

固体物理における
アクション電磁気学

今枝 立至

目次

第1章	序論	1
1.1	本論文の目的	1
1.2	本論文の構成	1
1.3	電磁気学	2
1.3.1	ラグランジアン密度	2
1.3.2	電磁場の運動方程式	3
1.3.3	補助場の導入	3
1.3.4	電子の運動方程式	4
1.4	シータ項の導出	4
1.4.1	3次元絶縁体のミニマムモデル	4
1.4.2	シータ項の導出	6
1.5	アクシオン電磁気学	8
第2章	アクシオン不安定性と非線形電磁気効果	11
2.1	研究目的	11
2.1.1	大栗・押川理論	11
2.1.2	研究動機	12
2.2	アクシオンに対する有効ポテンシャル	12
2.3	外部電場の印加に対する応答	14
2.3.1	セットアップ	14
2.3.2	解析計算	16
2.3.3	モデルによる解析	20
2.3.4	考察	23

2.3.5	大栗・押川理論とその対応関係	26
2.4	外部磁場の印加に対する応答	27
2.4.1	セットアップ	27
2.4.2	解析計算	27
2.5	第2章のまとめ	28
2.5.1	アクションのポテンシャル	28
2.5.2	電場を印加する場合	28
2.5.3	磁束密度を印加する場合	29
第3章	磁場駆動の動的アクションによるカイラル磁気効果	37
3.1	研究目的	37
3.1.1	カイラル磁気効果	37
3.1.2	研究動機	37
3.2	セットアップ	38
3.3	カイラル磁気効果の評価	39
3.3.1	解析計算	39
3.3.2	モデルによる解析	40
3.3.3	考察	41
3.4	第3章のまとめ	41
第4章	全体のまとめ	43
付録A	記法	47
A.1	4元ベクトル・電磁場テンソル	47
付録B	微分形式	53
B.1	ホッジ演算子・ホッジ双対	53
B.2	外微分・余微分・ラプラス＝ド・ラーム演算子	54
付録C	電磁気学	57
C.1	接続・曲率	57

C.2	ゲージ変換	58
C.3	ラグランジアン密度	58
C.4	電磁場の運動方程式	59
C.5	電磁場に対する波動方程式	60
C.6	補助場の導入	60
付録 D	量子異常と藤川の方法	63
D.1	藤川の方法	63
D.2	カイラルゲージ変換の場合	64
D.2.1	カイラルゲージ変換後の作用	64
D.2.2	ヤコビアン J	65
D.2.3	まとめ	69
付録 E	アクシオン電磁気学	71
E.1	ラグランジアン密度	71
E.2	電磁場の運動方程式	72
E.3	対応関係	73
E.4	アクシオンの運動方程式	74

第1章 序論

1.1 本論文の目的

本論文は、アクシオンと呼ばれる新奇な粒子が電磁場と相互作用することで引き起こす現象に関して、物性物理において関連した現象を明らかにすることを目的としている。

1.2 本論文の構成

第1章では、本研究における基本事項を説明する。電磁気学の基本的な部分を復習し、ディラック電子系ではシータ項と呼ばれる電磁場との相互作用項が現れることを見る。最後に、シータ項を含んだ電磁気学を紹介する。

第2章では、アクシオン不安定性と非線形電磁気効果に関する研究成果をまとめる。アクシオンの相互作用を仮定した絶縁体に外部から電場を印加したときに生じる電磁応答を詳細に調べる。まず初めにアクシオンのポテンシャルを導出する。次にそのポテンシャルを用いて電磁応答を解析する。結果としてポテンシャルの違いによって、電磁応答が大きく異なることを示す。

第3章では、磁場駆動の動的アクシオンによる電磁気効果に関する研究成果をまとめる。アクシオンの相互作用を仮定した反強磁性絶縁体に外部から磁束密度を印加したときに生じるカイラル磁気効果という電磁応答を詳細に調べる。印加する磁束密度によって反強磁性絶縁体の磁化がスピントリップした瞬間だけ電流が生じることを示す。流れた電荷量の総量は分極の変化を測定することで見積もることができることを示す。

最後に第4章で全体のまとめを行う。アクシオンは電場と磁場の間を結びつける効

果を持っているが，その結果，電磁場の境界条件を与えたり，アクシオンや電磁場の 1 つを指定すると，その他の場の値も自動的に決まってしまうという非常に特異な性質を持つことが明らかになった。

1.3 電磁気学

ここでは，電磁気学の復習をする．詳細は付録 C にある．

1.3.1 ラグランジアン密度

一般に，電磁場と電子の相互作用系を記述するラグランジアン密度は以下で与えられる．

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{em}} + \mathcal{L}_{\text{em-e}} + \mathcal{L}_e \quad (1.1)$$

ここで，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{em}} &= \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2), \\ \mathcal{L}_{\text{em-e}} &= \frac{1}{c}(-\rho\Phi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}). \end{aligned}$$

はそれぞれ電磁場 \mathbf{E} , \mathbf{B} に対するラグランジアン密度，および電磁場と電子の相互作用に対するラグランジアン密度である． ρ , \mathbf{j} はそれぞれ電荷密度と電流密度であり， Φ , \mathbf{A} はそれぞれスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルである． \mathcal{L}_e は電子に対するラグランジアン密度であるが，固体中では真空中のものとは異なるので注意したい．

1.3.2 電磁場の運動方程式

電磁場の運動方程式は以下のように与えられる.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.2)$$

$$\partial_0 \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (1.4)$$

$$\partial_0 \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad (1.5)$$

ここで、ビアンキ恒等式から式(1.2)と式(1.3)が、ラグランジアン密度(1.1)の電磁場ポテンシャル $A_{\mu=0,1,2,3}$ に対するオイラー・ラグランジュ方程式から式(1.4)と式(1.5)が、それぞれ導出される.

1.3.3 補助場の導入

以下では慣習ではあるが、補助場(電束密度・磁場)を導入する. 束縛電荷部分 ρ_b , \mathbf{j}_b と自由電荷部分 ρ_f , \mathbf{j}_f に分け, 以下のように電気分極 \mathbf{P} と磁化 \mathbf{M} を定義する.

$$\rho_b \equiv -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{j}_b \equiv c\partial_0 \mathbf{P} + c\nabla \times \mathbf{M}$$

このとき, 式(1.4)および式(1.5)は

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_f,$$

$$\partial_0 \mathbf{D} - \nabla \times \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_f,$$

ここで, 電束密度 \mathbf{D} と磁場 \mathbf{H} を次のように定義した.

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$$

$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$$

1.3.4 電子の運動方程式

ラグランジアン密度 (1.1) の電子の場に対するオイラー・ラグランジュ方程式から電子の運動方程式が導出される。この方程式と電磁場の方程式を連立して解くことで電磁場 \mathbf{E} , \mathbf{B} や電荷密度 ρ や電流密度 \mathbf{j} あるいは電気分極 \mathbf{P} や磁化 \mathbf{M} が決まる。しかし、前にも述べたように \mathcal{L}_e は固体中では真空中のものとは異なる。特に、一般に固体中では真空に比べて対称性が低いために、興味深い電磁応答が期待できる場合がある。実際、マルチフェロイクスの分野では古くから磁気点群を用いた電磁応答の分類がなされている [1]。

1.4 シータ項の導出

前節で電磁気学では電子の運動がその応答で重要であることを説明した。ここでは、絶縁体や半導体中の電子に着目しよう。これらの電子はディラック電子で記述できる。ここでは、藤川の方法 [5, 6] を使うことで、ディラック電子のラグランジアンからシータ項を導く。

1.4.1 3次元絶縁体のミニマムモデル

相互作用のない3次元絶縁体のミニマムモデルとして、以下の低エネルギーの有効ハミルトニアンを考える。

$$H_e = \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}^\dagger \mathcal{H}_e(\mathbf{k}) \psi_{\mathbf{k}}, \quad (1.6)$$

$$\mathcal{H}_e(\mathbf{k}) = \sum_{i=1,2,3} k_i \Gamma^i + \phi_4 \Gamma^4 + \phi_5 \Gamma^5. \quad (1.7)$$

ここで $\psi_{\mathbf{k}}^\dagger$ ($\psi_{\mathbf{k}}$) は運動量 \mathbf{k} を持つ電子の生成 (消滅) 演算子であり、2つの内部自由度 (スピンおよび軌道) を持つ。 ϕ_4, ϕ_5 は定数である。また、 $\Gamma^{a=1,2,3,4,5}$ は 4×4 のガンマ行列であり、それは以下のエルミート性と反交換関係を満たす:

$$(\Gamma^a)^\dagger = \Gamma^a \quad (a = 1, 2, 3, 4, 5), \quad (1.8)$$

$$\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = 2\delta^{ab} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4, 5). \quad (1.9)$$

一般論で式 (1.8) と式 (1.9) を満たす 4×4 のガンマ行列の数は最大 5 である (言い換えれば, 式 (1.8) と式 (1.9) を満たす 6 個目のガンマ行列をつくることはできない). また, $\Gamma^{a=1,2,3,4}$ が与えられている状況では,

$$\Gamma^5 \equiv \Gamma^1 \Gamma^2 \Gamma^3 \Gamma^4 \quad (1.10)$$

とすることで式 (1.8) と式 (1.9) を満たす Γ^5 を一意に構成できる. このとき, ハミルトニアン (1.7) に対するエネルギー固有値は以下で与えられる.

$$E_e(\mathbf{k}) = \pm \sqrt{\mathbf{k}^2 + \phi_4^2 + \phi_5^2}.$$

したがって, バンドギャップの大きさは $2\sqrt{\phi_4^2 + \phi_5^2}$ で与えられ, $\phi_4 \Gamma^4, \phi_5 \Gamma^5$ は質量項と呼ばれる.

さて, ここまでで 3 次元絶縁体のミニマムモデルでは 2 種類の質量項が現れることを示したのだが, この 2 つをどのように区別できるのかを考える. これは以下で分かるように対称性の違いで区別される. ここでは時間反転演算子 \mathcal{T} と空間反転演算子 \mathcal{P} に対する変換性を考える. まず時間反転演算子 \mathcal{T} に対して $\Gamma^{a=1,2,3,4}$ が

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \Gamma^a + \Gamma^a \mathcal{T} &= 0 \quad (a = 1, 2, 3), \\ \mathcal{T} \Gamma^4 - \Gamma^4 \mathcal{T} &= 0. \end{aligned}$$

と変換されるとすると, 式 (1.10) より Γ^5 は

$$\mathcal{T} \Gamma^5 + \Gamma^5 \mathcal{T} = 0,$$

と変換されることがわかる. 同様にして空間反転演算子 \mathcal{P} に対しても反転中心を適切に選ぶことで

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \Gamma^a + \Gamma^a \mathcal{P} &= 0 \quad (a = 1, 2, 3), \\ \mathcal{P} \Gamma^4 - \Gamma^4 \mathcal{P} &= 0. \end{aligned}$$

と変換されるとすると, 式 (1.10) より Γ^5 は

$$\mathcal{P} \Gamma^5 + \Gamma^5 \mathcal{P} = 0,$$

と変換されることがわかる。つまり Γ^4, Γ^5 は時間反転演算子 \mathcal{T} と空間反転演算子 \mathcal{P} に対する変換性が逆である。時間反転対称性や空間反転対称性が

$$\mathcal{T}\mathcal{H}(\mathbf{k})\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{H}(-\mathbf{k}),$$

$$\mathcal{P}\mathcal{H}(\mathbf{k})\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{H}(-\mathbf{k}),$$

で与えられることに注意すれば、 $\phi_4\Gamma_4(\phi_5\Gamma_5)$ は時間反転対称性や空間反転対称性をどちらも破らない（破る）質量項である。したがって、 ϕ_4, ϕ_5 をある種の間あるいは秩序だと思ふことにする。まず ϕ_5 は変換性から反強磁性秩序に対応する。一方、時間反転対称性があると仮定すると、非磁性秩序 ϕ_4 はその符号が 3 次元 \mathbb{Z}_2 トポロジカル絶縁体のトポロジカル量子相を特徴づける。実際、時間反転対称性から $\phi_5 = 0$ として、高次の正則化項 $c\mathbf{k}^2\Gamma^4$ ($c > 0$) を $H(\mathbf{k})$ に付け加えることによって、3 次元トポロジカル絶縁体の \mathbb{Z}_2 トポロジカル数が ϕ_4 の符号によって得られることを確認できる [3]: ϕ_4 の符号が負（正）のとき、系はトポロジカルに非自明（自明）である。

ここで図 1.1 に $\phi_4\phi_5$ のパラメータ空間を示す。 $\phi_4\phi_5$ 平面の原点ではギャップが閉じるが、それ以外の点ではギャップは開いている。時間反転対称性のある系は図 1.1 の ϕ_4 軸上に位置し、ギャップレス点 $\phi_4 = 0$ を境に $\phi_4 > 0$ か $\phi_4 < 0$ の 2 つの相に分けられる。これらはそれぞれ通常の絶縁体とトポロジカル絶縁体に対応する。したがって $\phi_4\phi_5$ 平面の原点は通常の絶縁体とトポロジカル絶縁体間の量子臨界点になる。次の小節で詳しく述べるが、アキソン場 θ は図 1.1 に示すように $\phi_4\phi_5$ 平面における偏角に対応する。

1.4.2 シータ項の導出

ここでは、1.4.1 節で導入した 3 次元絶縁体のミニマムモデルからシータ項 $\mathcal{L}_\theta = \frac{\alpha}{4\pi^2}\theta\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ を導出する。詳細は付録 D を見てほしい。

まず、電磁場中においてハミルトニアン (1.7) に対するラグランジアン密度は次のように与えられる。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{em}} + \mathcal{L}_{\text{em-e}} + \mathcal{L}_e,$$

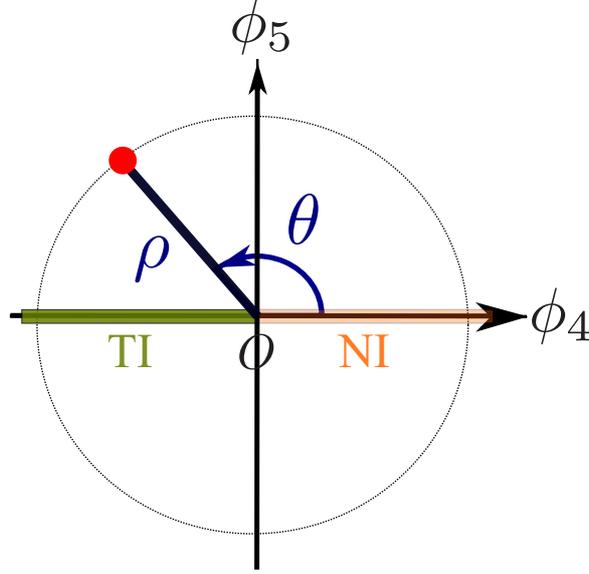


図. 1.1: アクシオン場 θ と非磁性秩序 ϕ_4 および磁性秩序 ϕ_5 の関係. ϕ_4 はトポロジカルな量子相転移を特徴付ける秩序に対応し, ϕ_5 は反強磁性秩序に対応する. 特に, 時間反転対称性を持つ系は, ϕ_4 軸 (すなわち, $\phi_5 = 0$) 上に位置し, ϕ_4 の符号によって $\phi_4 > 0$ の通常の絶縁体 (NI) または $\phi_4 < 0$ のトポロジカル絶縁体 (TI) に分類される. 自著論文 [4] より転載.

ここで,

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = \frac{1}{8\pi} (\epsilon \mathbf{E}^2 - \mu^{-1} \mathbf{B}^2),$$

$$\mathcal{L}_{\text{em-e}} + \mathcal{L}_e = \bar{\psi} (i\hbar\gamma^\mu D_\mu - \phi_4 - i\phi_5\gamma^5) \psi,$$

はそれぞれ電磁場のラグランジアン密度, およびハミルトニアン (1.6) に対応するラグランジアン密度で, 電磁場中ということで偏微分 ∂_μ を共変微分 $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ に置き換えた. A_μ は電磁ポテンシャルである. また, $\psi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$, $\gamma^0 \equiv \Gamma_4$, $\gamma^{i=1,2,3} \equiv \Gamma_4\Gamma_i$, $\gamma^5 \equiv -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ である.

このとき経路積分形式の分配関数は以下で与えられる.

