとM_2の対応関係を導け。

②　任意の平行移動はその２点のうち１点は任意である所の引続く二つの点対称に同値であることを導け。

13　線分 K_1K_2に点K_1，K_2 において垂直な２平行平面P_1，P_2が与えられている。P_1に関して動点Ｍの対称点M_1，P_2に関してM_1の対称点M_2を作る。

①　$\vec{MM_2}=2\vec{K_1K_2}$ を示せ。点ＭとM_2の軌跡ＦとF_2 の関係は？

②　任意の平行移動は引続く二つの平行面対称に分解されることを示せ。

14　M_1，M_2 は任意の点Ｍの定点 O_1，O_2 に関する対称点である。

① $\overrightarrow{M_1M_2}=2\overrightarrow{O_1O_2}$ を示し，空間の異なる点に関する図Fの対称図形は重ねうることを示せ。

③ 図形Fから対称点又は対称面によって導かれる図形はすべて重ね合わせうることを証明せよ。

15 $\vec{V}_1$の平行移動は点MをM_1え変換し，$\vec{V}_2$はM_1をM_2え，$\vec{V}_3$はM_2をM_3え変換するとする。

① ベクトル$\vec{V}=\vec{V}_1+\vec{V}_2+\vec{V}_3$ によってMはM_3に変換されることを示せ。

② 与えられたベクトル$\vec{T}$の動を与えられた三直角三面体 $Oxyz$ の各辺に平行な三つの引続く移動に分解せよ。

16 B，C，Dは定点，Aが動点であるような4面体ABCDがある。他方A，B，C，Dの中点をM，N又MNの中点をGとする。

① Aが与えられた1直線又は1平面を描く時，MとGの軌跡？

② A_1，G_1をそれぞれA，Gの特殊点とする時 $\overrightarrow{GG_1}$と$\overrightarrow{AA_1}$を比較してAGは定点Iを通ることを示せ。

③ A_1をBにとることによってIの位置を△BCDの中において又Gの位置をIAの上において定めよ。

23課　相　似

*378 相似の定義
*379 基本定理
*380 系　1°　2°　3°　4°
*381 相似分割
382 逆
383 三角形の相似
*384 逆
385 平面の相似
386 円の相似
387 注　意
*388 逆
389 系
390 台形の中を動く直線
391 軌　跡
392 注　意
393 作　図
394 1点を通り角の2辺に接する円の作図
*395 オイラーの直線と三角形の九点円

378 相似の定義

相似の中心と呼ばれる定点Oとと数kが与えられている時，空間のすべての点Mは $\overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{OM}$ なるM'を対応させる。

『中心Oと比kによる相似においてM'はMの対応点である。』

記号：相似（O，k）

図形Fの各点の対応点を作ると考えている相似においてFと相似な図形F'をうる。

もし $k>0$ ならばこの相似は正
〃 $k<0$ ならば 〃 負

$k=1$ ならばM'とMは一致し，$k=-1$ の時には点Oに関して対称図形をうる。

もし相似（O，k）においてM'がMの対応点ならば逆に相似（O，$\frac{1}{k}$）においてMはM'の対応点であることに注意しよう。

379 基本定理

『相似（O，k）においてA'とM'がそれぞれA，Mの対応点である時には，$\overrightarrow{A'M'}=k\overrightarrow{AM}$』

