別紙 4

報告番号	※　　　　　第　　　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　Lifting the infinite tensor product representation of the quantum toroidal algebra to the trivalent intertwiner
(量子トロイダル代数の無限テンソル積表現の，三価型絡作用素への持ち上げ)

氏名　末武一馬

論　文　内　容　の　要　旨

本申請論文では $\mathfrak{gl}_1$ 型量子トロイダル代数 $\mathcal{U}$ の三価型絡作用素の構成について得られた結果について述べる. 主要な結果として, 三価型絡作用素の系統的な構成法を詳述し, 特に MacMahon 表現に対する三価型絡作用素の一意存在性を証明する. また, 同じ手法の双対絡作用素への適用と, 絡作用素を用いた R 行列の計算法についても述べる.

$\mathfrak{gl}_1$ 型量子トロイダル代数 $\mathcal{U}$ とは, $W_{1+\infty}$ 代数の 2 パラメタ変形として得られる量子群 (準三角 Hopf 代数) であり, 近年の数学・物理学において双方の立場からその重要性が認知され関心を集めてきた. 一般に Virasoro 代数の一般化である W 代数の表現論は複雑である. しかし $\mathcal{U}$ は, 余積構造が定義できるためテンソル積表現が自然に定義されるなどのよい性質をもつ. またこれを用いて $\mathcal{U}$ の特別な表現として変形 W_N 代数の表現が得られることが知られている. したがって W 代数の表現論に対する $\mathcal{U}$ を用いた手法は有用である. さて $\mathcal{U}$ と物理理論との関係について重要な先行研究として, 粟田-Feigin-白石 (2011) は $\mathcal{U}$ の三価型絡作用素の一意存在性を証明し, さらにこの作用素が位相的弦理論の計算に用いられる位相的頂点と同等であることを示した. ここで三価型絡作用素 Ψ は, テンソル積表現を用いることで 3 つの表現に対する次の条件を満たす線形作用素として定義される ($\mathcal{U}$ の余積を Δ により表す.);

$$\Psi : \mathcal{V} \otimes \mathcal{H} \to \mathcal{H}', \quad a\Psi = \Psi\Delta(a), \quad a \in \mathcal{U}.$$

$\mathcal{V}$ としては Fock 表現と呼ばれる, 基底が Young 図形により張られる表現, $\mathcal{H}$ および $\mathcal{H}'$ としては自由場表示による頂点作用素表現が用いられた. ところで $\mathcal{U}$ の表現の構成法については Feigin-Feigin-神保-三輪-Mukhin (2010–) による無限テンソル積による方法がよく知られている. (本論文 2 章はこの結果に関するレビューである.) これによるとベクトル表現を最も基本的な構成要素として, ベクトル表現の無限テンソル積により Fock 表現が, Fock 表現の無限テンソル積により MacMahon 表現が得られる. ベクトル表現, Fock 表現, MacMahon 表現は基底がそれぞれ $1, 2, 3$ 次元 Young 図形により張られる表現である. 3 次元 Young 図形 (平面分割) に対応する MacMahon 表現は W 代数的に最も自然な表現と考えられ特に重要である. そこで三価型絡作用素 Ψ の定義における $\mathcal{V}$ を Fock 表現以外のものに取り換えた場合についても同様の一意存在性を示すことができるか, 特にどのように Ψ を構成すればよいのかという疑問が生じる. (補足:表現ではなく代数を一般の $\mathfrak{gl}_n$ 型量子トロイダル代数に取り換えた場合については【参考論文】において解決された.)

この問題について本論文では, 無限テンソル積による表現の構成を, 頂点作用素のレベルで実行することで答える. 一般に有限のテンソル積表現に対する三価型絡作用素は, 単に構成要素となるそれぞれの表現に対する三価型絡作用素を合成することで得られる. 一方で無限テンソル積表現を構成するには正則化のための因子を導入する必要があったため, この因子に対応する頂点作用素を新たに導入する必要がある. そして $\mathcal{H}$ と $\mathcal{H}'$ の間に特定の条件が成り立つときのみ, これが可能であることを示す. ただし $\mathcal{V}$ が Fock 表現でない場合, 特に MacMahon 表現である場合についても統一的に記述できるよう, 本論文においては頂点作用素表現 $\mathcal{H}$ の定義については従来より多少一般化されたものを導入する. 以上により三価型絡作用素の, 表現 $\mathcal{V}$ の構成に基づいた系統的な構成が可能となった. また三価型絡作用素の定義において表現空間の順序を次のように入れ替えることで, 元とは異なる双対絡作用素を考えることができる;

$$\Psi^* : \mathcal{H}' \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{V}, \quad \Delta(a)\Psi^* = \Psi^* a, \quad a \in \mathcal{U}.$$

$\mathcal{V}$ が Fock 表現の場合には, 粟田-Feigin-白石 (2011) でも示されたように, Macdonald 対称函数を経由して得られる双対基底を用いることで, 元の三価型絡作用素 Ψ と同様の議論により Ψ^* が得られる. しかし MacMahon 表現の場合に対応する双対基底は未定義であった. そこで本論文では, Macdonald 対称函数の内積に関する規格化因子がベクトル表現に対する三価型絡作用素の OPE 因子から得られることに着目することで, MacMahon 表現の場合の双対基底に必要となる規格化因子を類推する. そしてこれを用いることで MacMahon 表現に対する双対絡作用素が実際に得られることを示す. また新規に得られた MacMahon 表現に対する三価型絡作用素の応用例として R 行列の計算を紹介する. つまり Fock 表現の R 行列が Fock 表現に対する三価型絡作用素の交換関係として計算できるという事実が知られていたが, これの MacMahon 表現における類似を, 新たに得られた絡作用素を用いて具体的な計算から確認する.

なお本研究の大部分は同研究科所属・菅野氏, 粟田氏およびITEP(ロシア)所属・Mironov 氏, Morozov 氏, Zenkevich 氏との共同研究【副論文】に基づく.