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right].$$

ここで以下のカイラルゲージ変換を行う:

$$\psi' = e^{-i\gamma^5\theta/2}\psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{-i\gamma^5\theta/2}.$$

今, θ を

$$\phi_4 = \rho \cos \theta, \quad (1.11)$$

$$\phi_5 = \rho \sin \theta, \quad (1.12)$$

で与えると, \mathcal{L}_e 中で, 時間反転対称性を破る項 $i\phi_5\bar{\psi}\gamma^5\psi$ を消すことができる. しかしながら, この過程で経路積分の測度のヤコビアンとして, いわゆる θ 項 (1.16) が現れる. すなわち, $\psi', \bar{\psi}'$ を用いて分配関数を書くと,

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}' + \mathcal{L}_\theta) \right],$$

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}_{\text{em}} + \bar{\psi}' (i\gamma^\mu D'_\mu - \rho) \psi',$$

$$D'_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu + \frac{i}{2}\gamma^5\partial_\mu\theta,$$

となる. つまり, 図 1.1 において, $\phi_4\phi_5$ 平面の角度がアキシオン場 θ に対応していたのである. ψ' と $\bar{\psi}'$ に関して積分することで, ボゾン場 ϕ_4 と ϕ_5 および電磁場 \mathbf{E}, \mathbf{B} に対する有効ラグランジアン密度が得られる:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{em}} + \mathcal{L}_\theta - i \ln \det (i\gamma^\mu D'_\mu - \rho).$$

ここで, 右辺の最後の項は ψ' と $\bar{\psi}'$ の積分から来る寄与であり, それは低エネルギー極限において微分展開で評価できる. この項は θ に依存しないので, θ 項に対しては何も補正をしないが, θ と ρ の運動エネルギー項や, A_μ や j^μ との結合などを生じさせる. その結果, ϵ, μ をくりこむ. 以下では, くりこまれた値に対して元と同じ記法の ϵ, μ を用いることにする.

1.5 アキシオン電磁気学

電磁場 \mathbf{E}, \mathbf{B} とアキシオン場 θ が相互作用している系を記述するラグランジアン密度 \mathcal{L} は以下で与えられる.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{em}} + \mathcal{L}_a + \mathcal{L}_\theta, \quad (1.13)$$

ただし,

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = \frac{1}{8\pi} (\epsilon \mathbf{E}^2 - \mu^{-1} \mathbf{B}^2), \quad (1.14)$$

$$\mathcal{L}_a = \frac{1}{2} (\partial_\mu \theta)(\partial^\mu \theta) - \mathcal{V}_a(\theta). \quad (1.15)$$

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{\alpha}{4\pi^2} \theta \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad (1.16)$$

ここで, 式 (1.14) の \mathcal{L}_{em} は電磁場に対するラグランジアン密度を, 式 (1.15) の \mathcal{L}_a はアクシオンに対するラグランジアン密度で, 式 (1.16) の \mathcal{L}_θ はいわゆるシータ項と呼ばれ, 電磁場とアクシオンの相互作用を記述するラグランジアン密度を表す.

式 (1.13) でラグランジアン密度が与えられたとき, 以下のような運動方程式が得られる.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.17)$$

$$\partial_0 \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (1.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (1.19)$$

$$\partial_0 \mathbf{D} - \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad (1.20)$$

$$\square \theta + \frac{\partial \mathcal{V}_a}{\partial \theta} = \frac{\alpha}{4\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}. \quad (1.21)$$

ただし, \square はダランベルシアンである. ここで, 構成方程式は以下で与えられる.

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}_\theta,$$

$$\mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}_\theta.$$

ただし

$$\mathbf{P}_\theta = \frac{\alpha}{4\pi^2} \theta \mathbf{B}, \quad (1.22)$$

$$\mathbf{M}_\theta = \frac{\alpha}{4\pi^2} \theta \mathbf{E}. \quad (1.23)$$

ここで, ビアンキ恒等式から式 (1.17) と式 (1.18) が, ラグランジアン密度 (1.13) の電磁場ポテンシャル $A_{\mu=0,1,2,3}$ に対するオイラー・ラグランジュ方程式から式 (1.19) と式 (1.20) が, アクシオン場 θ に対するオイラー・ラグランジュ方程式から式 (1.21) が, それぞれ導出される.

式 (1.19) と式 (1.20) はそれぞれ以下のように書き直すことができることに注意せよ.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) &= 4\pi \rho_\theta, \\ \partial_0(\epsilon \mathbf{E}) - \nabla \times (\mu^{-1} \mathbf{B}) &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_\theta,\end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}\rho_\theta &\equiv -\nabla \cdot \mathbf{P}_\theta \\ &= -\frac{\alpha}{4\pi^2} (\nabla \theta) \cdot \mathbf{B},\end{aligned}\tag{1.24}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_\theta &\equiv c\partial_0 \mathbf{P}_\theta + c\nabla \times \mathbf{M}_\theta \\ &= \frac{\alpha c}{4\pi^2} [(\partial_0 \theta) \mathbf{B} + (\nabla \theta) \times \mathbf{E}]\end{aligned}\tag{1.25}$$

ここで, $\rho_\theta, \mathbf{J}_\theta$ はアクシオンによる電荷密度と電流密度を意味し, 特に式 (1.25) 中の $(\partial_0 \theta)$ に比例する部分はカイラル磁気効果を, $(\nabla \theta)$ に比例する部分はホール効果をそれぞれ表している. これらは電荷の保存則を満たす.

$$\partial_0 \rho_\theta + \nabla \cdot \mathbf{J}_\theta = 0$$

ラグランジアン密度 (1.13) に対するハミルトニアン密度 \mathcal{H} は以下で与えられる.

$$\mathcal{H} = \mathcal{U}_{\text{em}} + \mathcal{H}_a,$$

ただし

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{\text{em}} &= \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \\ &= \frac{1}{8\pi} (\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu^{-1} \mathbf{B}^2),\end{aligned}\tag{1.26}$$

$$\mathcal{H}_a = \frac{1}{2} [(\partial_0 \theta)^2 + (\nabla \theta)^2] + \mathcal{V}_a(\theta).\tag{1.27}$$

ここで式 (1.26) の \mathcal{U}_{em} は電磁場に対するエネルギー密度であり, 式 (1.27) の \mathcal{H}_a はアクシオンに対するエネルギー密度である. 式 (1.26) では \mathcal{L}_θ に対する項は 2 つ目の等号では消えてなくなっていることに注意せよ. なぜなら, \mathcal{L}_θ は計量に依存しないトポロジカル項であり, その結果エネルギーには寄与しないからである.

第2章 アクシオン不安定性と非線形電磁気効果

この章では、微視的な視点からアクシオン不安定性現象を解析する。アクシオン場の代わりにその起源である絶縁体中の2つの秩序のゆらぎを考慮して解析する。1つ目の秩序は反強磁性秩序で、2つ目はトポロジカル秩序と関連がある。

2.1 研究目的

2.1.1 大栗・押川理論

アクシオン場 θ の値は物質固有のものではなく、動的に変動するアクシオン場（動的アクシオン場）というものを考えることができる。物質中ではアクシオン場 θ は通常アクシオンのポテンシャルが最小になるときの値をとるが、運動方程式 (1.21) が意味しているのは電場と磁束密度を平行に印加すればポテンシャルの最小値からずれた値にアクシオン場を変動できるということである。しかし、大栗・押川による理論 [2] では電場だけでも動的アクシオンを誘起できることを示した。彼らは2つの異なる絶縁体の接合系を考えて、片方の絶縁体からもう片方の絶縁体に対して電場を印加したとき内部の電磁場の静的解の値はどのようになるかを解析した。その結果、以下の結論を得た。

- 印加電場 E_0 に対して、ある臨界電場 E_0^{crit} が存在し、 $E_0 = E_0^{\text{crit}}$ で相転移が起こる。
- 相転移後 ($E_0 > E_0^{\text{crit}}$)、絶縁体内部では電場の一部は遮蔽され、磁束密度が誘起される。

2.1.2 研究動機

大栗・押川による理論では、アクシオン場 θ のポテンシャルを $|\theta| \leq 1$ として $\mathcal{V}_a \propto \theta^2$ と仮定していた。これに対して、我々が追従の計算を行った結果、相転移後 ($E_0 > E_0^{\text{crit}}$)、アクシオン場 θ の値は 1 に比べて十分大きく誘起されていることが明らかになった。そのため、遮蔽される電場や誘起される磁束密度の大きさに関しては適切なポテンシャルを選んで再考する必要があると考えられる。また、動的アクシオン現象の理解を深めるためには、どのように内部の電磁場の値が決まるのか、およびなぜ相転移が生じるのかという問題をアクシオン場との関係させて明らかにする必要がある。動的アクシオン現象を実験で測定しやすい系を明らかにすることも重要である。

本研究では、アクシオン場に対する有効ポテンシャルを微視的な観点から導入し、それを使って動的アクシオンの電磁応答を解析することで、以上で示した問題を明らかにしていく。

以下の節は次のような構成である。2.2 節では、アクシオン場に対する有効ポテンシャルを絶縁体の微視的なミニマムモデルから導出する。2.3 節では、印加電場の下で誘起される電磁場とアクシオン場の静的解を与える。2.4 節では、電場の代わりに磁束密度を印加した場合について議論する。2.5 節は本章のまとめである。

2.2 アクシオンに対する有効ポテンシャル

この節では、微視的なモデルからアクシオン場の物理的意味を考察することで、アクシオンに対する妥当なポテンシャルを導入する。

絶縁体中では非磁性秩序 ϕ_4 や磁性秩序 ϕ_5 は基底状態ではある値（例えばそれぞれ $\phi_4^{(0)}, \phi_5^{(0)}$ とする）をとっていて外場などでゆらがせることができる。このことはある有効ポテンシャル $\mathcal{V}(\phi_4, \phi_5)$ （その最小値が $(\phi_4^{(0)}, \phi_5^{(0)})$ にある）が存在することを意味する。実はこのポテンシャル $\mathcal{V}(\phi_4, \phi_5)$ からアクシオンのポテンシャルを導出できることを以下でみる。

まず、電磁場と絶縁体の電子と非磁性秩序や磁性秩序を考慮したラグランジアン密

度は次のように与えられる.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{em}} + \mathcal{L}_e - \mathcal{V}_a(\phi_4, \phi_5),$$

このとき経路積分形式の分配関数は以下で与えられる.

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right].$$

ここで以下のカイラルゲージ変換を行う:

$$\psi' = e^{-i\gamma^5\theta/2}\psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{-i\gamma^5\theta/2}.$$

今, θ を

$$\phi_4 = \rho \cos \theta,$$

$$\phi_5 = \rho \sin \theta,$$

で与えると, \mathcal{L}_e 中で, 時間反転対称性を破る項 $i\phi_5\bar{\psi}\gamma^5\psi$ を消すことができる. しかしながら, この過程で経路積分の測度のヤコビアンとして, いわゆる θ 項 (1.16) が現れる. すなわち, $\psi', \bar{\psi}'$ を用いて分配関数を書くと,

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}' + \mathcal{L}_\theta) \right],$$

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}_{\text{em}} + \bar{\psi}' (i\gamma^\mu D'_\mu - \rho) \psi' - \mathcal{V}(\phi_4, \phi_5),$$

$$D'_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu + \frac{i}{2}\gamma^5\partial_\mu\theta,$$

となる. つまり, 図 1.1 において, $\phi_4\phi_5$ 平面の角度がアクション場 θ に対応していたのである. ψ' と $\bar{\psi}'$ に関して積分することで, ボゾン場 ϕ_4 と ϕ_5 および電磁場 \mathbf{E}, \mathbf{B} に対する有効ラグランジアン密度が得られる:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{em}} + \mathcal{L}_\theta - \mathcal{V}(\phi_4, \phi_5) - i \ln \det (i\gamma^\mu D'_\mu - \rho).$$

ここで, 右辺の最後の項は ψ' と $\bar{\psi}'$ の積分から来る寄与であり, それは低エネルギー極限において微分展開で評価できる. この項は θ に依存しないので, θ 項に対しては

何も補正をしないが, θ と ρ の運動エネルギー項や, A_μ や j^μ との結合などを生じさせる. その結果, ϵ, μ および $\mathcal{V}(\phi_4, \phi_5)$ をくりこむ. 以下では, くりこまれた値に対して元と同じ記法の ϵ, μ および $\mathcal{V}(\phi_4, \phi_5)$ を用いることにする. 本研究では簡単のため静的で空間変化からくる項も無視できる場合についてのみ議論することにする. このとき以下の低エネルギーラグランジアンを得る:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{em}} + \mathcal{L}_\theta - \mathcal{V}(\phi_4, \phi_5). \quad (2.1)$$

ここで, 式 (2.1) の ρ に対するオイラー・ラグランジュ方程式から

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = 0 \quad (2.2)$$

を得る. 式 (2.2) の解を $\tilde{\rho}(\theta)$ として, これを元のポテンシャル $\mathcal{V}(\phi_4, \phi_5)$ に代入したものをアクシオンのポテンシャル $\mathcal{V}_a(\theta)$ と定義すれば, 電磁場とアクシオン場に対する低エネルギーラグランジアンを得る:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{em}} + \mathcal{L}_\theta - \mathcal{V}_a(\theta),$$

$$\mathcal{V}_a(\theta) \equiv \mathcal{V}(\tilde{\rho}(\theta) \cos \theta, \tilde{\rho}(\theta) \sin \theta). \quad (2.3)$$

ここで式 (2.3) の $\mathcal{V}_a(\theta)$ は θ に関して 2π の周期性を持つべきある. なぜなら $\tilde{\rho}(\theta+2\pi) = \tilde{\rho}(\theta)$ であるからである. この周期性から $\mathcal{V}_a(\theta)$ は必然的に θ の高次の項を含むことに注意したい. θ の高次の項を含む可能性があることに注意せよ.

2.3 外部電場の印加に対する応答

2.3.1 セットアップ

図 2.1 に示すような, 2 つの異なる絶縁体の接合系を考える. 1 つは着目する絶縁体で「アクシオン絶縁体」と呼ぶことにする. 一方, もう 1 つの絶縁体はアクシオン絶縁体に外場をかけたり, アクシオン絶縁体からの電磁場の応答を観測するためのもので「通常の絶縁体」と呼ぶことにする. 通常の絶縁体は真空だと思ってもよい.

ここでアクシオン絶縁体における誘電率，透磁率，アクシオン場の値をそれぞれ ϵ ， μ ， θ とし，また，アクシオン絶縁体の内部における電場，磁束密度，磁場の値をそれぞれ E ， B ， H と表すことにする．同様にして通常の絶縁体における誘電率，透磁率，アクシオン場の値をそれぞれ ϵ_0 ， μ_0 ， θ_0 と，また，通常の絶縁体における電場，磁束密度の値をそれぞれ E_0 ， B_0 と表すことにする．ここで以下のような状況を考える：

- 各絶縁体はどちらも半無限系とする．
- 通常の絶縁体において，アクシオン場の値は常に $\theta_0 = 0$ に固定されているものとする．
- 印加する外場として，絶縁体の界面に対して垂直に通常の絶縁体から電場 E_0 を印加するものとする．
- 電磁場の境界条件として，次のような関係式が成り立つものとする：

$$\epsilon_0 E_0 = \epsilon E + \frac{\alpha}{\pi} \theta B, \quad (2.4)$$

$$B_0 = B = \mu H + \frac{\alpha}{\pi} \mu \theta E. \quad (2.5)$$

ここで $\theta_0 = 0$ を使った．

- 系のエネルギー散逸は十分大きく，外場を印加後の十分時間が経ち，静的解に緩和した後を考えるとする．
- アクシオン絶縁体において，アクシオン場に対するポテンシャルは $\mathcal{V}_a(\theta)$ で与えられるとする．簡単のため， $\mathcal{V}_a(\theta)$ は $\theta = 0$ で最小となり，その近傍では以下のように近似できるとする．

$$\mathcal{V}_a(\theta) \simeq \frac{M_a^2}{2} \theta^2. \quad (2.6)$$

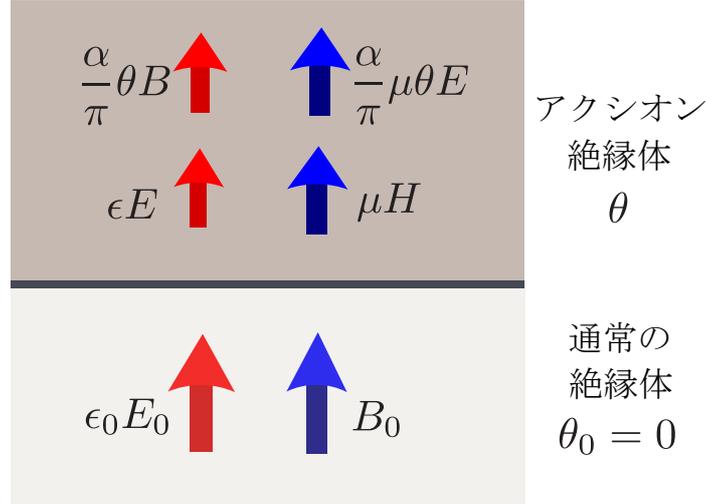


図. 2.1: セットアップの概略図. アクシオン絶縁体 (上) と通常の絶縁体 (下) の接合系. 界面では, 電束密度の保存則 (2.4) と磁束密度の保存則 (2.5) を満たす. アクシオン場 θ は, 通常の絶縁体ではゼロに固定されている一方で, アクシオン絶縁体では有限の値に誘起され得るとする. 電場 E_0 は界面に対して垂直に印加される. アクシオン絶縁体における内部の電場 E や磁束密度 B , アクシオン場 θ はアクシオン絶縁体における内部のエネルギーを最小化するように決まる.

