数　学　と　論　証

杉　山　光　男

〝数Ⅰに於いて数学の論証をいかに折り込むか〟を目標にし教材を組み立ててみたが不十分なものになってしまった。

解析概論でよく知られたデデキントの切断より始まる一連の同値な定理を取り上げ教材に供した。以下その内容を示し御批判を乞う次第である。

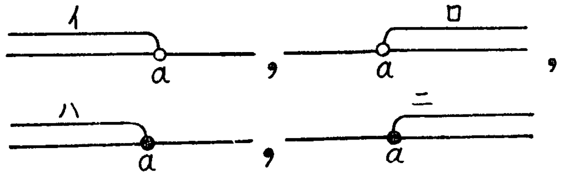
ここでは実数を取り扱う。定理として1から4までをあげる。定理2，3，4はその直前は定理より得られ定理1は定理4から証明出来る。即ち4つの定理はどれか1つを公理として認めれば残りの定理に証明される。4つの定理は同値であるからどれを公理として採用しても同じことである。

イ　aより小さい数全部を　$\{x \mid x<a\}$

ロ　aより大きい数全部を　$\{x \mid x>a\}$

ハ　aに等しいかaより小さい(aより大きくない)数全部を　$\{x \mid x\leqq a\}$

ニ　aに等しいかaより大きい(aより小さくない)数全部を　$\{x \mid x\geqq a\}$　でそれぞれ表わす。



(○印はその点が入らない，●印はその点が入ることを示す。)

イ　では一番大きい数（最大数）はない。勿論一番小さい数（最小数）もない。

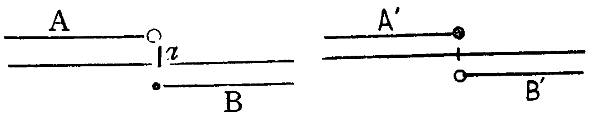
ロ　でも最大数最小数共にない。

ハ　では最大数がありaである。最小数はない。

ニ　では最小数がありaである。最大数はない。

凡ての実数は　$A=\{x \mid x<a\}$　と　$B=\{x \mid x\geqq a\}$　の2つに分けることができこの時AとBの両方に含まれる数はなくAの各数はBの各数より小さい。

又$A'=\{x \mid x\leqq a\}$　と　$B'=\{x \mid x>a\}$　の2つで分けても同様のたとがいえる



これらの場合分けた境の数aは一方の最小数又は最大数のどちらかになっている。

今この逆が成り立つとしよう。

即ち

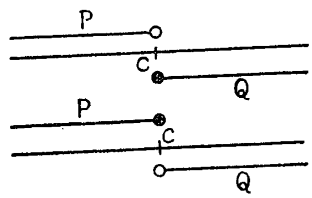
定 理1　凡ての実数をP，Q 2つに分け，P，Q両方に含まれる数はなくてPの各数はQの各数より小さいとする。この時1つの数cがあって

㋑　$P=\{x \mid x<c\}$，$Q=\{x \mid x\geqq c\}$

又は

㋺　$P=\{x \mid x\leqq c\}$，$Q=\{x \mid x>c\}$

となる。



これが正しいと仮定する。

定 理2　数の集まりSについてSの各数がmより大きくないとき，このようなm，つまり『Sのどの数よりも小さくない数』全部のうちで最小数がある。

又これらの大小を反対の意味に取りかえてもこの事は成り立つ。

証明　Sのどの数よりも小さくない数全部をQ，残りの実数全部をPとする。

これらP，Qは定理1の条件をみたしている。従って㋑又は㋺の型になるがここではQに最小数がある事つまり㋑の型であることがいいたい。

もし㋺であれば

Sの数はQに入っていない。(∵もしSの数sがQに入っているとQには最小数はないのでsより小さい数qがQにある。これはQのきめ方に反する。)

従ってSの各数は凡てPに入っている。Pの最大数はSの各数より小さくないのでQに入っていなければならない。(Qはこのような数を全部集めた。)

これは矛盾

だから㋺ではあり得ない。

定理の後半については㋑の型でないので㋺の型であることを同様の論法でいえばよい。

証明終り

定 理3　無限につづく数の列があって各数は前の数より小さくないとする。更に各数はある数aより大きくないない時，此の数の列の数は後へ行く程aより大きくない数a'にいくらでも近づく。このようなa'（aより大きくない）がある。