380 系　1°　2°　3°　4°

『1°　直線△の相似図形は△に平行又は一致する直線△′である。』

『2°　線分，ベクトル，半直線の相似図形は線分ベクトル，半直線である。』

『3°　二つの相似なベクトルの比は相似比に等しい。』 "二つの相似線分の比は相似比の絶対値に等しい" ことに注意しよう。

『4°　二つの相似な角は等しい。』

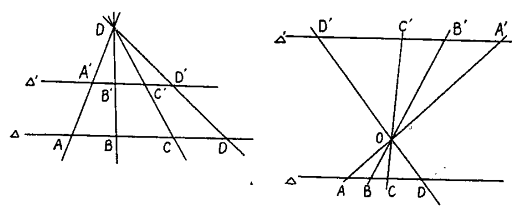
381 相似分割

『1点に集まる多くの直線は二つの平行な割線上に同じ比を決定する。』

A，B，C，DとA'，B'，C'，D'を点Oから出る直線と△，△′（△∥△′）との交点とする。

直線△′は（O，$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$）なる相似において△と相似である。この相似において，A，B，C，Dの対応点は各々A'，B'，C'，D'である。$\overrightarrow{A'B'}$と$\overrightarrow{AB}$の様な二つの相似なベクトルの比は相似比に等しい。それ故

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}=\cdots=\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$



383 三角形の相似

『三角形に相似な図形は三角形であり，二つの相似な三角形においては対応角は等しく，対応辺は比例している。』

384 逆

『各辺が互に平行な二つの三角形は一般に相似である。』

385　平面に相似な図形

『1°　平面の相似図形はこれに平行な平面である。』

『2°　二つの平行平面はこれらの平面上にない任意の点Oに関して相似図形であって，相似比はOから二つの平面の距離の比に等しい。』

386　円の相似図形

『円の相似図形は円である。二つの相似は円の平面と中心とは考えている相似において対応している。そして2円の半径の比は相似比の絶対値に等しい。』

388　逆

『同一平面又は二つの平行な平面上にある等しくない二つの円は中心を結ぶ線分を半径の比に分ける点を相似の中心とする相似において対応図形である。』

395　オイラーの直線と三角形の9点円

△ABCにおいてBC，CA，ABの中点をM，N，Pとする。△MNP の3辺は △ABC の3辺とそれぞれ平行で $\overrightarrow{NP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ であるので△MNP は比 $-\frac{1}{2}$ の相似で △ABC より導かれる。この相似の中心GはAM，BN，CPの上にあり，$\overline{MG}=\frac{1}{2}\overline{GA}$ 又は $\overline{MG}=\frac{1}{3}\overline{MA}$

それ故重心に関する定理を再びえた。

① △MNP の高さは △ABC の垂直2等分線である。従って △ABC の垂心Hの対応点は△MNP の垂心Oであって，これは △ABC の外心である。

それ故

『すべての三角形において3点O，G，Hは1直線上に並んでいて $\overline{OG}=\frac{1}{3}\overline{OH}$』

② Oの対応点は円MNPの中心wである。それ故このwはOG上にある。

そして

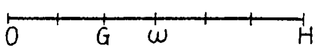
$$\overline{Gw}=\frac{1}{2}\overline{OG},\quad 故に\ \overline{Ow}=\frac{3}{2}\overline{OG}=\frac{1}{2}\overline{OH}$$

ここで OA＝R とおけば

$$\overrightarrow{wM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\ より\ wM=\frac{1}{2}OA=\frac{R}{2}$$

『円MNP の中心 w は線分OHの中点であって半径＝P$\frac{R}{2}$』

直線OHは△ABの〝オイラー線〟と呼ばれる。分割COGwH は三角形に関係しないことに注意しよう。



③ MNP と円 ABC の正の相似の中心は wO を $\frac{1}{2}$ に外分する点である。これは即ちHであって，この新しい相似において， A，B，C の対応点は線分HA，HB，HCの中点 α, β, γ である。

この3点はそれ故円MNP上にある。

OAに平行である所の半径wM と $w\alpha$ は逆向きで線分 Mα は円 MNP の直径である。この円は従って ∠αA′M＝∠R よりAHの足A′を含む。同様に B′，C′ を含む。

『すべての三角形で辺の中点，垂線の足，垂心と頂点とを結ぶ線分の中点はこの三角形の9点円と呼ばれる円周上にある。』

練　習　問　題

1　定角 $\angle xOy=60°$ とし，この角の2等分線上に定点Iがある。中心Iの変化する円が Ox，Oy をA，Bで切る（このA，BはOIに関して対称でない）。H，K は I の Ox，Oy えの射影とする。