2.3.2 解析計算

今, 変数は (E, B, θ) であるが, これらは互いに独立ではなく, 拘束条件のもと関係づけられている. アクシオン絶縁体中におけるエネルギー汎関数

$$\mathcal{H} = \mathcal{U}_{\text{em}} + \mathcal{V}_a(\theta), \quad (2.7)$$

$$\mathcal{U}_{\text{em}} \equiv (1/8\pi)(\epsilon E^2 + \mu^{-1}B^2). \quad (2.8)$$

を拘束条件 (2.4) の下で最小化する (E, B, θ) を求める.

電磁場の値とアクシオン場の値の関係

初めに, エネルギー汎関数 (2.7) を E と B に関して最小化する. これは $\mathcal{V}_a(\theta)$ が E と B に依存しないことから電磁場のエネルギー密度 (2.8) を E と B に関して最小化

することと同値である。まず式 (2.8) に境界条件 (2.4) を代入することで以下を得る。

$$U_{\text{em}} = \frac{\epsilon_{\text{eff}}(\theta)}{8\pi\epsilon\mu} \left(B - \tilde{B}(\theta) \right)^2 + \frac{(\epsilon_0 E_0)^2}{8\pi\epsilon_{\text{eff}}(\theta)},$$

ここで

$$\tilde{B}(\theta) \equiv \frac{\theta/\Theta}{1 + (\theta/\Theta)^2} \frac{\epsilon_0 E_0}{\sqrt{\epsilon/\mu}}, \quad (2.9)$$

$$\epsilon_{\text{eff}}(\theta) \equiv \epsilon [1 + (\theta/\Theta)^2],$$

$$\Theta \equiv \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\epsilon/\mu} \simeq 137\pi \sqrt{\epsilon/\mu} \quad (2.10)$$

とした。したがって、 U_{em} の最小値では磁束密度 B は θ の関数として以下のように与えられる。

$$B = \tilde{B}(\theta), \quad (2.11)$$

これはアキシオン場 θ によって磁束密度が誘起されていることを意味する。また、式 (2.11) と境界条件 (2.4) から絶縁体内部の電場 E は以下のように与えられる。

$$E = \tilde{E}(\theta) = \frac{\epsilon_0 E_0}{\epsilon_{\text{eff}}(\theta)}, \quad (2.12)$$

これはアキシオン場 θ によって印加電場が遮蔽されていることを意味する。式 (2.11) と式 (2.12) より、絶縁体内部の磁場 H は以下のように任意の θ に対してゼロとなる。

$$H = \tilde{B}(\theta)/\mu - \frac{\alpha}{\pi} \theta \tilde{E}(\theta) = 0.$$

図 2.2 に $\tilde{E}(\theta), \tilde{B}(\theta)$ の θ 依存性を示す。ここで $\tilde{E}(\theta)$ と $\tilde{B}(\theta)$ のふるまいは $|\theta|/\Theta$ の値の大きさによって次のように 3 種類に分類できる。

領域 (I) $|\theta| \ll \Theta$: $\tilde{E}(\theta)$ はほぼ一定値 $\epsilon_0 E_0/\epsilon$ をとり、磁束密度 $\tilde{B}(\theta)$ は大きくは誘起されない。

領域 (II) $|\theta| \sim \Theta$: 領域 (I) と領域 (III) の中間の領域にあたり、 $\tilde{E}(\theta)$ は遮蔽が起これ始め、 $\tilde{B}(\theta)$ が大きく誘起される。

領域 (III) $|\theta| \gg \Theta$: $\tilde{E}(\theta)$ はほとんど遮蔽されてしまう一方、 $\tilde{B}(\theta)$ は大きくは誘起されない。

また、注意すべき点として、 $\tilde{E}(\theta)$ と $\tilde{B}(\theta)$ は θ に関して周期 2π の周期関数にはならない。 θ の 2π 周期性は閉じた時空間に関して周期境界条件を課したとき満たされるべきものであるが、大栗・押川理論 [2] でも指摘されているように本研究では界面が存在のするためにこれは当てはまらない。

臨界電場

式 (2.11) と式 (2.12) を式 (2.7) および式 (2.8) に代入すると、アクシオン絶縁体中におけるエネルギー汎関数は以下で与えられる。

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}}(\theta) &= \tilde{\mathcal{U}}_{\text{em}}(\theta) + \mathcal{V}_a(\theta), \\ \tilde{\mathcal{U}}_{\text{em}}(\theta) &\equiv \frac{1}{8\pi} [\tilde{E}(\theta)^2 + \tilde{B}(\theta)^2] = \frac{(\epsilon_0 E_0)^2}{8\pi \epsilon_{\text{eff}}(\theta)}.\end{aligned}\quad (2.13)$$

式 (2.13) の第 1 項目の電磁場のエネルギー $\tilde{\mathcal{U}}_{\text{em}}(\theta)$ は $|\theta|$ に関して単調減少関数であることに注意せよ。すなわち、 $\tilde{\mathcal{U}}_{\text{em}}(\theta)$ は $|\theta|$ が大きいほどエネルギーが下がる。これがアクシオン不安定性の原因である。

ここで臨界電場の値を評価する。一般に不安定性の解析は電場を印加前に安定点であった $\theta = 0$ 近傍の $\tilde{\mathcal{H}}(\theta)$ の様子だけ分かれば十分である。臨界電場 E_0^{crit} を次のように定義する。

$$\left. \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{H}}(\theta)}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0, E_0=E_0^{\text{crit}}} = 0.$$

ここで、

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{U}}(\theta)}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0, E_0=E_0^{\text{crit}}} &= -\frac{(\epsilon_0 E_0)^2}{4\pi \epsilon \Theta^2}, \\ \left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}_a(\theta)}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0, E_0=E_0^{\text{crit}}} &= M_a^2\end{aligned}\quad (2.14)$$

より、臨界電場 E_0^{crit} は次のように与えられる。

$$E_0^{\text{crit}} = \frac{\sqrt{4\pi \epsilon} \Theta M_a}{\epsilon_0}.\quad (2.15)$$

ただし，式 (2.14) において，ポテンシャルが $\theta = 0$ 近傍で式 (2.6) で記述できることを用いた．このとき $E_0 < E_0^{\text{crit}}$ では， $\tilde{\mathcal{H}}(\theta)$ の $\theta = 0$ では $\left. \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{H}}(\theta)}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} > 0$ より $\theta = 0$ は安定点であるのに対して， $E_0 > E_0^{\text{crit}}$ では， $\left. \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{H}}(\theta)}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} < 0$ となり， $\theta = 0$ は不安定点となる．

誘起されるアクシオン場

誘起されるアクシオン場はエネルギー汎関数 (2.13) を最小化する θ として

$$\partial \tilde{\mathcal{H}}(\theta) / \partial \theta = 0 \quad (2.16)$$

によって求められる．式 (2.16) を具体的に評価するにはアクシオンのポテンシャル $\mathcal{V}_a(\theta)$ の具体的な形を与える必要があり，次の 2.3.3 節で詳しく議論する．ここでは結果の一般論を述べる．まず，初期状態 ($E_0 = 0$) では， $\tilde{\mathcal{H}}(\theta)$ は $\theta = 0$ に最小値を持つものに対して，電場を印加後 ($E_0 \neq 0$) では $\theta = 0$ はもはや $\tilde{\mathcal{H}}(\theta)$ のグローバルな最小値ではないことに注意せよ．実際に，式 (2.13) の第 1 項は $|\theta|$ の単調減少関数であり，第 2 項は θ の周期関数であるから，不等式 $\tilde{\mathcal{H}}(\theta) > \tilde{\mathcal{H}}(\theta + \text{sgn}(\theta)2\pi)$ が常に成り立つ．ここで $\tilde{U}_{\text{em}}(\theta)$ において， θ は θ/Θ でスケールされていることから，アクシオン不安定性が一度生じると，ポテンシャル $\mathcal{V}_a(\theta)$ に特異点（実際は，印加可能な電場のエネルギーに比べて十分大きいポテンシャル障壁があるということ）がない限り大きなアクシオン場 ($|\theta|/\Theta \gg 1$) が誘起されることが期待できる．さらに，図 2.2 から，そのような大きな θ はアクシオン絶縁体中でほぼ完全な電場の遮蔽と小さな磁場の誘起が生じることを意味する．一方， $\mathcal{V}_a(\theta)$ がある $|\theta| (< 2\pi)$ で発散するとき，誘起される $|\theta|$ は $2\pi (\ll \Theta)$ 以下に制限されてしまう．この場合，図 2.2 から，磁場の誘起だけでなく電場の遮蔽効果は小さくなる．ここで定義 (2.6) まで遡ると，このポテンシャル $\mathcal{V}_a(\theta)$ に特異点がない（ある）ということと，符号変化可能な ϕ_4, ϕ_5 のゆらぎがどちらも可能（少なくともどちらか不可能）ということが対応している．実際， θ を 2π 以上変化させるためには図 1.1 において $\phi_4\phi_5$ 平面の原点の周りを 1 周する ϕ_4, ϕ_5 のゆらぎが必要である．したがって， $\theta = 0$ 近傍の性質だけで決まる臨界電場 E_0^{crit} が大栗・押川理論 [2] の結果と同じでもアクシオン不安定性後の電磁場のふるまいは全く異なることが予想される．

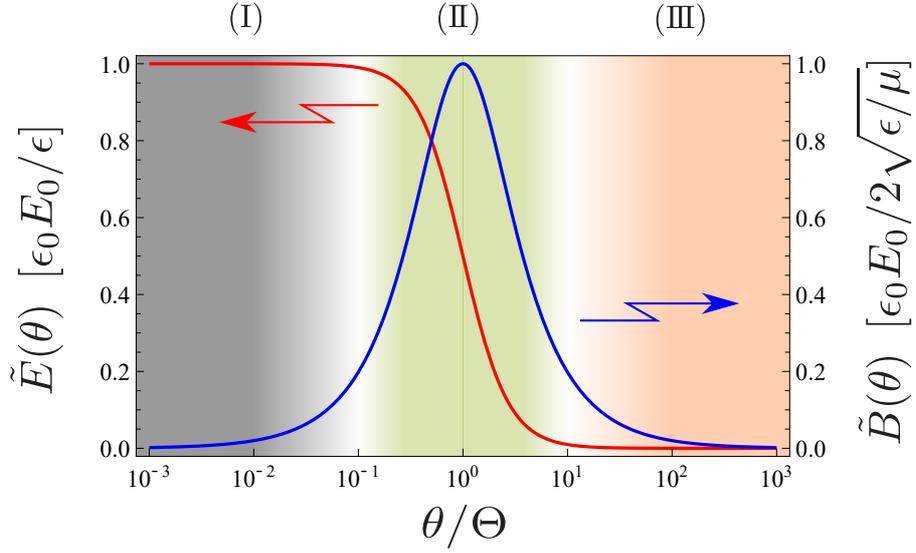


図. 2.2: アクシオン絶縁体の内部電場 $\tilde{E}(\theta)$ と磁束密度 $\tilde{B}(\theta)$ の静的解の θ 依存性. ここで $\tilde{E}(\theta)$ [$\tilde{B}(\theta)$] は式 (2.12) [式 (2.9)] で定義されている. 横軸の θ は式 (2.10) で定義されている Θ で規格化し, 縦軸の $\tilde{E}(\theta)$ と $\tilde{B}(\theta)$ それぞれの最大値で規格化した. 横軸は対数スケールになっていることに注意せよ.

2.3.3 モデルによる解析

この小節では, モデルのポテンシャルに基づいてアクシオン電磁場応答を解析する. ここでポテンシャル $\tilde{\mathcal{V}}_a(\theta)$ は存在するべきであるが, その関数形の詳細までは予想するのは難しい. しかしながら, 前の小節で明らかにしたように電磁場応答としては誘起されるアクシオン場の値が重要であり, それはすなわちポテンシャル $\mathcal{V}_a(\theta)$ に特異点がないかあるかが重要である. これは符号変化可能な ϕ_4, ϕ_5 のゆらぎがどちらも可能か少なくともどちらか不可能ということと対応していた. そこで, 本研究ではその 2 つに対応したモデルポテンシャルをそれぞれ導入する.

非磁性ゆらぎと磁性ゆらぎがどちらも符号変化可能なアクシオン絶縁体

ここでは符号変化可能な非磁性秩序 ϕ_4 と磁性秩序 ϕ_5 のゆらぎがどちらも存在するときのモデルについて考える. このときポテンシャル $\mathcal{V}_a(\theta)$ には特異点がない. 以下

で明らかになるが，このモデルは図 2.2 の領域 (III) に対応する．このとき，大きな値のアクシオン場の値 ($|\theta|/\Theta \gg 1$) が誘起され，遮蔽される電場 E は大きい誘起される磁束密度 B は小さい．

モデルポテンシャルとして，以下のものを考える．

$$V_a(\theta) = M_a^2(1 - \cos \theta),$$

これは 2π 周期を持ち，また n を任意の整数として $\theta = 2\pi n$ において最小値 0 となり， $\theta = 2\pi(n + 1/2)$ において最大値 $2M_a^2$ となる．臨界電場は (2.15) で与えられる．外部電場 E_0 の下では， $\tilde{\mathcal{H}}(\theta)$ の θ 依存性は以下で与えられる．

$$\tilde{\mathcal{H}}(\theta) = \tilde{U}_{\text{em}}(0) + \frac{M_a^2}{2} \left[-\frac{\theta^2}{1 + (\theta/\Theta)^2} \left(\frac{E_0}{E_0^{\text{crit}}} \right)^2 + 2(1 - \cos \theta) \right]. \quad (2.17)$$

図 2.3 に $E_0/E_0^{\text{crit}} = 0.9, 1.0, 1.1$ に対して $\tilde{\mathcal{H}}(\theta) - \tilde{\mathcal{H}}(0)$ を θ の関数としてプロットしたものを示す．ここで $\epsilon = \mu = 1$ を仮定し， $\Theta = 137\pi$ を使った [式 (2.10) を見よ]．図 2.3(a) に示されているような θ のスケールでは， $\tilde{\mathcal{H}}(\theta)$ は $\theta = 0$ で最大となるように見えるが，実際には図 2.3(b) に示すように $E_0 < E_0^{\text{crit}}$ ($E_0 > E_0^{\text{crit}}$) において $\theta = 0$ で極小 (最大) となる．図 2.3(a) に示されるような急激なピーク (式 (2.17) の [] 中の第 1 項目に由来) のため， E_0 が E_0^{crit} を超えてアクシオン不安定性が生じると $|\theta|$ は Θ に比べて十分大きな値になる．この系の最もエネルギーの低くなる点は $\theta = \pm\infty$ であるが，そこに達する前にエネルギーの極小点が無限個存在する．そこで最初の極小点 θ_{\min} を以下のように推定する．まず $\partial\tilde{\mathcal{H}}(\theta)/\partial\theta \Big|_{\theta=\theta_{\min}} = 0$ から，以下を得る．

$$\Theta \left(\frac{E_0}{E_0^{\text{crit}}} \right)^2 f(\theta_{\min}) = \sin \theta_{\min}, \quad (2.18)$$

ここで

$$f(\theta_{\min}) = \frac{(\theta_{\min}/\Theta)}{[1 + (\theta_{\min}/\Theta)^2]^2}$$

とした．式 (2.18) 中の左辺にある Θ は右辺と比べて十分に大きい [Θ の典型的な値は 10^3 のオーダーである] ので， $f(\theta_{\min})$ は 1 に比べて十分に小さい必要がある．このとき $|\theta_{\min}|/\Theta \gg 1$ ， $f(\theta_{\min}) \simeq (\theta_{\min}/\Theta)^{-3}$ となる．したがって， θ を大きくしていくに

つれて式 (2.18) の左辺が 1 まで小さくなる時, 式 (2.18) の最初の (正の) 解が現れる. すなわち,

$$\theta_{\min} \simeq \Theta^{4/3} \left(\frac{E_0}{E_0^{\text{crit}}} \right)^{2/3}. \quad (2.19)$$

この θ_{\min} において アクシオン絶縁体中の電磁場 B と E は式 (2.11) と (2.12) から次のように評価できる.

$$B = \tilde{B}(\theta_{\min}) \simeq \Theta^{-\frac{1}{3}} \frac{\epsilon_0 E_0^{\text{crit}}}{\sqrt{\epsilon/\mu}} \left(\frac{E_0}{E_0^{\text{crit}}} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2.20)$$

$$E = \tilde{E}(\theta_{\min}) \simeq \Theta^{-\frac{2}{3}} \frac{\epsilon_0 E_0^{\text{crit}}}{\epsilon} \left(\frac{E_0}{E_0^{\text{crit}}} \right)^{-\frac{1}{3}}, \quad (2.21)$$

これは非線形電磁気効果を意味する. 図 2.4 にアクシオン絶縁体中に誘起されたアクシオン場 θ と電磁場 E, B を印加電場 E_0 の関数でプロットしたものを示す. $E_0 = E_0^{\text{crit}}$ で θ が突然大きな値に増加し, それに伴い電場 E のほぼ完全な遮蔽が起こっていることがわかる. また, 磁束密度 B の誘起も生じているが値は非常に小さいことがわかる. これらは図 2.2 において誘起されたアクシオン場の値が領域 (III) に位置することからもわかる.

