別紙４

報告番号	※ 第 号

主 論 文 の 要 旨

論文題目 Functorial approaches to Auslander-Reiten theory and Singularity categories (アウスランダー・ライテン理論及び特異圏に対する関手的手法)

氏 名 小川 泰朗

論 文 内 容 の 要 旨

Mitchell の研究により、環上の理論の多くが加法圏上の理論に一般化可能であることが示された [Mit]。特筆すべき例として、Auslander、Reiten による一連の論文を通じて導入された Auslander-Reiten 理論が挙げられる。この理論は多元環上の加群圏及びそれに付随する様々な三角圏の構造を調べるため、今日、最も有効な道具の一つとして広く利用されている。本稿では特に、Auslander-Reite 理論の発見に寄与した次の結果に着目する：環上の加群圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ を米田関手により、その関手圏—$\mathsf{mod}\,\Lambda$ からアーベル群の成す圏への反変関手の成す圏—への埋め込み $\mathbb{Y} : \mathsf{mod}\,\Lambda \hookrightarrow \mathsf{mod}(\mathsf{mod}\,\Lambda)$ を考える。このとき、米田関手 $\mathbb{Y}$ が完全な左随伴関手 L を有し、それ故、加群圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ は関手圏 $\mathsf{mod}(\mathsf{mod}\,\Lambda)$ の Serre 商として実現される [Aus]。Auslander's formula として知られるこの圏同値

$$\frac{\mathsf{mod}(\mathsf{mod}\,\Lambda)}{\{F \mid F(\Lambda) = 0\}} \xrightarrow{\sim} \mathsf{mod}\,\Lambda$$

は加群圏上の種々の概念が、関手圏の言葉で翻訳できることを示唆しており、とりわけ、加群圏の概分裂完全列が米田関手を通じて、単純関手の極小射影分解に対応することは注目に値する。本稿は、Mitchell による、関手圏への一般化の流れをくむものであり、環上の既知の理論を加法圏上に拡張することで様々な応用を得る。

第一部における主目的は、環上の加群圏の成すルコルマンを、特別な加法圏上の関手圏の成すルコルマンに拡張し、関手圏の観点から Auslander-Reiten 理論の一側面を構成することにある。ルコルマンとは Beilinson、Bernstein、Deligne により導入された概念でアーベル圏や三角圏を調べる基本的な道具である [BBD]。これは、アーベル圏 $\mathcal{C}$、その Serre 部分圏 $\mathcal{X}$ 及び それによる Serre 商 $\mathcal{Y} := \mathcal{C}/\mathcal{X}$ の三つ組で、ある直交条件を満たすものとして定義される。これを $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \mathcal{Y})$ と表すこととする。最も基本的な例は、多元環 Λ とその冪等元 e に対して得られる自然なアーベル圏の三つ組 $(\mathsf{mod}(\Lambda/\Lambda e\Lambda), \mathsf{mod}\,\Lambda, \mathsf{mod}\,e\Lambda e)$ であり、冪等元ルコルマンと呼ばれている。最初の結果として、冪等元ルコルマンの関手圏への一般化を与える。つまり、ある種の双対条件を満たす加法圏（dualizing k-variety）$\mathcal{A}$ とその部分圏 $\mathcal{B}$ に対して、三つ組 $(\mathsf{mod}(\mathcal{A}/[\mathcal{B}]), \mathsf{mod}\,\mathcal{A}, \mathsf{mod}\,\mathcal{B}))$ がルコルマンを成すことを示す。ここで $\mathcal{A}/[\mathcal{B}]$ は、$\mathcal{B}$ に属する対象を通過する射の成すイデアルによる $\mathcal{A}$ の剰余圏を表す。この結果の応用として、先ず、Auslander-Bridger 列がこのルコルマンより構成できることを示す。二つ目の応用として、高次元 Auslander-Reiten 理論 [Iya07a, Iya07b] の一側面をルコルマンを通じて明らかにする。つまり、多元環上の加群圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の n-クラスター傾斜部分圏 $\mathcal{B}$ と射影加群の成す部分圏 $\mathsf{proj}\,\Lambda$ に対して、ルコルマン $(\mathsf{mod}(\mathcal{B}/[\mathsf{proj}\,\Lambda]), \mathsf{mod}\,\mathcal{B}, \mathsf{mod}\,\Lambda)$ を構成する。その帰結として、既述の Auslander's formula 及びその高次元版を得ると共に、高次元 Auslander-Reiten 理論における中心的な概念である高次元 Auslander-Reiten 双対 [Iya07a, Iya07b] の別証明を与える。また、米田関手 $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathsf{mod}\,\mathcal{B}$ により、n-クラスター傾斜部分圏における n-概分裂完全列が、関手圏 $\mathsf{mod}\,\mathcal{B}$ の単純関手の極小射影分解に対応することを示す。

