## 論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号 ※ 第 号

氏 名 澤田 友佑

論 文 題 目

W\*-BIMODULES AND THE DILATION THEORY RELATED TO PRODUCT SYSTEMS

(W\*-双加群とプロダクトシステムに関する伸張理論)

## 論文審查担当者

主 査 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士(数理学) 植 田 好 道

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士 山 上 滋

委員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学)

南 和彦

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士(理学) 寺 澤 祐 高

## 論文審査の結果の要旨

Hilbert 空間に基づく作用素解析の研究は、長い歴史とそれに見合った広がりを有するものであり、個別の作用素の性質から、複数の作用素にまたがったもの、さらには作用素の集団の作る代数構造に至るまで、数学の広い分野とも互いに影響しながら発展を遂げてきた。

今回、審査対象の澤田氏の学位申請論文の主要部分は、作用素環上の単位的完全正写像 (UCP 写像) についての伸張理論 (dilation 理論) に関するものである。

ここで UCP 写像とは、作用素環における順序構造を非可換性に由来する影響も含めて完全に保つ写像のことで、解析学の多くの側面で重要な役割を演じる正定値関数と同様の基本的重要性を持つものである。UCP 写像の典型例は自己準同型写像を射影作用素で縮約することによって与えられる。逆に与えられた UCP 写像に対して、それが作用する作用素環を拡大することにより、自己準同型写像を構成し、構成された自己準同型写像の適当な射影作用素による縮約として表示することを UCP 写像の伸張と呼ぶ。澤田氏の研究では、量子物理的な時間発展を記述し得るものとして、非負実数あるいは非負整数をパラメータに持つ UCP 写像のなす半群 (UCP 半群) が扱われた。そのため、伸張に現れる自己準同型写像の族も半群を構成する必要があり、そこに単なる UCP 写像の伸張とは異なる困難が現れる。

UCP 半群の伸張の構成には、これまでに2つの方法が知られている。Bhat-Skeide によるものと Muhly-Solel によるものである。いずれの構成においても Hilbert 双加群のテンソル積が使われるが、前者は与えられた UCP 半群が作用する von Neumann 環 M そのものに注目し、後者はその交換子環 M' に注目する。すなわち、それらの構成は利用するテンソル積の形態から異なっている。一方で伸張の一般論により、すべての伸張はある種の極小性の条件の下、すべて同型となることが知られており、これら2つの構成は共に極小性を満たすものであることから、結果的に同等な伸張を与える。しかしながら、これら2つの構成が同値な伸張を与えるメカニズムは明らかでなく、伸張理論の基礎をなす部分でもあることから、2つの構成法を統合し発展させることが望まれた。

澤田氏は、この2つの構成の間の関係を詳細に解明するために、両者の元になった Arveson の product system の概念にまでさかのぼり、それを W\*双加群の場合に一般化した。そして、この一般化を足掛かりに、加群の表現論における森田同値性を記述する際に現れる imprimitivity bimodule の作用素環版が2つの構成を結びつける本質であることを見抜いた。結果として、構成の個々のステップにおいて、両者が完全かつ共変的に同型であることを、一般化された product system を経由することで、明らかにした。澤田氏が導入した W\*双加群 product system の概念は、Arveson の理論に対する新たな可能性を提供するもので、実際、これまでの UCP 半群の研究とは異なる新しい方向性を生み出す出発点となり得るものである。すなわち、澤田氏の

W\*双加群 product system とそれに基づく UCP 半群の伸長理論の研究成果は、単に2つの先行研究の関係を解明したに留まらず、今後の更なる研究を促すもので興味深い。

ところで、申請論文の主要部分で重要な役割を担うW\*双加群のテンソル積については、それが圏論的結合法則を満たすことが大前提である。このことは決して自明のことではない。しかしながら、この極めて基本的なことが、専門家の間でも見過ごされていたようで、実際、それを確立する先行研究は存在しなかった。本申請論文において、これについても明快な説明を与えた。この部分は、指導教員との共同研究に基づくものであるが、主要部分の証明において澤田氏が重要な貢献を行った。

## 論文審査の結果の要旨

このように、澤田氏の申請論文は von Neumann 環上の単位的完全正写像のなす一径数半群の伸張理論に関する研究の発展に大きく貢献するものであり、学位論文として十分な内容を持つ。以上の成果の一部は副論文として Journal of the Mathematical Society of Japan 誌および Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin 誌への掲載が決定している。

平成31年1月25日に行われた学位審査公開セミナーにおいて、申請者は専門外の聴衆にもよく配慮された講演を行った。さらに、講演・質疑応答を通して、申請者に学位を授与されるに相応しい学識を示した。

以上のことから、学位審査委員会は申請者には博士(数理学)の学位が授与される 資格があるものと判断する。