$\tilde{H}(\theta)$ は θ の偶関数であるから, $\theta = -\theta_{\min}$ も式 (2.18) の解である. アクシオン場 θ の符号は自発的に決まる. 言い換えれば, アクシオン不安定性によって時間反転対称性が自発的に破れる. それに伴って, 誘起される磁場の方向も決まる.

磁性ゆらぎのみが許されるアクシオン絶縁体

ここでは, 非磁性秩序 $\phi_4 = \tilde{\rho}(0) > 0$ に固定し, 反強磁性秩序 ϕ_5 だけがゆらぐことができるモデルを考える. このときポテンシャル $\mathcal{V}_a(\theta)$ に特異点が現れる. 以下で明らかになるように, この場合小さなアクシオン場の値 ($|\theta|/\Theta \ll 1$) しか誘起できず, 図 2.2 の領域 (I) に対応する. $\phi_4 = \tilde{\rho}(\theta) \cos \theta$ が定数 $\tilde{\rho}(0)$ となることで, $\phi_5 = \tilde{\rho}(\theta) \sin \theta = \tilde{\rho}(0) \tan \theta$ となる. そのとき, 以下のような ϕ_5 の 2 次のポテンシャルを仮定する.

$$\mathcal{V}_a(\theta) = \frac{M_5^2}{2} \phi_5^2 = \frac{M_a^2}{2} \tan^2 \theta, \quad (2.22)$$

ただし, $M_a^2 = \bar{\rho}(0)^2 M_5^2$ で与えられる. 式 (2.22) は, $\theta = 0$ で最小値を持ち, 臨界電場は (2.15) で与えられる. また $|\theta| = \pi/2$ で無限に高いポテンシャル障壁が生じるため, 誘起される $|\theta|$ の値は高々 $\pi/2$ である. エネルギー密度 $\tilde{\mathcal{H}}(\theta)$ は $E_0 > E_0^{\text{crit}}$ であっても $|\theta| \ll \Theta$ なので, 以下のように近似的に与えられる.

$$\tilde{\mathcal{H}}(\theta) \simeq \tilde{\mathcal{U}}_{\text{em}}(0) + \frac{M_a^2}{2} \left[-\theta^2 \left(\frac{E_0}{E_0^{\text{crit}}} \right)^2 + \tan^2 \theta \right]. \quad (2.23)$$

図 2.5 に, $E_0/E_0^{\text{crit}} = 0.9, 1.0, 1.1$ に対して $\tilde{\mathcal{H}}(\theta) - \tilde{\mathcal{H}}(0)$ を θ の関数としてプロットしたものを示す. $E_0 > E_0^{\text{crit}}$ のとき, $\tilde{\mathcal{H}}(\theta)$ は有限の値の θ に 2 つの最小値を持ち, そのうちどちらかを選ぶことで反強磁性秩序 ϕ_5 が生じ時間反転対称性を自発的に破る. 式 (2.23) の最小値の位置を数値的に求めたものを図 2.6(a) に示す. 対応する E と B は式 (2.12) と式 (2.11) から得たものを図 2.6(b) と 図 2.6(c) にそれぞれ示す. 特に, $E_0/E_0^{\text{crit}} \rightarrow \infty$ の極限では $\theta = \pm\pi/2$ で発散するポテンシャル項のために θ は $\pi/2$ か $-\pi/2$ に近づく. この極限ではアキシオン絶縁体内部の B と E は E_0 に線形である.

$$\lim_{E_0 \rightarrow \infty} B = \tilde{B} \left(\pm \frac{\pi}{2} \right) \sim \pm 3.6 \times 10^{-3} \frac{\mu}{\epsilon} \epsilon_0 E_0, \quad (2.24)$$

$$\lim_{E_0 \rightarrow \infty} E = \tilde{E} \left(\pm \frac{\pi}{2} \right) \sim \left(1 - 1.3 \times 10^{-5} \frac{\mu}{\epsilon} \right) \frac{\epsilon_0 E_0}{\epsilon}. \quad (2.25)$$

式 (2.25) より E は明らかに微小にしか遮蔽されない. 大栗・押川理論のような $E_0 > E_0^{\text{crit}}$ での電場遮蔽効果はこのモデルでは起こらない. ϕ_4 が固定されている絶縁体では大きな θ の誘起は制限されているからである.

2.3.4 考察

電磁場の値とアキシオン場の値の関係

2.3.2 節では磁束密度 B と電場 E はアキシオン場の θ の関数としてそれぞれ式 (2.11) と式 (2.12) で与えられることを明らかにした. これに関して, ここでは物理的なメカニズムからの理解を深める. ただし θ の値は固定して考える.

まず初めに $\tilde{E}(\theta)$ と $\tilde{B}(\theta)$ を構成方程式 (1.22), (1.23) と境界条件 (2.4) から考察する.

1. 印加電場 E_0 によってアキシオン絶縁体の内部に電場 E が境界条件 (2.4) を満たすように生じる.

2. 電場 E は式 (1.23) を通して磁化 M_θ を誘起する.
3. 磁化 M_θ は磁束密度 B の役割をする (磁場 $H = 0$).
4. 磁束密度 B は式 (1.22) を通して電気分極 P_θ を誘起する.
5. 電気分極 P_θ は印加電場 E_0 の一部を遮蔽し, 誘電率を増加させる.

この過程を取束するまで繰り返すことで, 式 (2.11) と (2.12) がその解として得られる. このように $\tilde{E}(\theta)$ と $\tilde{B}(\theta)$ にはアクシオンを介した電磁気効果のフィードバック効果が含まれた結果となっている.

上記の考察から $M_\theta \propto (\theta/\Theta)E$, $P_\theta \propto (\theta/\Theta)^2E$ というのが明らかである. これを踏まえて次に $\tilde{E}(\theta)$ と $\tilde{B}(\theta)$ の $|\theta|/\Theta$ の値に対するふるまいの違いについて考察する.

領域 (I) $|\theta| \ll \Theta$: アクシオン場 θ が小さすぎて電磁気効果にあまり寄与していない.

実際, M_θ, P_θ が非常に小さいことがわかる. $\tilde{E}(\theta)$ はほぼ一定値 $\epsilon_0 E_0/\epsilon$ をとり, 磁束密度 $\tilde{B}(\theta)$ は微小にしか誘起されない.

領域 (II) $|\theta| \sim \Theta$: 領域 (I) と領域 (III) の中間の領域にあたり, M_θ, P_θ が印加電場程度の大きさになっている.

領域 (III) $|\theta| \gg \Theta$: アクシオン場 θ が大きすぎて電場の遮蔽が大きすぎる. 実際, $(\theta/\Theta)^2$ に比例する P_θ を大きくすることで内部の電場 E を非常に小さくでき, その結果 M_θ も小さくなる.

特に領域 (III) のように, アクシオン場 θ を大きくすれば印加電場 E_0 によって大きな磁束密度を誘起できるという素朴な考えとは裏腹に, 実際はアクシオンを介した電磁気効果のフィードバック効果からくる電場の遮蔽効果によって内部では電場が大きくなれずその結果磁束密度も大きくできないというのは注目に値する.

実験でアクシオン不安定性現象を測定しやすい系

ここでは, 実験でアクシオン不安定性現象を測定しやすい系について考察する. ここでは特に以下の 2 点に着目する.

1. アクシオン電磁気効果を大きくできる.
2. 臨界電場 E_0^{crit} を小さくできる.

まず, アクシオン電磁気効果を大きくするためには, アクシオン場を大きく誘起できればよい. そのためにはポテンシャルに特異点がないことが重要で符号変化可能な非磁性秩序 ϕ_4 と磁性秩序 ϕ_5 のゆらぎがどちらも存在する系を用意すればよい. ϕ_4 と ϕ_5 が元々共に小さければ, そのゆらぎがあまり大きくなくても ϕ_4 と ϕ_5 の符号を変化可能である. 次に, 臨界電場 E_0^{crit} を小さくすることに関しては式 (2.15) から $E_0^{\text{crit}} \propto M_a = \tilde{\rho}(0)M_5$ より $\tilde{\rho}(0)$ と M_5 を小さくすればよい. ここで $\tilde{\rho}(0)$ は初期状態におけるポテンシャルの最小値がある ϕ_4 の値であり, それが小さいということは $\phi_4 = 0$ 近傍, すなわちトポロジカル量子臨界点の近傍である. また, M_5 は $M_5^2 = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}_a(\theta)}{\partial \phi_5^2} \right|_{\phi_5=0}$ で与えられることから反強磁性秩序相に対する量子臨界点の近傍では M_5 を小さくできる. 以上をすべて両立する系として図 1.1 において, $\phi_4\phi_5$ 平面の原点付近のアクシオン絶縁体を想定するとよい. そこでは臨界電場を小さくでき, アクシオン場も大きく誘起できる.

表面電荷

ここでは, 電場が遮蔽される現象を電気分極ではなく表面電荷を使って理解する. 式 (1.24) は有限の電気分極 P_θ に存在すると $\nabla \cdot P_\theta$ に比例した電荷密度 ρ_θ が生じることと等価であることを示している. 本研究ではアクシオン絶縁体のバルクでは電気分極 P_θ は空間的に一様と仮定しているため電荷密度 $\rho_\theta = 0$ となるが, アクシオン絶縁体と通常の絶縁体との界面では局在した有限の電荷密度 ρ_θ が存在する. この電荷密度が印加電場を遮蔽している. ここで初期状態 ($E_0 = 0$) でアクシオン場の値が 0 であったアクシオン絶縁体がアクシオン不安定性後 ($E_0 > E_0^{\text{crit}}$) で θ だけ誘起されたとしたときバルクから絶縁体の界面に移動した電荷量を評価する. 界面に垂直方向を x とし, $x > 0$ にアクシオン絶縁体, $x < 0$ に通常の絶縁体, $x = 0$ に界面があるとする. 各絶縁体は半無限に大きく, 界面は 1 つだけを考えているとする. このとき, 式

(1.24) からバルクから絶縁体の界面に移動した表面電荷密度 $Q(\theta)$ は次のようになる.

$$\begin{aligned}
Q(\theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho_\theta(x) \\
&= - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \partial_x P_\theta(x) \\
&= -P_\theta(x = +\infty) \\
&= -\frac{\alpha}{4\pi^2} \theta \tilde{B}(\theta) \\
&= -\frac{(\theta/\Theta)^2}{1 + (\theta/\Theta)^2} \frac{\epsilon_0 E_0}{4\pi}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

ここで途中 $P_\theta(x = -\infty) = 0$ を使った. $(\theta/\Theta) \rightarrow \pm\infty$ のとき印加電場を完全遮蔽するだけ表面電荷密度 $Q(\theta)$ ができていることが確認できる (式 (2.26) 中の 4π は cgs ガウス単位系由来のものであることに注意せよ).

2.3.5 大栗・押川理論とその対応関係

ここでは比較のために, 大栗・押川理論のモデルについて述べる. 彼らは以下のモデルポテンシャルを考慮した.

$$V_a(\theta) = \frac{M_a^2}{2} \theta^2,$$

これは $\theta = 0$ で最小値 0 を持つ. アクシオン絶縁体に外部電場 E_0 を印加すると $\tilde{\mathcal{H}}(\theta)$ は以下で与えられる.

$$\tilde{\mathcal{H}}(\theta) = \tilde{U}_{\text{em}}(0) + \frac{M_a^2 \Theta^2}{2} \left[-\frac{(\theta/\Theta)^2}{1 + (\theta/\Theta)^2} \left(\frac{E_0}{E_0^{\text{crit}}} \right)^2 + (\theta/\Theta)^2 \right]. \tag{2.27}$$

図 2.7 に式 (2.27) をプロットしたものを示す. このとき $\partial \tilde{\mathcal{H}}(\theta) / \partial \theta = 0$ は

$$\frac{1}{\theta/\Theta} \left[\frac{1}{(\theta/\Theta)^2} - \left(\left| \frac{E_0}{E_0^{\text{crit}}} \right| - 1 \right) \right] = 0.$$

臨界電場以上では $\tilde{\mathcal{H}}(\theta)$ は以下で与えられる 2 つの最小値がある.

$$\theta = \pm \Theta \sqrt{\left| \frac{E_0}{E_0^{\text{crit}}} \right| - 1}. \tag{2.28}$$

式 (2.28) に式 (2.11) と (2.12) を代入すると誘起された B と E が得られる.

$$B = \pm \frac{\epsilon_0 E_0^{\text{crit}}}{\sqrt{\epsilon/\mu}} \sqrt{\left| \frac{E_0}{E_0^{\text{crit}}} \right| - 1}, \quad (2.29)$$

$$E = \frac{\epsilon_0 E_0^{\text{crit}}}{\epsilon}. \quad (2.30)$$

ただし B の符号と θ の符号は複合同順である. 図 2.8 (a)-(c) に誘起された θ , E , B を示す. このモデルは図 2.2 の領域 (II) に対応する. 本文で考慮した他のモデルと比較して, 大栗・押川理論のモデルは大きな磁束密度が誘起される. しかし, そこでの解析の正当性は明らかではない. 大栗・押川理論のモデルのポテンシャルは θ の 2 次までしか考慮していないため, 高次の項は無視している. しかしながら, 図 2.8 (a) により誘起された θ は $\theta/\Theta \sim O(1)$ となり, もはやポテンシャルの高次の項は無視できない. 実際, もし θ のゆらぎが磁性ゆらぎのみに起因していたら我々の 2.3.3 における解析結果から誘起されるアクシオン場はポテンシャルの高次の項のせいで抑制されることが示唆される.

2.4 外部磁場の印加に対する応答

2.4.1 セットアップ

基本的には電場を印加する場合と同じ. アクシオン絶縁体と通常の絶縁体の接合系を考える (図 2.1). 電場を印加する代わりに磁束密度を印加する.