また小さくと大きくを反対に取りかえても成り立つ。

証明　この数の列の数全部の集まりをSとするとSは定理2の前半の条件をそなえている。（定理2で$m=a$）従って定理2よりこのSについてきまる数をa'とする。（Sの各数より小さくない数全部の最小数で定理2のcにあたる。），ここでa'より小さい任意の数bをとるとa'のきめ方によりbより大きくa'より大きくない数がこの数の列にある。従って数の列のそれより後の数はすべてbより大きくa'より大きくない。ここでb'はa'より小さい任意の数なのでa'にいくらでも近い数がとれる。だから数の列の数はa'にいくらでも近づく。

$a'\leqq a$，はaは数の列のどの数よりも小さくないこと（a'はこのような数全部の最小数）からわかる。

定理の後半の証明は前定理の後半を同様に使って行えばよい。

$\{x \mid a\leqq x\leqq b\}$を$[a, b]$で表わす。つまり$[a, b]$を$a$から$b$までの実数全部の集まりで$a$も$b$も入るこの時$b-a$を$[a, b]$の巾という。ただし$b\geqq a$とする。

又$[a, b]\supset[c, d]$（又は$[c, d]\subset[a, b]$ともかく）は$[c, d]$の各数が$[a, b]$に入っていることを示すものとする。

定理4 $[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset[a_3, b_3]\supset\cdots\cdots$

なる無限につづく数の集まりの列があって各項の巾 b_n-a_n　$n=1, 2, 3\cdots\cdots$

がnが大きくなるにつれていくらでも小さくなるときこの数の集まりの列のどの項にも入っている数が1つだけある。

証明　$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$なる数の列は定理3の前半の条件をみたす。（定理3でaはb_p　Pは何番でもよい。）ので1つの数a^*に限りなく近づく。

又$b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots$は定理3の後半より1つの数$b^*$に限りなく近づく。

この時$a^*\leqq b_p$（Pは任意）より$a^*\leqq b^*$

そして$a_p\leqq a^*\leqq b^*\leqq b_p\cdots\cdots$①（P$=1, 2, 3\cdots\cdots$）より

$b_p-a_p\geqq b^*-a^*\geqq 0$　今$b^*-a^*\neq 0$とすると$[a_p, b_p]$の巾はいつもb^*-a^*より小さくないので限りなく小さくなることは出来ない。

よって$b^*-a^*=0$でなければならない。即ち$a^*=b^*$　①よりa^*（又はb^*）は数の集まりのどの項にも入っている。

a^*以外の数は凡ての$[a_p, b_p]$に入らぬことについて

$a^*\neq x$なるxについて

て$a^*<x$ならば$a^*=b^*\leqq b_p<x$なるPがあるのでこのPより先の番号qについてxは$[a_q, b_q]$に入らない。

$a^*>x$ならば$x<a_r\leqq a^*$なるrがあるのでrより先の番号sについてxは$[a_s, b_s]$に入らない。これで定理4は証明された。

定理1 省略

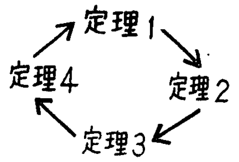
証明　Pから1つの数a_1，Qから1つの数b_1をとり$[a_1, b_1]$を作る。$(a_1+b_1)/2$なるものを考へこれがPに入れば$a_2=(a_1+b_1)/2$，$b_2=b_1$として$[a_2, b_2]$を作り$(a_1+b_1)/2$がQに入れば$a_2=a_1$，$b_2=(a_1+b_1)/2$として$[a_2, b_2]$を作るつまりa_1とb_1の平均とa_1及びb_1 3つの数のうちa_1，b_1から1つ減らし$(a_1+b_1)/2$を残してP，Qどちらからも1つづつ数がとれるようにして$[a_2, b_2]$を作る。

以下同様にして$[a_3, b_3]$……を作ると

$[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset[a_3, b_3]\supset]\cdots\cdots$となり定理4の条件にあてはまる。（各$[a_p, b_p]$の巾は前の$[a_{p-1}, b_{p-1}]$の巾の半分になる。）従って各$[a_p, b_p]P=1, 2, 3\cdots\cdots$に含まれる1つのcがきまる。cより小なる数c'を任意にとると$c'<a_r\leqq c$なるa_rがあり（cのきめ方による。）a_rより小さい数はすべてPに入るのでc'はPに入る。即ちcより小さい数はすべてPに入る。

同様にcより大きい数はすべてQに入る。そしてc自身もP，Qどちらかに入るのでQに入れば㋑の型，Pに入れば㋺の型になる。

以上により



と証明された。

即ち4つの定理はどれか1つを認めれば他は証明される。つまり同値である。

最初に定理1を仮定したが公理として4つの定理のうちどれか1つを採用してやれば他のは成立することになる。

終りに

数学の一端を覗き見られれば幸いと思ってこれを教材として扱ってみたが生徒にどれだけ論理性を植えつけたかについては甚だ疑問である。