

論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

氏 名 末武 一馬

論 文 題 目

Lifting the infinite tensor product representation of the quantum toroidal algebra to the trivalent intertwiner

(量子トロイダル代数の無限テンソル積表現の, 三価型絡作用素への持ち上げ)

論文審査担当者

主 査 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士
中 西 知 樹

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士
菅 野 浩 明

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 理学博士
林 孝 宏

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士(理学)
柳 田 伸 太 郎

論文審査の結果の要旨

本論文の主結果は \mathfrak{gl}_1 型量子トロイダル代数 (Ding-庵原-三木代数) の MacMahon 表現に対する三価型絡作用素 (trivalent intertwiner, 以下, 絡作用素) の (一意) 存在条件の決定とその構成である (定理 1.2). また, 関連する結果として先行研究で知られていた Fock 表現に対する絡作用素について, その一般化を与えた (定理 1.1).

まず背景について説明する. 量子トロイダル代数は, 量子アフィン代数の自然な拡張として得られる無限次元量子群 (準三角形的 Hopf 代数) の一つである. 特に \mathfrak{gl}_1 型量子トロイダル代数 $U = U_{q,t}(\widehat{\mathfrak{gl}_1})$ は Ding-庵原 (1997), 三木 (2007) で詳しく研究され Ding-庵原-三木代数とも呼ばれている. この代数は平面上の点の Hilbert 概型に代表されるモジュライ空間の幾何学的表現論, Macdonald 関数に代表される組み合わせ論的表現論, Calogero-Sutherland 模型に代表される量子可積分系理論といった多くの分野に現れる重要なものである. 量子トロイダル代数 U には vertical 表現および horizontal 表現と呼ばれる二種類の重要な表現のクラスがある. vertical 表現の重要な例は, ベクトル表現, Fock 表現, MacMahon 表現の 3 種類である. Fock 表現はベクトル表現のテンソル積表現の既約部分表現として, また, MacMahon 表現は Fock 表現のテンソル積表現の既約部分表現としてそれぞれ実現できることが重要である. 一方, Feigin-橋爪-星野-白石-柳田 (2009) による変形自由ボゾン場 (変形 Heisenberg 代数) を用いて構成される表現の族を horizontal 表現と呼ぶ. vertical 表現 \mathcal{V} と horizontal 表現の対 $(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ に対する絡作用素 (すなわち U の作用と可換な非自明な線形写像) $\Psi : \mathcal{V} \otimes \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ が本論文の研究対象である. 特に \mathcal{V} が Fock 表現の場合に, これが位相的弦理論における精密化位相頂点作用素と一致することが知られていて, その観点からも重要な研究対象である. 以上がこの論文の背景である.

本論文は最も複雑な vertical 表現である MacMahon 表現に対して, 絡作用素 Ψ が存在するための必要十分条件とその構成法を与えた. まず, Ψ が存在する必要十分条件は horizontal 表現の対 $(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ のレベルおよびゼロモード部分の関係式として与えられる. この条件を書き下すために必要となる horizontal 表現のゼロモード部分の定式化も新しい結果である. 本論文における絡作用素 Ψ の構成の基本的アイデアは, Fock 表現のテンソル積の既約部分表現としての MacMahon 表現の実現を利用するというものである. このアイデアを適用することにより, Fock 表現に対する絡作用素の適切な積を取ることで MacMahon 表現に対する絡作用素が構成され, 絡作用素の明示式が得られる. 本構成を well-defined なものにするためには正則化 (正規積) とゼロモード部分の適切な取り扱いが必要であり, これが本論文の技術的な核心部分である. また, 本構成の準備として, ベクトル表現に対する絡

論文審査の結果の要旨

作用素を構成要素として同様のアイデアを適用することにより、Fock 表現に対する (特別な horizontal 表現についての) 既知の絡作用素の新しい導出法を与えるとともに、Fock 表現に対するより一般の horizontal 表現についての絡作用素を与えた。

以上のように、末武氏の学位論文は \mathfrak{gl}_1 型量子トロイダル代数 U の理論とその応用に対する新しい知見を与えるものであり、学位論文として十分な内容を持つものである。本論部の主要部である第 3 章の成果は副論文として arXiv に発表されている。これは六人の共著であるが、特に本論文の主結果である MacMahon 表現に対する三価絡作用素の構成に対して末武氏が主導的な役割を果たしたことを確認した。

2019 年 2 月 22 日に学位審査セミナー行ったが、講演は本論文の主要結果が非専門家にもよく伝わるように工夫されたものであり、質問に対する応答も的確なものであった。以上によって、学位審査委員会は学位を授与するべきであるものと判断する。