2.4.2 解析計算

界面における境界条件は式 (2.4) と (2.5) で与えられる. このとき, ハミルトニアン密度 (2.7) を境界条件 (2.5) のもとで E に関して最小化することで解 $E = 0$ を得る. この解を使って式 (2.13) に対応するハミルトニアン密度を以下のように書くことができる:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{B_0^2}{8\pi\mu} + \mathcal{V}_a(\theta).$$

このとき、誘起されるアクシオン場 θ は以下を解くことで得られる。

$$0 = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathcal{V}_a}{\partial \theta},$$

したがって、アクシオン不安定性は生じない。また、境界条件 (2.4) から $\epsilon_0 E_0 = \frac{\alpha}{\pi} \theta B_0$ となり、また境界条件 (2.5) から $H = \mu^{-1} B_0$ となりアクシオン絶縁体中で電気分極 $P_\theta = \frac{\alpha}{\pi} \theta B_0$ は生じる。

2.5 第 2 章のまとめ

2.5.1 アクシオンのポテンシャル

- アクシオンのポテンシャルは絶縁体の質量を与える 2 種類の秩序場に対するポテンシャルから導出できる。

2.5.2 電場を印加する場合

- アクシオン絶縁体と通常の絶縁体の接合系において通常の絶縁体側から電場を印加したときの、アクシオン絶縁体の内部の電磁場を求めた。
- 電磁場をスケールされたアクシオン場 θ/Θ の関数として得られた。そこにはアクシオンを介したフィードバックの効果が含まれていた。
- 一般に、電場と磁束密度を平行に印加すれば動的アクシオンがつくれるのだが、アクシオン不安定性現象は電場を印加するだけで磁束密度を電場と平行に自発的につくって動的アクシオンを生じさせる現象である。
- 誘起されるアクシオン場 θ は秩序場のポテンシャルに大きく依存する。
- 符号変化可能な 2 つの秩序場のゆらぎがどちらも可能ならアクシオン場は $|\theta|/\Theta \geq 1$ と大きく誘起される。このときアクシオンを介した電磁気効果のフィードバック効果からくる電場の遮蔽効果によって内部では電場が大きくなれずその結果磁束密度も大きくできない。

- 符号変化可能な2つの秩序場のゆらぎが少なくともどちらか不可能ならならアクシオン場は $|\theta|/\Theta \ll 1$ とあまり誘起されない。このときアクシオンを介した電磁気効果のフィードバック効果からくる電場の遮蔽効果は小さく磁束密度も大きくできない。
- 実験では図 1.1 において、 $\phi_4\phi_5$ 平面の原点付近のアクシオン絶縁体を想定するとよい。そこでは臨界電場を小さくでき、アクシオン場も大きく誘起できる。

2.5.3 磁束密度を印加する場合

- アクシオン絶縁体と通常の絶縁体の接合系において通常の絶縁体側から磁束密度を印加したときの、アクシオン絶縁体の内部の電磁場を求めた。
- アクシオン不安定性は生じなかった。
- 初期状態で $\theta \neq 0$ なら、電気分極 $P_\theta = \frac{\alpha}{4\pi^2}\theta B_0$ だけ生じる。

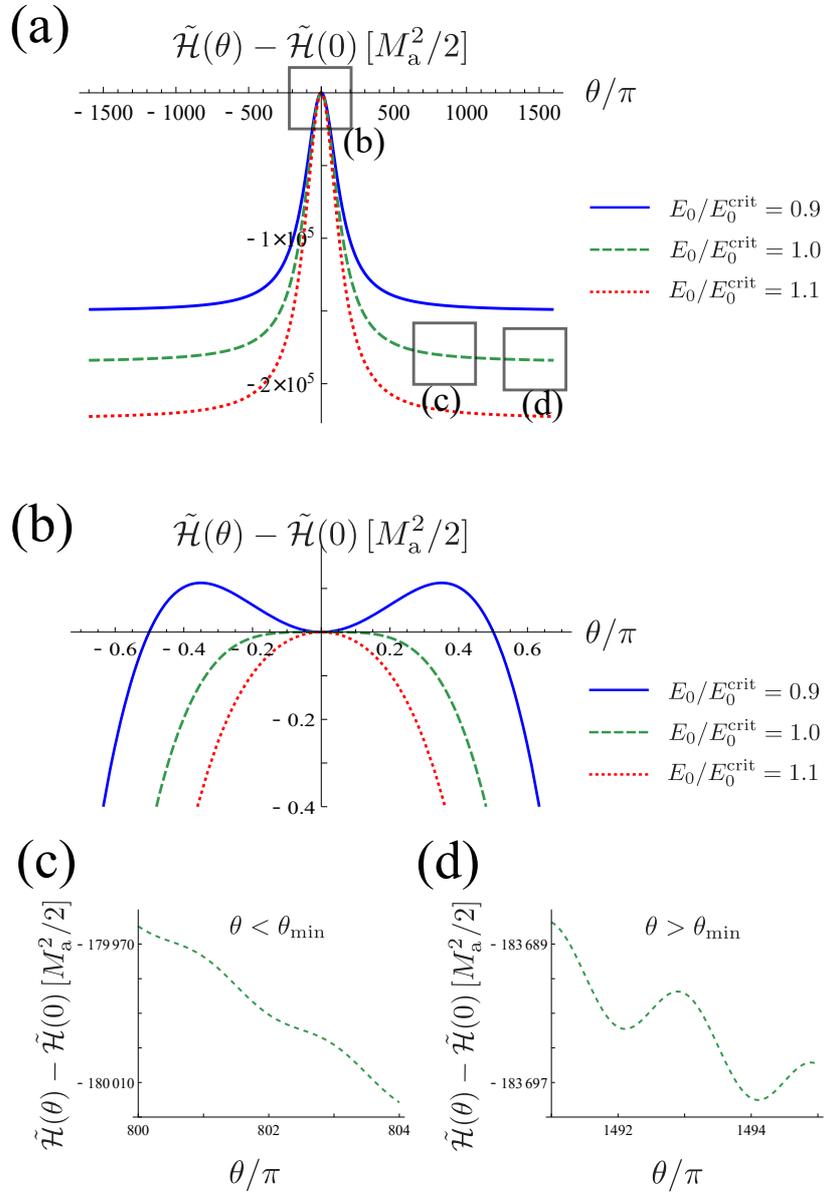


図. 2.3: 非磁性ゆらぎと磁性ゆらぎがどちらも符号変化可能なアクシオン絶縁体のモデルにおけるエネルギー密度 $\tilde{\mathcal{H}}(\theta)$ [式 (2.17)]. アクシオン絶縁体は $\epsilon = \mu = 1$ を仮定し, $\Theta = 137\pi$ を使った. (a) $\tilde{\mathcal{H}}(\theta)$ の θ 依存性. (b)–(d) に (a) で四角で囲った部分の拡大図を示す. (b) $E_0 = E_0^{\text{crit}}$ で $\theta = 0$ の点は極小値から最大値に変化する. (c) $\theta < \theta_{\min}$. 極小値はまだ現れない. (d) $\theta > \theta_{\min}$. 極小値が周期的に表れている. ただし, θ_{\min} は最初に表れる極小値における θ . エネルギーの散逸が大きい極限では $E_0 > E_0^{\text{crit}}$ において誘起されるアクシオン場は $\theta = \theta_{\min}$ となる.

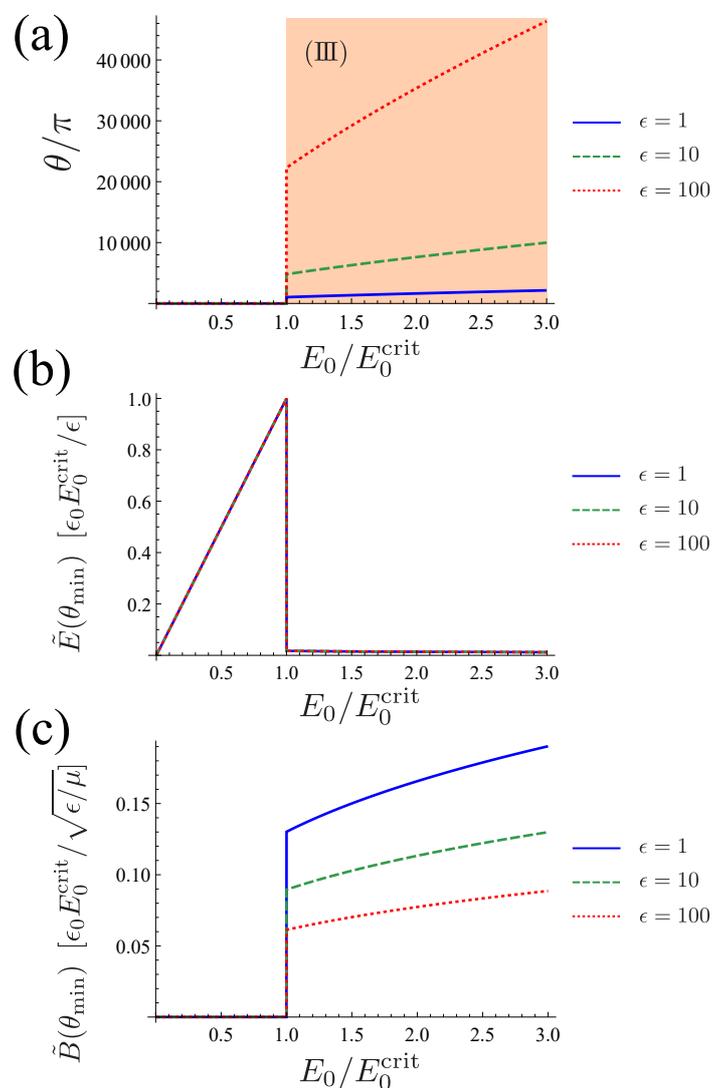


図. 2.4: 非磁性ゆらぎと磁性ゆらぎが同時に存在するモデルにおける外部電場 E_0 が印加された時の アクシオン絶縁体中の (a) アクシオン場 θ , (b) 内部電場 E , (c) 磁束密度 B . ここで, $E_0 > E_0^{\text{crit}}$ におけるこれらの値は式 (2.19), (2.21), (2.20) でそれぞれ与えられる. $\mu = 1$ と $\epsilon = 1, 10, 100$ とした. このとき式 (2.10) から, 対応する Θ の値はそれぞれ $137\pi, 433\pi, 1370\pi$ となる. 臨界電場以上では大きなアクシオン場が誘起され [図 2.2 の領域 (III)], それに伴い電場のほぼ完全な遮蔽と, 磁束密度の小さな誘起が生じる. 自著論文 [4] より転載

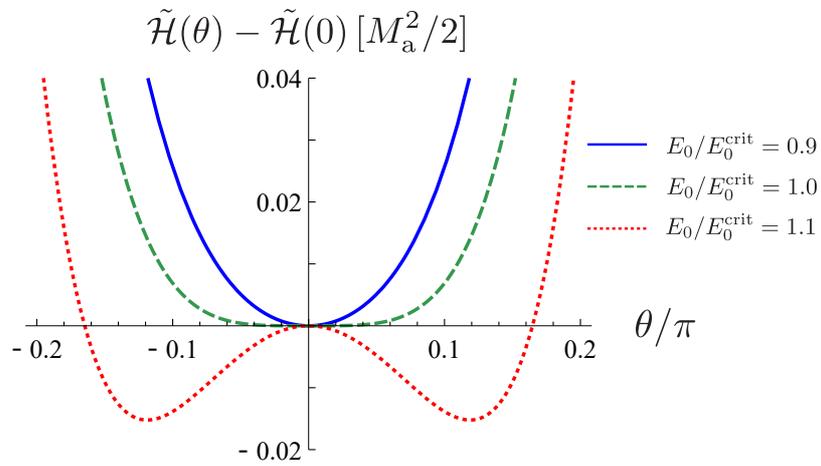


図. 2.5: 磁性ゆらぎのみのモデルにおけるハミルトニアン密度 $\mathcal{H}(\theta)$ [式 (2.23)]. $\theta = 0$ の点は $E_0 = E_0^{\text{crit}}$ で極小値から最大値に変化し, $E_0 > E_0^{\text{crit}}$ で2つの最小値が生じる. ポテンシャル (2.22) は $\theta = \pm\pi/2$ で発散するため, その最小値の位置は $|\theta| < \pi/2$ に制限され, $E_0/E_0^{\text{crit}} \rightarrow \infty$ で $|\theta| = \pi/2$ に漸近する.

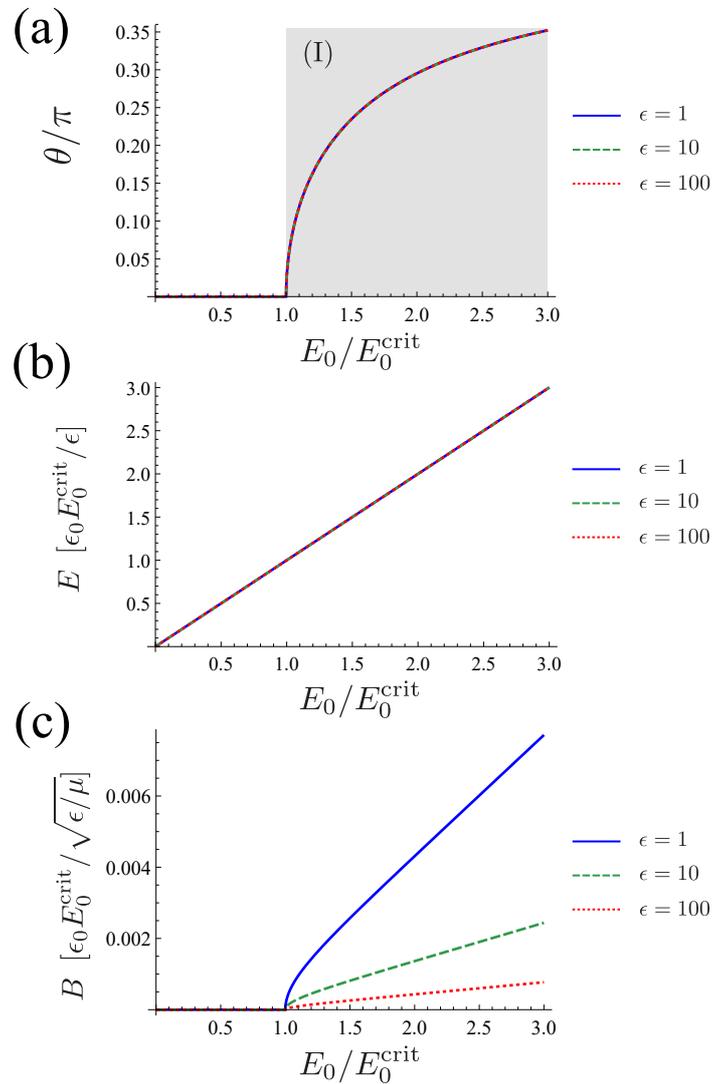


図. 2.6: 磁性ゆらぎのみ存在するモデルにおける外部電場 E_0 が印加された時の アクシオン絶縁体中の (a) アクシオン場 θ , (b) 内部の電場 E , (c) 磁束密度 B . ここで, $E_0 > E_0^{\text{crit}}$ におけるこれらの値は θ は式 (2.23) の最小値を数値的に計算し, E と B は式 (2.12) と (2.11) からそれぞれ与えられる. $\mu = 1$ と $\epsilon = 1, 10, 100$ とした. このとき式 (2.10) から, 対応する θ の値はそれぞれ $137\pi, 433\pi, 1370\pi$ となる. $E_0/E_0^{\text{crit}} \rightarrow \infty$ の極限では $|\theta|$ は $\pi/2$ になる. この極限における E と B は式 (2.25) と (2.24) でそれぞれ与えられる. 臨界電場以上で誘起されるアクシオン場は θ に比べて十分小さく [図 2.2 の領域 (I)], それに伴い電場の遮蔽効果や磁束密度の誘起の効果は小さい. 自著論文 [4] より転載

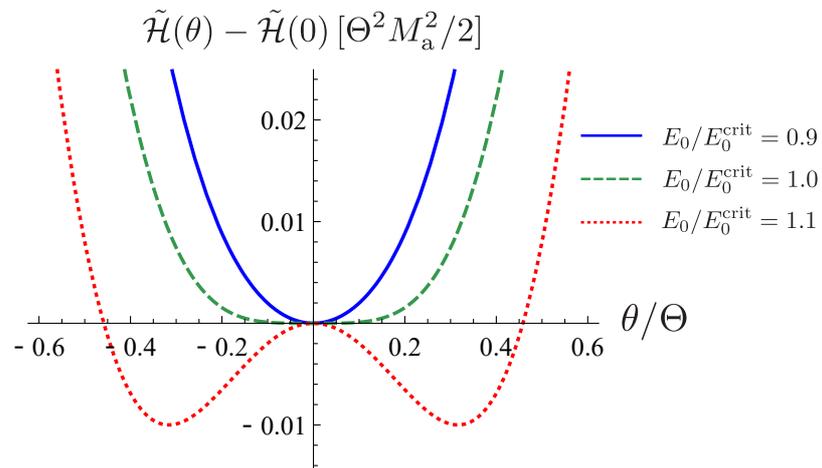


図. 2.7: 大栗・押川理論のモデル [2] に基づいた $\tilde{\mathcal{H}}(\theta)$.