① HA＝KB を示し ∠AIB の値を求めよ。

② △AIB の外接円の中心 w の軌跡？

③ △IAB の垂心をHとする。∠ABH を求めよ。 $\overrightarrow{IH}$ と $\overrightarrow{Iw}$ を比べて Hの軌跡を求めよ。

④ Gを△IABの重心とする。$\overrightarrow{IG}$ と $\overrightarrow{Iw}$ を比べてGの軌跡を求めよ。

2　四面体 ABCD と △BCD，△CDA，△DAB，△ABC の各重心を A′，B′，C′，D′ とする。又 AB，CD の中点を M，N とする。

① $\overrightarrow{D'C'}$ と $\overrightarrow{CD}$ とはMに関して対称図形であることを示せ。相似比及び N の対応点N′の位置を求めよ。

③ 四面 ABCD と四面体 A′B′C′D′ は四面体の重心と呼ばれる点Gに関して対称図形であることをこれより導け。

③ AA′ と MN の上におけるGの位置は？

3　平面P上に1直線上にないA，B，Cを考える。P内に位置しない所の等しくない平行な三つのベクトル $\overrightarrow{AA'}$，$\overrightarrow{BB'}$，$\overrightarrow{CC'}$ を作る。

① $\overrightarrow{BB'}$ を $\overrightarrow{CC'}$ え，$\overrightarrow{CC'}$ を $\overrightarrow{AA'}$ え，$\overrightarrow{AA'}$ を $\overrightarrow{BB'}$ に変換する所の相似の中心 α, β, γ を作れ。

② α, β, γ は1直線上にあることを示し

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}\ の値を計算せよ。$$

4　$\angle xOy$ がある。この平面上の動点Mの Ox えの正射影を P，Oy えの正射影をQとする。

① PQが与えられた方向と向きを持つ時Mの軌跡。

② ＰＱの長さが一定の時，ＯＭは一定であることを示せ。又，Ｍの軌跡は？

③ $\overrightarrow{PQ}$ が与えられたベクトルに等しい時Ｍを作れ。

十一　附　記 (1)

以上は昭和38年度愛知県高校数学研究会において木村が発表したものから高２の部分を除いて（紙数の都合上）中２から高１までのベクトルに関する部分を紹介した。

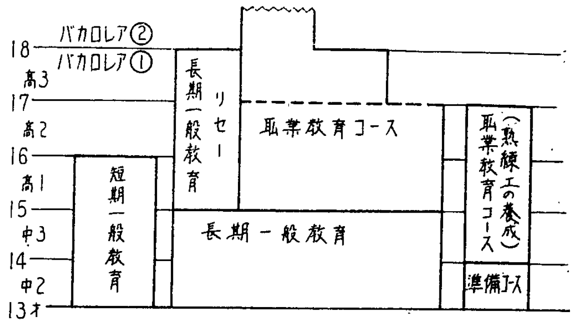
日本数学教育会「これからの数学」研究資料Ⅱ，Ⅲの残された問題(1)〜(4)を参照した上で全体をながめれば何らかの参考にすることが出来よう。

附　記 (2)

フランスの教育制度について

(イ) 1959年１月６の政令によってベルトワソ改革案が法政化され義務教育年限の８年から10年えの延長（1967年迄に完成）および中等教育の全面的な再編成が定められて現在実施中である。これによれば６才から11才までの５年間の初等教育終了後11才から13才までの２年間を観察期と呼び，その間に生徒の資質を見極めた上で五つの中等教育コースのうちの一つへ進学させることになっている。

観察期後の教育課程の表



(ロ) フランスの教育制度についての文献

岩波講座　現代教育学　9.　数学と教育

文庫クセジュ　フランスの大学　特にまえがき3章，4章　日仏文化技術通信 No.50

数理科学　1954—2　フランスの数学教育

(ハ) 教科書の Ａ′ＣＭＭ′ は長期一般教育における課程を示す。Ａ′ とＣは古典科，Ｍ，Ｍ′ は近代科であって共に週４時間（１時間は60分）の授業をうける。