論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※　　　　　第　　　　　号

氏　　　　　名　　Edi Kurniadi

論　文　題　目

Harmonic Analysis for Finite Dimensional Real Frobenius Lie Algebras
（有限次元実フロベニウス・リー代数の調和解析）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
杉　本　　充

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
伊　師　英　之

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　Ph.D.
宇　澤　　達

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
寺　澤　祐　高

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

コンパクト群の既約ユニタリ表現の行列要素の直交関係式は，よく知られている基本的で重要な公式である．この関係式は局所コンパクト群の二乗可積分表現というクラスにおいて自然に一般化される．ただし，非ユニモジュラーな局所コンパクト群についての公式はそれぞれの二乗可積分表現に対して Duflo-Moore 作用素という有界とは限らない自己共役作用素を定義することで定式化される．その基礎理論は 1976 年に Duflo と Moore によって確立されたが，1985 年に Grossmann, Morlet, Paul によって連続ウェーブレット変換との結びつきが指摘されて以来，二乗可積分表現とその Duflo-Moore 作用素は重要な対象として活発に研究されており，それらの具体例をできるだけ沢山構成することは，現在も意義深い課題である．Edi Kurniadi 氏による本論文の結果は，この点に大きく貢献するものである．

実リー群 G は，そのリー代数 $\mathfrak{g}$ の双対ベクトル空間 $\mathfrak{g}^*$ に余随伴表現として自然に作用する．その作用に関する軌道（余随伴軌道）と G の既約ユニタリ表現（の同値類）との間に対応関係があると主張する「軌道の方法」(orbit method) は，一般的な指導原理であり，それに基づいて多くの理論が展開されてきた．本論文の表題にある実フロベニウス・リー代数は，対応するリー群が open な余随伴軌道をもつような実リー代数として特徴づけられる．Kurniadi 氏は，軌道の方法の描像に則り，指数型可解リー群に対する Duflo と Raïs の仕事，および準代数群に関する Lipsman の仕事といった先行研究を踏まえて,「実フロベニウス・リー代数に対応するリー群の open な余随伴軌道は二乗可積分表現に対応する」という予想を打ち立てた．ここで考えられているリー群は一般には可解リー群とも準代数群とも限らず，広範なクラスの非ユニモジュラー群にわたる．本論文では全ての実フロベニウス・リー代数に対して上記予想を証明することは出来なかったが，４次元の場合と，アファイン変換群 $\mathrm{Aff}(n) = \mathbf{R}^n \rtimes GL(n, \mathbf{R})$ の部分群，とくに連結成分 $\mathrm{Aff}^+(n) = \mathbf{R}^n \rtimes GL^+(n, \mathbf{R})$ の場合について成果を得た．

まず 4 次元の場合に関する成果について述べる．Csikós と Verhócky は 2007 年に標数が 2 でない任意の体上の４次元のフロベニウス・リー代数の分類を完成させた．その結果，４次元のフロベニウス・リー代数は 3 つの系統に分かれることがわかる．Kurniadi 氏は指導教員である伊師英之との共著（査読付き講演録として accept 済み）の中で，それぞれの系統のフロベニウス・リー代数について，open な余随伴軌道が二乗可積分表現に対応すること，そして，それらの二乗可積分表現の Duflo-Moore 作用素がフロベニウス・リー代数に付随するパフィアンを用いて記述できることを示した．ただし，そこでは研究したい表現は非可換フーリエ変換に基づいて実現されており，ある意味で間接的な解析を組み合わせた議論が行われていた．それに対し，本論文で Kurniadi 氏は問題の表現をそれぞれの場合に簡明かつ具体的に実現し，その Duflo-Moore 作用素も明示的に与えた．証明は通常のフーリエ変換のプランシェル公式を繰り返し利用する明快なもので，計算そのものも興味深い．

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

次に半直積群 $G = \mathbf{R}^n \rtimes H$（$H$ は $GL(n,\mathbf{R})$) のリー部分群）の場合に関する成果について述べる．この G はアファイン変換群 $\mathrm{Aff}(n)$ の部分群であり，連続ウェーブレット変換の理論でも良く研究されている重要な対象である．Kurniadi 氏は $\mathfrak{g}^* = (\mathbf{R}^n)^* \oplus \mathfrak{h}^*$（$\mathfrak{h}$ は H のリー代数）の中の余随伴軌道が open になる便利な必要十分条件を与えた．さらに， $\xi_0 = (p_0, \alpha_0) \in \mathfrak{g}^*$ （$p_0 \in (\mathbf{R}^n)^*$, $\alpha_0 \in \mathfrak{h}^*$) を通る余随伴軌道 Ω_{ξ_0} が open で固定化群 H_{p_0} が自明でないとき, Ω_{ξ_0} に対応する二乗可積分表現とその Duflo-Moore 作用素を，H_{p_0} の二乗可積分表現とその Duflo-Moore 作用素を用いて記述した．すなわち G の余随伴軌道と二乗可積分表現の研究は，より次元の小さい H_{p_0} のそれに帰着するのである，

この結果を応用して Kurniadi 氏は，まず相似変換群 $\mathrm{Sim}(n) = \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^+ \times SO(n))$ のリー代数がフロベニウスになるのは $n \leq 2$ のときに限ることを証明した．さらに，連結アファイン変換群 $\mathrm{Aff}^+(n)$ のリー代数は常にフロベニウスになることも示した．後者の事実は Ooms によって 1974 年に指摘されているが，Kurniadi 氏の証明はより直接的である．実際 $\mathrm{Aff}^+(n)$ は上述の一般論がうまく機能して，open な余随伴軌道の構造だけでなく，それに対応する二乗可積分表現と，その Duflo-Moore 作用素も n に関して帰納的に記述することができる．

このように，Kurniadi 氏の学位論文はリー群の表現論に対する新しい知見を与えたものであり，学位論文として十分な内容を持つものである．審査委員会は 2019 年 2 月 12 日に公開による学位審査セミナーを行ったが，その場において Kurniadi 氏は問題の背景と主結果の意義さらには証明の基本的なアイデアを明快に説明し，また質疑に対しても的確に応答するなど，申請者のこの分野における十分な学識が確認された．

以上により，本学位審査委員会は，申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する．