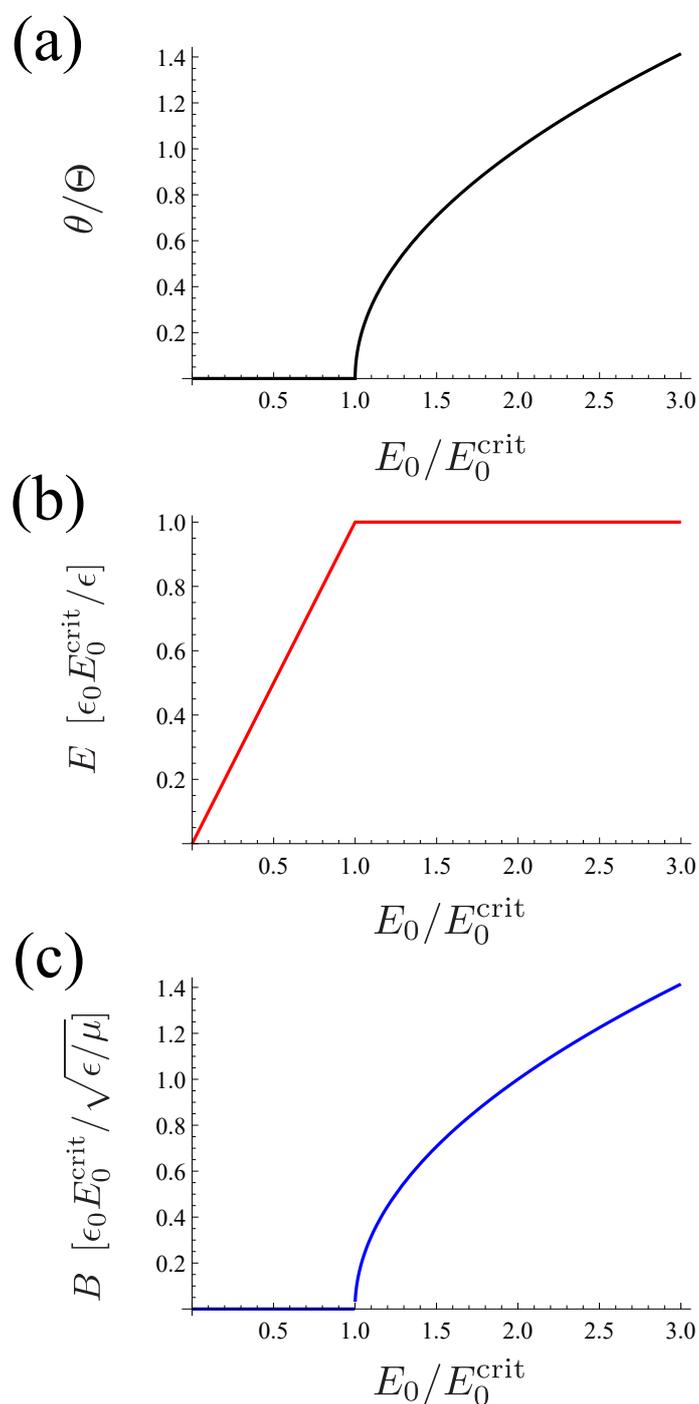


図. 2.8: 大栗・押川理論のモデル [2] における外部電場 E_0 が印加された時の アクション絶縁体中の (a) アクション場 θ , (b) 内部の電場 E , (c) 磁束密度 B . ここで, $E_0 > E_0^{\text{crit}}$ におけるこれらの値は式 (2.28), (2.30), (2.29) からそれぞれ与えられる. ϵ と μ 依存性はすべてスケーリング因子に含まれている: θ に対しては Θ , E に対しては $\epsilon_0 E_0^{\text{crit}}/\epsilon$, B に対しては $\epsilon_0 E_0^{\text{crit}}/\sqrt{\epsilon/\mu}$ である. 臨界電場以上では, 内部の電場は定数 $\epsilon_0 E_0^{\text{crit}}/\epsilon$ になり, 大きな磁束密度が誘起される.

第3章 磁場駆動の動的アクシオンによるカイラル磁気効果

この章では外部磁場によって強制的に反強磁性秩序に時間的なゆらぎをつくったときに電磁場はどのような応答を示すのかを明らかにする。反強磁性の大きさが変化するのでアクシオン場にも変化が生じる。磁場を印加しているので、これらによってカイラル磁気効果という電流が生じるが、それを観測する簡便な方法を提案するというのがこの章の目的である。

3.1 研究目的

3.1.1 カイラル磁気効果

今、アクシオン場の空間変化の効果は無視できる、すなわち $\nabla\theta = \mathbf{0}$ とする。このときアクシオンによる電流の式 (1.25) は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_\theta &= c\partial_0\mathbf{P}_\theta + c\nabla \times \mathbf{M}_\theta \\ &= \frac{\alpha c}{4\pi^2}(\partial_0\theta)\mathbf{B} \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここで式 (3.1) はカイラル磁気効果と呼ばれ、動的アクシオン現象の1つとして素粒子・原子核物理から物性物理の分野で興味を持たれている [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14].

3.1.2 研究動機

第2章では外場として磁束密度を印加しても自発的な動的アクシオン現象（アクシオン不安定性）は生じないことを明らかにした。しかし、磁束密度は磁性秩序と相互

作用することができる。アクシオン場 θ は反強磁性秩序 ϕ_5 と図 1.1 のように関連しているから磁束密度を印加することで強制的に動的アクシオン場をつくり出せると考えられる。このとき磁束密度を印加していることから式 (3.1) よりカイラル磁気効果が生じると考えられる。しかし、 $(\partial_0\theta)$ がゼロとなるとカイラル磁気効果もゼロになることから定常電流を測定するのは難しい。したがって、本研究ではこのカイラル磁気効果の簡便な測定方法の提案を目的とする。

3.2 セットアップ

第2章の場合と同様にアクシオン絶縁体と通常の絶縁体の接合系を考える (図 2.1)。ここでアクシオン絶縁体における誘電率、透磁率、アクシオン場の値をそれぞれ ϵ , μ , θ とし、また、アクシオン絶縁体の内部における電場、磁束密度、磁場の値をそれぞれ E , B , H と表すことにする。同様にして通常の絶縁体における誘電率、透磁率、アクシオン場の値をそれぞれ ϵ_0 , μ_0 , θ_0 と、また、通常の絶縁体における電場、磁束密度の値をそれぞれ E_0 , B_0 と表すことにする。ここで以下のようなセットアップを考える：

- 各絶縁体はどちらも半無限系とする。
- 通常の絶縁体において、アクシオン場の値は常に $\theta_0 = 0$ に固定されているものとする。
- 電磁場の境界条件として、次のような関係式が成り立つものとする：

$$\begin{aligned}\epsilon_0 E_0 &= \epsilon E + \frac{\alpha}{\pi} \theta B, \\ B_0 &= B = \mu H + \frac{\alpha}{\pi} \mu \theta E\end{aligned}$$

ここで $\theta_0 = 0$ を使った。

- 非磁性秩序・反強磁性秩序の値がそれぞれ ϕ_4, ϕ_5 で与えられたとき、アクシオン場 θ は式 (1.11) と式 (1.12) で与えられるとする。

- 印加する外場として、絶縁体の界面に対して垂直でかつ反強磁性体の磁化容易軸方向に通常の絶縁体から磁束密度 B_0 を印加するものとする。
- アクシオン絶縁体において、スピントリプル転移する磁束密度の値を B_0^{sf} とする。
- スピントリプルが始まった時刻を $t = 0$ とする。
- 時刻 $t \geq 0$ では印加する磁束密度の大きさが $B_0 = B_0^{\text{sf}}$ とする。
- 時刻 $t \geq 0$ でアクシオン絶縁体中の非磁性秩序・反強磁性秩序の値がそれぞれ $\phi_4, \phi_5(t)$ で与えられるとする。
- 時刻 $t \rightarrow +\infty$ でアクシオン絶縁体中の反強磁性秩序の値が $\phi_5(+\infty) = \text{const.}$ とする。
- スピントリプル後に生じた有限の磁化は B_0^{sf} に比べて十分小さくて無視できるとする。

このとき印加する磁束密度によってスピントリプルする瞬間には動的アクシオンと磁束密度が同時に存在することからカイラル磁気効果が生じることが予想される。次の節ではこのときの電流値や電荷の移動量などを解析する。

3.3 カイラル磁気効果の評価

3.3.1 解析計算

第2章の2.4節で明らかになったように、時刻 $t(\geq 0)$ でアクシオン場の値が $\theta(t) = \tan^{-1}(\phi_5(t)/\phi_4)$ のアクシオン絶縁体に対して、磁束密度 B_0^{sf} が印加されているとき、以下の値の電気分極が生じている。

$$P_\theta(t) = \frac{\alpha}{4\pi^2} \theta(t) B_0^{\text{sf}}. \quad (3.2)$$

また、このとき式 (3.1) よりカイラル磁気効果の電流密度 $J_\theta(t)$ は以下で与えられる。

$$J_\theta(t) = \frac{\alpha}{4\pi^2} [\partial_t \theta(t)] B_0^{\text{sf}} \quad (3.3)$$

今、磁化による磁束密度の増加を無視していることに注意せよ。ここでカイラル磁気効果による電流密度の時刻変化は $\theta(t)$ の時間発展に伴って一般には複雑な発展をすることが考えられる。ここで単位断面積あたりのカイラル磁気効果によって移動した電荷量を評価する。これは時刻 $t = 0$ から $t = +\infty$ の間の電流密度 $J_\theta(t)$ の積分値で与えられる。電流密度と電気分極の関係式 $J_\theta(t) = \partial_t P_\theta(t)$ から以下が成り立つことに注意する。

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} dt J_\theta(t) &= P_\theta(+\infty) - P_\theta(0) \\ &= \frac{\alpha}{4\pi^2} [\theta(+\infty) - \theta(0)] B_0^{\text{sf}} \end{aligned}$$

これが意味することはカイラル磁気効果によって移動した電荷量はスピンスリップ時と緩和後の電気分極の差の2値だけで与えられるということである。

3.3.2 モデルによる解析

3.3.1 節の行った解析に対してモデル解析を行う。印加磁場による反強磁性秩序の時間発展が以下で与えられるとする。

$$\phi_5(t) = \phi_5(0)e^{-t/\tau} \quad (3.4)$$

このとき

$$s(t) \equiv \frac{\phi_5(0)}{\phi_4} e^{-t/\tau}$$

とおくと、アクシオン場やその時間微分したものは以下のように計算できる。

$$\theta(t) = \tan^{-1}[s(t)] \quad (3.5)$$

$$\partial_t \theta(t) = -\frac{1}{\tau} \frac{s(t)}{1+s^2(t)} \quad (3.6)$$

また、 $P_\theta(t)$ や $J_\theta(t)$ はそれぞれ (3.2) と (3.3) に (3.5) や (3.6) を代入したものとして与えられる。図3.1にカイラル磁気効果の時間変化を示す。図中の (a),(b),(c) は $\phi_5(t)$ が式 (3.4) で与えられた時の $\phi_5(t)$, $P_\theta(t)$, $J_\theta(t)$ をそれぞれプロットしたものである。(c) の色で塗られた領域の面積が単位断面積あたりのカイラル磁気効果によって移動した電荷量に対応する。ここでは $\phi_4 > 0$ かつ $\phi_5(0)/\phi_4 = 1$ とした。

3.3.3 考察

3.4 第3章のまとめ

動的アクシオンが引き起こす、カイラル磁気効果の研究を行った。アクシオンの相互作用を仮定すると、絶縁体にある閾値以上の外部電場を印加すると、系が不安定性を示す。アクシオンのポテンシャルを微視的な観点から考察し、不安定性後の電磁場の値を評価し直した。絶縁体の2つの質量項の値がアクシオンと関係があることを考慮してポテンシャルに反映した。具体的には2つの質量項のゆらぎやすさのパターンでアクシオンのポテンシャルが大きく異なり、その結果、不安定性後に誘起されるアクシオン場や電磁場に大きな差が現れることを明らかにした。また、途中の計算手法を工夫することにより、アクシオン不安定性の理論においてアクシオン場の値 θ は $\Theta_0 137\pi$ でスケールされており、したがってアクシオンの効果を大きくしたい場合には $\theta \geq \Theta_0$ が必要になってくることを明らかにした。また同時に、どのように内部の電磁場が決まっているのかや、なぜ不安定性が生じるのかという点に関しても、本質的に電磁場の交差相関効果の非線形効果によるものということも明らかにした。さらに実験でこの現象を測定しやすい系としてトポロジカル相転移点の近傍の系を提案した。この系では臨界電場を小さくでき、また誘起されるアクシオン場を大きくできる可能性がある。

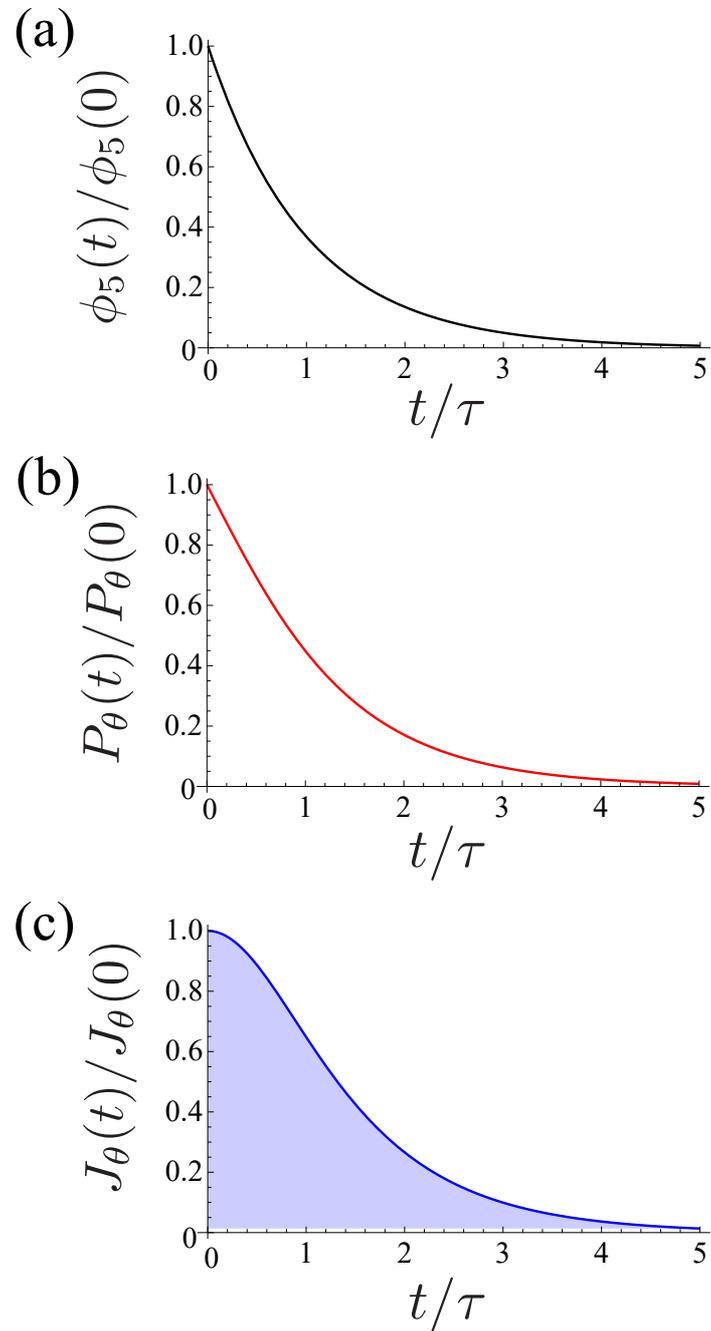


図. 3.1: $\phi_4 > 0$ の時のカイラル磁気効果の時間変化. 図中の (a),(b),(c) は $\phi_5(t)$ が式 (3.4) で与えられた時の $\phi_5(t)$, $P_\theta(t)$, $J_\theta(t)$ をそれぞれプロットしたものである. (c) の色で塗られた領域の面積が単位断面積あたりのカイラル磁気効果によって移動した電荷量に対応する. ここでは $\phi_5(0)/\phi_4 = 1$ とした.

第4章 全体のまとめ

アクシオンは電場 \mathbf{E} と磁束密度 \mathbf{B} の間を結びつける効果を持っているが、その結果、電磁場の境界条件を与えたり、アクシオンや電磁場の1つを指定すると、残りの場の値も決まってしまうという非常に特異な性質を持つ。その結果として予言されるアクシオンによる異常な電磁応答に関して本研究で得られた結果を以下にまとめる。

アクシオン不安定性と非線形電磁気効果

アクシオン不安定とは、アクシオン絶縁体に電場を印加したとき、印加電場の値が閾値以上になると、系が不安定性を示し、動的アクシオン現象が現れる現象である。これに関して、本研究では以下の結果を得た。

- アクシオンのダイナミクスに重要なアクシオンのポテンシャルを絶縁体の質量を与える2種類の秩序場に対するポテンシャルから導出した。
- アクシオン絶縁体内部の電磁場をスケールされたアクシオン場 θ/Θ の関数として得られた。そこにはアクシオンを介したフィードバックの効果が含まれている。これによって、誘起されたアクシオン場の値からアクシオン絶縁体内部の電磁場を評価できる。
- 誘起されるアクシオン場 θ は秩序場のポテンシャルに大きく依存する。
- 符号変化可能な2つの秩序場のゆらぎがどちらも可能ならアクシオン場は $|\theta|/\Theta \geq 1$ と大きく誘起される。このときアクシオンを介した電磁気効果のフィードバック効果からくる電場の遮蔽効果によって内部では電場が大きくなれずその結果磁束密度も大きくできない。

- 符号変化可能な 2 つの秩序場のゆらぎが少なくともどちらか不可能ならならアキシオン場は $|\theta|/\Theta \ll 1$ とあまり誘起されない. このときアキシオンを介した電磁気効果のフィードバック効果からくる電場の遮蔽効果は小さく磁束密度も大きくできない.
- 実験では図 1.1 において, $\phi_4\phi_5$ 平面の原点付近のアキシオン絶縁体を想定するとよい. そこでは臨界電場を小さくでき, アキシオン場も大きく誘起できる.