第二部では、Buchweitz によって導入された、ネーター環のホモロジー代数的不変量として知られる特異圏に着目する。これはネーター環上の加群圏の導来圏 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{mod}\,\Lambda)$ の、完全複体（perfect complex）の成

す部分圏による Verdier 商として定義される。環 Λ が岩永-Gorenstein である場合、その特異圏は Cohen-Macaulay 加群の成す部分圏の安定圏 $\underline{\mathsf{CM}}\Lambda$ と三角同値であることが知られており、特異圏は安定圏を任意の環に対して一般化した概念となっている [Buc86]。与えられた二つの環（あるいはより一般に加法圏）が特異同値であるとは、それらの特異圏が三角同値であることを言う [ZZ]。環 Λ の大域次元が有限であることと、特異圏が零圏となることは同値であるため、特異圏は大域次元が無限である環に対して効果的な概念である。環 Λ とその冪等元 e に対して、Λ 及び $e\Lambda e$ が特異同値となる条件を調べることは基本的であり、実際、Xiao-Wu Chen はその十分条件について考察している [Che]。第二部の最初の目的は、この Chen の定理を、加法圏 $\mathcal{A}$ とその部分圏 $\mathcal{B}$ に対して、一般化することである。そのため、第一部に続き、関手圏 $\mathsf{mod}\,\mathcal{A}$、その部分圏 $\mathsf{mod}(\mathcal{A}/[\mathcal{B}])$ 及び商圏 $\mathsf{mod}\,\mathcal{B}$ の三つ組を構成し、Chen と同様の結果を得る。また、これを用いて様々な特異同値な加法圏の例を構成する。ここで、特異同値な加法圏構成の鍵となる概念が、Auslander-Buchweitz 近似と呼ばれる完全列である [ABu]。これは Cohen-Macaulay 環の研究において中心的な役割を果たす重要な概念であるが、ここではより一般に、加群圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の余傾斜加群（cotilting module）が与えられれば、Auslander-Buchweitz 近似と類似の完全列が構成できることに着目し、必要な条件を公理化する。主結果として、環 Λ と余傾斜加群 T に対して、$(\mathsf{mod}\,\Lambda)/[T]$ と $({}^{\perp}T)/[T]$ が特異同値であることを示す。ここで、$({}^{\perp}T)$ は $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M,T)=0$ $(i \geq 1)$ を満たす加群 M からなる部分圏を表す。この特異同値は、松井、高橋らにより与えられた次の特異同値の一般化である：環 Λ が岩永-Gorenstein である場合、$(\mathsf{mod}\,\Lambda)/[\Lambda]$ と $\mathsf{CM}\Lambda/[\Lambda]$ は特異同値である [MT]。

References

[Aus] M. Auslander, *Coherent functors.* In Proc. Conf. Categorical Algebra (La Jolla, Calif., 1965), pages 189231. Springer, New York, 1966.

[ABu] M. Auslander, R-O. Buchweitz, *The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations.* Colloque en l'honneur de Pierre Samuel (Orsay, 1987). Mém. Soc. Math. France (N.S.) No. 38 (1989), 5–37.

[BBD] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, *Faisceaux Pervers (Perverse sheaves).* Analysis and Topology on Singular Spaces, I, Luminy, 1981, Asterisque 100 (1982) 5171 (in French).

[Buc86] R-O. Buchweitz, *Maximal Cohen-Macaulay modules and Tate-cohomology over Gorenstein rings.* Unpublished manuscript, 1986.

[Che] X. Chen, *Unifying two results of Orlov on singularity categories.* Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 80 (2010), no. 2, 207–212.

[Iya07a] O. Iyama, *Auslander correspondence.* Adv. Math., 210(1):5182, March 2007.

[Iya07b] O. Iyama, *Higher-dimensional Auslander-Reiten theory on maximal orthogonal subcategories.* Adv. Math., 210(1):2250, March 2007.

[MT] H. Matsui, R. Takahashi, *Singularity categories and singular equivalences for resolving subcategories.* Math. Z. 285 (2017), no. 1-2, 251–286.

[Mit] B. Mitchell, *Rings with several objects.* Adv. Math. 8, 1161 (1972)

[ZZ] G. Zhou, A. Zimmermann, *On singular equivalences of Morita type.* J. Algebra 385 (2013), 64–79.