

論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

氏 名 小川 泰朗

論 文 題 目

Functorial approaches to Auslander-Reiten theory and Singularity categories

(アウスランダー・ライテン理論及び特異圏に対する関手的手法)

論文審査担当者

主 査 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (理学)
石 井 亮

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (理学)
伊 山 修

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 理学博士
齊 藤 博

委 員 大阪府立大学大学院理学系研究科 准教授 博士 (理学)
加 藤 希 理 子

論文審査の結果の要旨

加法圏 \mathcal{A} からアーベル群の圏 $\mathcal{A}b$ への反変加法的関手を \mathcal{A} 加群と呼ぶ。これは環上の加群の概念の自然な拡張であり、有限表示な \mathcal{A} 加群とそれらの間の自然変換のなす圏を $\text{mod } \mathcal{A}$ と表す。 $\text{mod } \mathcal{A}$ がアーベル圏を成すことと \mathcal{A} が弱核を持つことが同値である。 \mathcal{A} が体 k 上の双対的 k 圏 (dualizing k -variety) ならば、 $\text{mod } \mathcal{A}$ は十分多くの射影的対象と入射的対象を持つアーベル圏であり、再び双対的 k 圏となる。特に有限次元 k 多元環 Λ 上の加群圏 $\mathcal{A} = \text{mod } \Lambda$ は双対的 k 圏であり、この場合に $\text{mod } \mathcal{A}$ を調べることは多元環の表現論で基本的である。

本論文は二部構成であり、第一部で小川氏は、双対的 k 圏 \mathcal{A} に対して $\text{mod } \mathcal{A}$ を調べている。特に \mathcal{A} の関手的有限部分圏 \mathcal{B} に対して、以下のアーベル圏の recollement が存在することを証明した。

$$\text{mod } (\mathcal{A}/[\mathcal{B}]) \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \text{mod } \mathcal{A} \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \text{mod } \mathcal{B}$$

これを $\mathcal{A} = \text{mod } \Lambda$ に適用することにより、Auslander による古典的な圏同値

$$\frac{\text{mod } (\text{mod } \Lambda)}{\text{mod } (\underline{\text{mod}} \Lambda)} \cong \text{mod } \Lambda$$

が回復される。また小川氏は、双対的 k 圏 \mathcal{A} と、 $\text{mod } \mathcal{A}$ の関手的有限部分圏 \mathcal{B} で $\text{proj } \mathcal{A}$ と $\text{inj } \mathcal{A}$ を含むものに対して、 \mathcal{B} 加群 X に対する Auslander-Bridger 完全列

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{B}^{\text{op}}}^1(\text{Tr} X, \mathcal{B}) \rightarrow X \rightarrow X^{**} \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{B}^{\text{op}}}^2(\text{Tr} X, \mathcal{B}) \rightarrow 0$$

が上の recollement に相当するものから自然に導かれることを示した。

Auslander の不足公式は、双対的 k 圏 \mathcal{A} に対して、 $\mathcal{B} = \text{mod } \mathcal{A}$ の完全列 $\delta : 0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ から生じる \mathcal{B} 加群 δ^* と \mathcal{B}^{op} 加群 δ_* の関係を記述するものである。小川氏は第一部の最後で、 \mathcal{B} が $\text{mod } \mathcal{A}$ の n 団傾部分圏の場合に n 不足公式を与え、さらにその応用として、 \mathcal{B} における n -Auslander-Reiten 双対性の別証明を与えた。 $n = 1$ の場合には古典的な結果を回復するものである。この部分の結果は、Jasso-Kvamme からも同時期に独立に与えているが、設定や証明が若干異なる。

第二部で小川氏は、弱核を持つ加法圏 \mathcal{A} の特異圏

$$D_{\text{sg}}(\mathcal{A}) = D^b(\text{mod } \mathcal{A})/K^b(\text{proj } \mathcal{A})$$

を調べている。特異圏は 80 年代に Buchweitz によって導入されたもので、近年では Orlov らによってミラー対称性に応用されている。Gorenstein 環 Λ の特異圏 $D_{\text{sg}}(\Lambda)$ は、Cohen-Macaulay Λ 加群の安定圏に他ならない。二つの特異圏の間の三角同値は、導来圏同値の自然な拡張として様々な研究がなされてきた。例えば、環 Λ とその冪等元 e に対して、 Λ と $e\Lambda e$ が特異圏同値となるための十分条件が Xiao-Wu Chen によっ

て与えられている。小川氏はその加法圏類似として、弱核を持つ加法圏 \mathcal{A} の反変有限部分圏 \mathcal{B} に対して、制限関手 $D^b(\text{mod } \mathcal{A}) \rightarrow D^b(\text{mod } \mathcal{B})$ が特異圏同値

$$(1) \quad D_{\text{sg}}(\mathcal{A}) \simeq D_{\text{sg}}(\mathcal{B})$$

を導くための十分条件を与えた。さらにその応用として、アーベル圏 \mathcal{A} とその部分圏 \mathcal{B} に対する Auslander-Buchweitz 型条件を導入し、それから特異圏同値 (1) が導かれることを示した。一例として、ネター環 Λ の余傾加群 T から特異圏同値

$$D_{\text{sg}}((\text{mod } \Lambda)/[T]) \simeq D_{\text{sg}}({}^{\perp}T/[T])$$

論文審査の結果の要旨

が得られ、さらにこれを Gorenstein 環 Λ に適用することにより、松井-高橋の特異圏同値 $D_{\text{sg}}(\text{mod } \Lambda) \simeq D_{\text{sg}}(\underline{\text{CM}} \Lambda)$ が回復される。

本論文で与えられた諸結果は当該分野において新しい知見を与えるものであり、本論文は学位論文として十分な内容を持つものであると判断する。第一部の内容は Applied Categorical Structures 誌からの出版が確定しており、第二部の内容も arXiv にて公開されている。1月25日に本論文に関する公開学位審査セミナーを行った。明快な講演と的確な質疑応答を通じて、申請者が博士の学位を取得するに足る学識を有することを確認した。

以上によって、学位審査委員会は、申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する。