一方, アキシオン絶縁体に磁束密度を印加する場合も考察した. その結果, 以下の結果を得た.

- アキシオン不安定性は生じなかった.
- 初期状態で $\theta \neq 0$ なら, 電気分極 $P_\theta = \frac{\alpha}{4\pi^2}\theta B_0$ だけ生じる.

磁場駆動の動的アキシオンによるカイラル磁気効果

アキシオン不安定性の議論によって定常状態では印加磁場では不安定性は生じないことは第 2 章ですでに明らかにしていたが, アキシオン場が時間変化をしている間だけならカイラル磁気効果と呼ばれる動的アキシオン特有の現象が生じさせられる. ここでカイラル磁気効果とは, 磁束密度と時間変化するアキシオン場の組み合わせで電流がつくられる現象である. これに関して, 本研究では以下の結果を得た.

- 印加電場の場合は自発的に動的アキシオンをつくり出したのに対して, 印加磁場の場合は磁性秩序との相互作用を使うことによって強制的に動的アキシオンをつくり出すというアイデアを提案した.
- 反強磁性体に対して, 磁化容易軸方向に磁場を印加によって磁化のスピンフリップさせることでカイラル磁気効果が生じうることを明らかにした.
- カイラル磁気効果によって移動した電荷量は磁化のスピンフリップ時直上の電気分極と緩和後の電気分極の 2 値の差をとるだけで評価できることを明らかにした.

- この現象はある種の超格子構造の物質を用いれば測定可能であることを明らかにした。

付録A 記法

A.1 4元ベクトル・電磁場テンソル

以下,ギリシャ文字 ($\alpha, \beta, \mu, \nu, \rho, \lambda, \dots$) は 0, 1, 2, 3 の値を, ラテン文字 (i, j, k, \dots) は 1, 2, 3 の値をとるものとする.

点 x^μ と点 $x^\mu + dx^\mu$ との間の世界間隔の2乗

$$(ds)^2 \equiv dx_\mu dx^\mu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

ミンコフスキー計量テンソル

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$$

$$g_{\mu\rho} g^{\rho\nu} = g_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu$$

4元ベクトル

$$a^\mu = (a^0, \mathbf{a}), \quad a_\mu = (a^0, -\mathbf{a})$$

4元ベクトル演算子

$$\hat{a}^\mu = (\hat{a}^0, \hat{\mathbf{a}}), \quad \hat{a}_\mu = (\hat{a}^0, -\hat{\mathbf{a}})$$

内積

$$a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

$$\hat{a}^\mu \hat{b}_\mu = \hat{a}_\mu \hat{b}^\mu = \hat{a}^0 \hat{b}^0 - \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}}$$

$$a^\mu b^\mu = a_\mu b_\mu = a^0 b^0 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

$$\hat{a}^\mu \hat{b}^\mu = \hat{a}_\mu \hat{b}_\mu = \hat{a}^0 \hat{b}^0 + \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}}$$

ファインマンのスラッシュ記法

$$\not{a} \equiv \gamma^\mu a_\mu = \gamma_\mu a^\mu$$

$$\not{\hat{a}} \equiv \gamma^\mu \hat{a}_\mu = \gamma_\mu \hat{a}^\mu$$

4 元座標

$$x^\mu \equiv (ct, \mathbf{x}), \quad x_\mu \equiv (ct, -\mathbf{x})$$

4 元波数

$$k^\mu \equiv \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right), \quad k_\mu \equiv \left(\frac{\omega}{c}, -\mathbf{k} \right)$$

4 元運動量

$$p^\mu \equiv \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), \quad p_\mu \equiv \left(\frac{E}{c}, -\mathbf{p} \right)$$

相対論における 4 元運動量の関係式

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2$$

4 元電磁ポテンシャル

$$A^\mu \equiv \left(\frac{\Phi}{c}, \mathbf{A} \right), \quad A_\mu \equiv \left(\frac{\Phi}{c}, -\mathbf{A} \right)$$

4 元カレント

$$j^\mu \equiv (c\rho, \mathbf{j}), \quad j_\mu \equiv (c\rho, -\mathbf{j})$$

4 元正準運動量

$$\pi^\mu \equiv p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu, \quad \pi_\mu \equiv p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu$$

偏微分

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\nabla \right), \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \partial_t, \nabla \right)$$

$$\partial^\mu x^\nu = g^{\mu\nu}, \quad \partial_\mu x^\nu = g_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu$$

共変微分

$$D^\mu \equiv \partial^\mu + \frac{ie}{\hbar c} A^\mu, \quad D_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu$$

4元波数演算子

$$\hat{k}^\mu \equiv i\partial^\mu = i\left(\frac{1}{c}\partial_t, -\nabla\right), \quad \hat{k}_\mu \equiv i\partial_\mu = i\left(\frac{1}{c}\partial_t, \nabla\right)$$

4元運動量演算子

$$\hat{p}^\mu \equiv i\hbar\partial^\mu = i\hbar\left(\frac{1}{c}\partial_t, -\nabla\right), \quad \hat{p}_\mu \equiv i\hbar\partial_\mu = i\hbar\left(\frac{1}{c}\partial_t, \nabla\right)$$

クロネッカーのデルタ記号

$$\delta_{\mu_0, \dots, \mu_p}^{\nu_0, \dots, \nu_p} = \begin{cases} +1 & (\text{even}) \\ -1 & (\text{odd}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

even(odd) は μ_0, \dots, μ_p がすべて異なる値を取り、かつ、 ν_0, \dots, ν_p の偶置換 (奇置換) の場合を指し、otherwise はそれ以外の全ての場合を指す。

レヴィ=チヴィタ記号

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\mathcal{E}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & (\text{even}) \\ -1 & (\text{odd}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

even(odd) は $\alpha\beta\gamma\delta$ が 0, 1, 2, 3 の偶置換 (奇置換) の場合を指し、otherwise はそれ以外の全ての場合を指す。

$$\mathcal{E}_{0123} = 1$$

$$\mathcal{E}^{0123} = -1$$

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathcal{E}^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = -\delta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}$$

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathcal{E}^{\alpha'\beta'\gamma'\delta} = -1!\delta_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha'\beta'\gamma'}$$

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathcal{E}^{\alpha'\beta'\gamma\delta} = -2!\delta_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}$$

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathcal{E}^{\alpha'\beta\gamma\delta} = -3!\delta_{\alpha}^{\alpha'}$$

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathcal{E}^{\alpha\beta\gamma\delta} = -4!$$

反対称テンソル

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \equiv \mathcal{A}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & X^1 & X^2 & X^3 \\ -X^1 & 0 & -Y^3 & Y^2 \\ -X^2 & Y^3 & 0 & -Y^1 \\ -X^3 & -Y^2 & Y^1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = (X^1, X^2, X^3),$$

$$\mathbf{Y} = (Y^1, Y^2, Y^3)$$

電磁場テンソルとその双対テンソル

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\equiv \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} \\ &= [\mathbf{E}, \mathbf{B}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= F_{\mu'\nu'}g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'} \\ &= [-\mathbf{E}, \mathbf{B}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{2}\mathcal{E}_{\mu\nu\rho\lambda}F^{\rho\lambda} \\ &= [-\mathbf{B}, \mathbf{E}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\mathcal{E}^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\rho\lambda} \\ &= \tilde{F}_{\mu'\nu'}g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'} \\ &= [\mathbf{B}, \mathbf{E}] \end{aligned}$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}$$

付録B 微分形式

ここでは特にミンコフスキー空間 ($n = 3 + 1$ 次元時空間) における微分幾何についてまとめる. $\Omega^k(M)$ をミンコフスキー空間における k 形式とする.

B.1 ホッジ演算子・ホッジ双対

ここでは, 特に微分形式に対するホッジ双対をまとめる. $\omega \equiv dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ とする.

ホッジ演算子 $*$ を以下を満たすように定義する.

$$1 * 1 = \omega$$

$$(dx_\mu) \wedge *(dx^\nu) = - * (dx^\nu) \wedge (dx_\mu) = \delta_{\mu}^{\nu} \omega$$

$$(dx_\mu \wedge dx_\nu) \wedge *(dx^\alpha \wedge dx^\beta) = \delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \omega$$

$$(dx_\mu \wedge dx_\nu \wedge dx_\rho) \wedge *(dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma) = \delta_{\mu\nu\rho}^{\alpha\beta\gamma} \omega$$

$$(dx_\mu \wedge dx_\nu \wedge dx_\rho \wedge dx_\lambda) \wedge *(dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge dx^\delta) = \delta_{\mu\nu\rho\lambda}^{\alpha\beta\gamma\delta} \omega$$

k 形式の基底に対して, ホッジ演算子は $n - k$ 形式の双対な基底を与えている. 具体的にホッジ演算子を作用させた後の基底 (ホッジ双対基底) を書き下すと以下の通り

になる.

$$\begin{aligned}
 *1 &= \frac{1}{4!} \mathcal{E}^{\mu\nu\rho\lambda} (dx_\mu \wedge dx_\nu \wedge dx_\rho \wedge dx_\lambda) = \omega \quad (\in \Omega^4) \\
 *(dx^\alpha) &= \frac{1}{3!} \mathcal{E}^{\alpha\nu\rho\lambda} (dx_\nu \wedge dx_\rho \wedge dx_\lambda) \quad (\in \Omega^3) \\
 *(dx^\alpha \wedge dx^\beta) &= \frac{1}{2!} \mathcal{E}^{\alpha\beta\rho\lambda} (dx_\rho \wedge dx_\lambda) \quad (\in \Omega^2) \\
 *(dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma) &= \frac{1}{1!} \mathcal{E}^{\alpha\beta\gamma\lambda} (dx_\lambda) \quad (\in \Omega^1) \\
 *(dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge dx^\delta) &= \frac{1}{0!} \mathcal{E}^{\alpha\beta\gamma\delta} 1 \quad (\in \Omega^0)
 \end{aligned}$$

さらに * を作用させることで

$$\begin{aligned}
 **1 &= -1 \\
 **(dx^\alpha) &= +(dx^\alpha) \\
 **(dx^\alpha \wedge dx^\beta) &= -(dx^\alpha \wedge dx^\beta) \\
 **(dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma) &= +(dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma) \\
 **(dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge dx^\delta) &= -(dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge dx^\delta)
 \end{aligned}$$

よって, $n = 3 + 1$ 次元上の k 形式に対して $*^{-1}* = **^{-1} = 1$ を満たす $*^{-1}$ は

$$*^{-1} = (-1)^{k+1} *$$

B.2 外微分・余微分・ラプラス＝ド・ラーン演算子

外微分 d は以下を満たす線形演算子として定義される.

- $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$
- $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$
- $\alpha \in \Omega^p(M)$ に対して, $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$
- $dd\alpha = 0$
- 微分可能な関数 $f \in \Omega^0$ に対して, $df = (\partial_i f) dx^i$

余微分 δ は、外微分を使って以下のように定義される。

$$\delta \equiv *d*$$

このとき

$$\delta : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$$

$$\delta\delta = 0$$

ラプラス＝ド・ラーン演算子 Δ は、外微分を使って以下のように定義される。

$$\Delta \equiv d\delta + \delta d$$

このとき、

$$\Delta : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$$

$$\Delta* = *\Delta$$

付録C 電磁気学

ここでは、電磁気学の数学的な構造を明らかにするため微分形式を使ってまとめる。

C.1 接続・曲率

電磁気学は構造群が $U(1)$ のゲージ理論である。このとき、接続 1 形式 A を

$$A \equiv A_\mu dx^\mu \quad (\in \Omega^1)$$

とすると、曲率 2 形式 F は $A \wedge A = 0$ より

$$\begin{aligned} F &= dA \\ &= \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} F^{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu \quad (\in \Omega^2) \end{aligned}$$

となる。ここで、 A_μ , $F_{\mu\nu}$ はそれぞれゲージポテンシャル、電磁場テンソルに対応する。曲率のホッジ双対 $*F$ やその双対 $**F$ は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} *F &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} * (dx^\mu \wedge dx^\nu) \\ &= \frac{1}{2} \tilde{F}^{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu \\ &= \frac{1}{2} \tilde{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (\in \Omega^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} **F &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} ** (dx^\mu \wedge dx^\nu) \\ &= -F \quad (\in \Omega^2) \end{aligned}$$

C.2 ゲージ変換

$h(x) = e^{i\lambda(x)} \in U(1)$ に対して, ゲージ変換後の接続 1 形式 A' は

$$\begin{aligned} A' &= hAh^{-1} + hdh^{-1} \\ &= A - id\Lambda \end{aligned}$$

で与えられる. $d\Lambda \equiv \partial_\mu \lambda dx^\mu$ である. このとき, $dd\Lambda = 0$ よりゲージ変換に対して $F, *F$ は不変である.

C.3 ラグランジアン密度

$\omega \equiv dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ とする. 一般に, 電磁場と電子の相互作用系を記述するラグランジアン密度は以下で与えられる.

$$L = L_{\text{em}} + L_{\text{em-e}} + L_e \quad (\in \Omega^4) \quad (\text{C.1})$$

ここで,

$$\begin{aligned} L_{\text{em}} &= -\frac{1}{8\pi} F \wedge *F \\ &= -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \omega \\ &= \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \omega, \\ L_{\text{em-e}} &= \frac{1}{c} J \wedge A \\ &= -\frac{1}{c} A \wedge J \\ &= -\frac{1}{c} j^\lambda A_\lambda \omega. \end{aligned}$$

はそれぞれ電磁場に対するラグランジアン密度, および電磁場と電子の相互作用に対するラグランジアン密度である. L_e は電子に対するラグランジアン密度であるが, 固体中では真空中のものとは異なるので注意したい. また, 3 形式 J は電流密度 $j^\lambda = (c\rho, \mathbf{j})$ を使って, 以下のように書けることを使っている.

$$\begin{aligned} J &\equiv j^\lambda * dx_\lambda \\ &= \frac{1}{3!} \mathcal{E}_{\lambda\alpha\beta\gamma} j^\lambda (dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma) \quad (\in \Omega^3). \end{aligned}$$

C.4 電磁場の運動方程式

電磁場の運動方程式は以下のように与えられる.

$$dF = 0 \quad (\in \Omega^3) \quad (\text{C.2})$$

$$d * F = -\frac{4\pi}{c} J \quad (\in \Omega^3) \quad (\text{C.3})$$

式 (C.2) は $ddA = 0$ より得られ, ビアンキ恒等式と呼ばれている. また, 式 (C.3) はラグランジアン (C.1) の接続 A に関するオイラー・ラグランジュ方程式から得られる. 式 (C.3) から以下が導かれる.

$$dJ = 0 \quad (\in \Omega^4) \quad (\text{C.4})$$

ここで,

$$\begin{aligned} dF &= \frac{1}{2} \partial_\rho F_{\mu\nu} dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \partial_\rho \tilde{F}^{\rho\lambda} * dx_\lambda \\ d * F &= \frac{1}{2} \partial_\rho \tilde{F}_{\mu\nu} dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \partial_\rho \tilde{\tilde{F}}^{\rho\lambda} * dx_\lambda \\ &= -\partial_\rho F^{\rho\lambda} * dx_\lambda \\ dJ &= \partial_\mu j^\lambda dx^\mu \wedge * dx_\lambda \\ &= \partial_\mu j^\mu \omega \end{aligned}$$

より, 式 (C.2), 式 (C.3) および式 (C.4) はそれぞれ

$$\partial_\rho \tilde{F}^{\rho\lambda} = 0 \quad (\text{C.5})$$

$$\partial_\rho F^{\rho\lambda} = \frac{4\pi}{c} j^\lambda \quad (\text{C.6})$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

式 (C.5) と式 (C.6) はマクスウェル方程式を表し, 式 (C.4) は電流密度の保存則を表す.

C.5 電磁場に対する波動方程式

F にラプラス＝ド・ラーム演算子 $\Delta (= d\delta + \delta d)$ を作用させたものを，式 (C.2) と式 (C.3) を使って評価することで以下の電磁場の波動方程式が得られる．

$$\Delta F = -S \quad (\in \Omega^2) \quad (\text{C.7})$$

ただし，

$$S \equiv \frac{4\pi}{c} d * J$$

ここで

$$\Delta F = -\frac{1}{2} \square F^{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu,$$

(\square はダランベルシアン)，および，

$$S \equiv \frac{1}{2} S^{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu$$

$$S^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} (\partial^\mu j^\nu - \partial^\nu j^\mu)$$

とすると，式 (C.7) は

$$\square F^{\mu\nu} = S_e^{\mu\nu}$$

となる．このことから S_e は電子による電磁波のソース項となっていることがわかる．

C.6 補助場の導入

以下では慣習ではあるが，補助場（電束密度・磁場）を導入する． $J = J_b + J_f$ のように束縛電荷部分 J_b と自由電荷部分 J_f に分け，これらは独立に保存する電流密度だと仮定する．すなわち，

$$dJ_b = 0 \quad (\text{C.8})$$

$$dJ_f = 0$$

さらに, J_b は完全形式であると仮定する. すなわち, 以下の 2 形式 P が存在する.

$$d * P \equiv \frac{1}{c} J_b \quad (\text{C.9})$$

このとき, 完全形式ならば閉形式であるから, 式 (C.8) は自動的に成り立つ. ここで, 分極テンソル $P_{\mu\nu}$ を以下のように定義する.

$$\begin{aligned} P &\equiv \frac{1}{2} P_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} P^{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu \quad (\in \Omega^2) \end{aligned}$$

$$P_{\mu\nu} = [+P, -M]$$

P, M はそれぞれ電気分極と磁化である. このとき, 式 (C.9) は

$$\partial_\rho P^{\rho\lambda} = -\frac{1}{c} j^\lambda$$

となる. このとき, 式 (C.3) は以下のように書き換えられる.

$$d * G = -\frac{4\pi}{c} J_b \quad (\in \Omega^3)$$

ここで, 2 形式 G は

$$\begin{aligned} G &\equiv F + 4\pi P \\ &= \frac{1}{2} G_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \end{aligned}$$

$G_{\mu\nu}$ は補助場テンソルと呼ばれ, 電束密度 \mathbf{D} と磁場 \mathbf{H} と以下のように関係がある.

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &\equiv F_{\mu\nu} + 4\pi P_{\mu\nu} \\ &= [\mathbf{D}, \mathbf{H}] \\ &= [\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}] \end{aligned}$$

付録D 量子異常と藤川の方法

D.1 藤川の方法

この章では断らない限りユークリッド形式で議論をする。偶数 $D = d + 1$ 次元時空間を考え $\mu = 1, 2, \dots, D$ とする。途中計算を見やすくするため、ここでは自然単位系 $\hbar = c = 1$ を採用する。

経路積分における分配関数

$$Z \equiv \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S[\bar{\psi}, \psi]}$$

を考える。フェルミオン場 ψ の変換 $\psi \rightarrow \psi'$ に対して、分配関数も以下のように変換される。

$$Z \rightarrow \int \mathcal{D}\bar{\psi}' \mathcal{D}\psi' e^{-S'[\bar{\psi}', \psi']} = Z \quad (\text{D.1})$$

ただし、最後の等号で積分結果は積分変数に依らない事実を使った。ここで

$$S[\bar{\psi}', \psi'] = S'[\bar{\psi}, \psi] \quad (\text{D.2})$$

$$\mathcal{D}\bar{\psi}' \mathcal{D}\psi' = J \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \quad (\text{D.3})$$

として、式 (D.1) に代入すると

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}' \mathcal{D}\psi' e^{-S'[\bar{\psi}', \psi'] - \ln J} = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S[\bar{\psi}, \psi]}$$

この両辺の指数の肩を比較することで、以下の恒等式を得る。

$$S'[\bar{\psi}, \psi] + \ln J = S[\bar{\psi}, \psi] \quad (\text{D.4})$$

式 (D.4) は、 ψ の変換 $\psi \rightarrow \psi'$ に対して、作用の変化分が

$$\delta S[\bar{\psi}, \psi] \equiv S'[\bar{\psi}, \psi] - S[\bar{\psi}, \psi] = -\ln J$$

で与えられることを意味する。このような手法を藤川の方法とよぶ。

D.2 カイラルゲージ変換の場合

カイラルゲージ変換の場合に藤川の方法を使って作用を評価しよう。ディラック電子と電磁場の相互作用を記述する変換前の作用として、次のものを考える。

$$S[\bar{\psi}, \psi] = \int d^D x \bar{\psi} (\not{D} + m) \psi \quad (\text{D.5})$$

ここで随伴スピノール $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_D$ と共変微分は

$$\not{D} \equiv \gamma_\mu D_\mu$$

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu$$

である。ユークリッド形式のガンマ行列は以下の性質を持つ。

$$(\gamma_\mu)^\dagger = \gamma_\mu, \quad (\mu = 1, 2, \dots, D),$$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}, \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, D)$$

$$\gamma_5 = (-i)^{d/2} \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_D$$

$$(\gamma_5)^\dagger = \gamma_5,$$

$$(\gamma_5)^2 = 1,$$

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, D)$$

カイラルゲージ変換は以下で与えられる。

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha\gamma_5} \psi \quad (\text{D.6})$$

これに対して、式 (D.2) と式 (D.3) を評価しよう。

D.2.1 カイラルゲージ変換後の作用

カイラルゲージ変換 (D.6) に対して、変換後の作用は α は微小とすると、

$$\begin{aligned} S[\bar{\psi}', \psi'] &= \int d^D x \bar{\psi}' (\not{D} + m) \psi' \\ &= \int d^D x \bar{\psi} (\not{D} + m) \psi + \int d^D x i[(\partial_\mu \alpha)(\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi) + 2\alpha m(\bar{\psi} \gamma_5 \psi)] \\ &= \int d^D x \bar{\psi} (\not{D}' + me^{2i\alpha\gamma_5}) \psi \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

となる。ただし,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}' &\equiv \gamma_\mu D'_\mu \\ D'_\mu &\equiv \partial_\mu + ieA_\mu + i(\partial_\mu \alpha) \gamma_5 \end{aligned}$$

式(D.7)が意味するのは, カイラルゲージ変換(D.6)によって質量項に位相ファクターが付く.

$$m \rightarrow me^{2\alpha i \gamma_5}$$

D.2.2 ヤコビアン J

$\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi$ の書き換え

まず, $\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi$ を数学的に扱いやすい形に書き直す. $i\mathcal{D}$ はエルミートなのでその固有関数 $u_n(x)$ は以下を満たすように構成できる.

$$\begin{aligned} i\mathcal{D}u_n(x) &= \lambda_n u_n(x), (\lambda_n \in \mathbb{R}) \\ \int d^D x u_n^\dagger(x) u_m(x) &= \delta_{nm}. \end{aligned} \tag{D.8}$$

これを使ってグラスマン変数 $\psi, \bar{\psi}$ を

$$\begin{aligned} \psi(x) &\equiv \sum_n u_n(x) \psi_n, \\ \bar{\psi}(x) &\equiv \sum_n u_n^\dagger(x) \bar{\psi}_n, \end{aligned}$$

のように展開する. $\psi_n, \bar{\psi}_n$ はグラスマン変数である. このとき, 以下が成り立つ.

$$\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi = \prod_n d\bar{\psi}_n d\psi_n$$

ただし, 固有関数の直交性(D.8)を使った.

ψ'_n の評価

次に、カイラルゲージ変換による ψ_n 変換性を評価する。カイラルゲージ変換 (D.6) によって

$$\psi_n \rightarrow \psi'_n = \sum_m U_{nm} \psi_m \quad (\text{D.9})$$

と変換されたとすると

$$\begin{aligned} U_{nm} &= \int d^D x u_n^\dagger(x) e^{i\alpha\gamma_5} u_m(x) \\ &\simeq \delta_{nm} + \int d^D x u_n^\dagger(x) (i\alpha\gamma_5) u_m(x) \end{aligned}$$

となる。ただし、

ヤコビアンの評価

カイラルゲージ変換 (D.6) によって

$$\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \rightarrow \mathcal{D}\bar{\psi}'\mathcal{D}\psi' = \prod_n d\bar{\psi}'_n d\psi'_n$$

と変換されるが、これは式 (D.9) の行列 U を使うことでヤコビアンが評価できる。

$$\prod_n d\bar{\psi}'_n d\psi'_n = (\det U)^{-2} \prod_n d\bar{\psi}_n d\psi_n \equiv J \prod_n d\bar{\psi}_n d\psi_n$$

すなわち、

$$\begin{aligned} J &= (\det U)^{-2} \\ &= (\exp \text{tr} \ln U)^{-2} \\ &\equiv \exp \left[-2i \int d^D x (\alpha(x) \Gamma(x)) \right] \end{aligned}$$

ただし、

$$\Gamma(x) \equiv \sum_n u_n^\dagger(x) \gamma_5 u_n(x) \quad (\text{D.10})$$

したがって、この Γ を評価できればヤコビアンが求められる。

$\Gamma(x)$ の評価

実は式 (D.10) の $\Gamma(x)$ の評価は少し煩雑になる。そのままでは収束しないので以下のように正則化を行う。

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n u_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{-\left(\frac{\lambda_n}{M}\right)^2} u_n(x) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n u_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{-\left(\frac{\not{D}}{M}\right)^2} u_n(x)\end{aligned}$$

ここで、固有関数のフーリエ係数 $\tilde{u}_n(k)$ を以下で与える。

$$u_n(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D/2}} e^{ikx} \tilde{u}_n(k),$$

このとき

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{D/2}} \frac{d^D \tilde{k}}{(2\pi)^{D/2}} e^{-ikx} \tilde{u}_n^\dagger(k) \gamma_5 e^{-\left(\frac{\not{D}}{M}\right)^2} e^{i\tilde{k}x} \tilde{u}_n(\tilde{k}) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \text{Tr} \left(e^{-ikx} \gamma_5 e^{\left(\frac{\not{D}}{M}\right)^2} e^{ikx} \right)\end{aligned}$$

ただし Tr はスピノルの添え字についてとる。ここで

$$\begin{aligned}\not{D}^2 &= (D_\mu)^2 + \frac{ie}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu F_{\mu\nu} \\ &= (D_\mu)^2 + \frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \\ \sigma_{\mu\nu} &\equiv \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]\end{aligned}$$

および、一般に成り立つ恒等式

$$e^{-ikx} f(D_\mu) e^{ikx} = f(D_\mu + ik_\mu)$$

より

$$\begin{aligned}e^{-ikx} e^{\left(\frac{\not{D}}{M}\right)^2} e^{ikx} &= e^{\left(\frac{(D+ik)^2 + \frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{M^2}\right)} \\ &= e^{\left(\frac{D+ik}{M}\right)^2} e^{\frac{e}{2M^2} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}}\end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \frac{1}{(2\pi)^D} \lim_{M \rightarrow \infty} \int d^D k \operatorname{Tr} \left(\gamma_5 e^{(\frac{D+ik}{M})^2} e^{\frac{e}{2M^2} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}} \right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^D} \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\int d^D k e^{(\frac{ik}{M})^2} \right) \operatorname{Tr} \left(\gamma_5 e^{\frac{e}{2M^2} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}} \right) \\
&= \frac{\pi^{D/2}}{(2\pi)^D} \lim_{M \rightarrow \infty} M^D \operatorname{Tr} \left(\gamma_5 e^{\frac{e}{2M^2} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}} \right) \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \lim_{M \rightarrow \infty} \operatorname{Tr} \left[\gamma_5 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} M^{D-2l} \left(\frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right)^l \right]
\end{aligned}$$

l に関する和のうち, $\lim_{M \rightarrow \infty}$ でノンゼロになりうるのは $l \leq D/2$ だというのは明らかだが, ガンマ行列の反交換性とトレースの性質から実際にノンゼロになるのは $l = D/2$ のときのみである.

$$\Gamma(x) = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{1}{(D/2)!} \operatorname{Tr} \left[\gamma_5 \left(\frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right)^{D/2} \right]$$

以下では, 具体的に $D = 1 + 1$, $D = 3 + 1$ の場合を評価してみる.

$D=1+1$ のとき ($\mu, \nu = 1, 2$)

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{1}{(4\pi)^1} \frac{1}{1!} \operatorname{Tr} \left[\gamma_5 \left(\frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right)^1 \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} \frac{e}{2} \operatorname{Tr} [\gamma_5 \sigma_{\mu\nu}] F_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{4\pi} \frac{e}{2} (2\epsilon_{\mu\nu}) F_{\mu\nu} \\
&= \frac{e}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\
&= \frac{e}{2\pi} F_{12} \\
&= -\frac{ie}{2\pi} F_{10} \\
&= \frac{ie}{2\pi} E
\end{aligned}$$

$D=3+1$ のとき ($\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$)

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{2!} \text{Tr} \left[\gamma_5 \left(\frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{e}{2} \right)^2 \text{Tr} [\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \sigma_{\rho\lambda}] F_{\mu\nu} F_{\rho\lambda} \\
&= \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{e}{2} \right)^2 (4\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}) F_{\mu\nu} F_{\rho\lambda} \\
&= \frac{e^2}{32\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} F_{\mu\nu} F_{\rho\lambda} \\
&= \frac{e^2}{16\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \\
&= \frac{-ie^2}{16\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \\
&= \frac{ie^2}{4\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}
\end{aligned}$$

D.2.3 まとめ

式(D.4)は、カイラルゲージ変換(D.6)に対して以下の関係式を与える。

$$\bar{\psi} (\not{D}' + me^{2i\alpha\gamma_5}) \psi - 2i\alpha(x)\Gamma(x) = \bar{\psi} (\not{D} + m) \psi \quad (\text{D.11})$$

ただし、積分記号 $\int d^D x$ は省略した。ここで、 $\Gamma(x)$ は時空間の次元に依存していて、例えば以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{e}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{ie}{2\pi} E & (D=1+1) \\
\Gamma &= \frac{e^2}{32\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} F_{\mu\nu} F_{\rho\lambda} = \frac{ie^2}{4\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} & (D=3+1)
\end{aligned}$$

最後に、式(D.11)に関していくつかコメントする。

カイラルゲージ変換の位相

これまでカイラルゲージ変換の位相 α は微小量としたが、この変換を繰り返し行うことで α を有限の場合にできる。

カイラル量子異常

ここでは式 (D.5) で $m \rightarrow 0$ とした場合を考える。このとき大域的なカイラルゲージ対称性が一見あるように見えるが、式 (D.11) で見たように量子異常によってその対称性は破れている。これをカイラル量子異常と呼ぶ。また、局所的なカイラルゲージ変換の場合は式 (D.5) は次のように書き直せる。

$$\bar{\psi} [\gamma_\mu (\partial_\mu \alpha) \gamma_5] \psi = 2\alpha(x) \Gamma(x)$$

ここで $(\partial_\mu \alpha) \gamma_5$ はカイラルベクトルポテンシャルと呼ばれ、ワイル半金属と呼ばれる物質中では元々有効作用の中に含まれている。したがって、ワイル半金属でも特異な電磁応答が期待される。

付録E アクション電磁気学

E.1 ラグランジアン密度

$\omega \equiv dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ とする. 一般に, 電磁場とアクションとの相互作用系を記述するラグランジアン密度は以下で与えられる.

$$L = L_{\text{em}} + L_{\text{em-a}} + L_{\text{a}} \quad (\in \Lambda^4) \quad (\text{E.1})$$

ここで,

$$\begin{aligned} L_{\text{em}} &= -\frac{1}{8\pi} F \wedge *F \\ &= -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \omega \\ &= \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \omega, \\ L_{\text{em-a}} &= -\frac{\theta}{8\pi\Theta_0} F \wedge F \\ &= \frac{\theta}{16\pi\Theta_0} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \omega \\ &= \frac{\theta}{4\pi\Theta_0} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \omega \\ L_{\text{a}} &= C \left[\frac{1}{2} d\theta \wedge *d\theta - \mathcal{V}(\theta) \omega \right] \\ &= C \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \theta)(\partial^\mu \theta) - \mathcal{V}(\theta) \right] \omega \end{aligned}$$

はそれぞれ電磁場に対するラグランジアン密度, 電磁場とアクションの相互作用に対するラグランジアン密度, およびアクションに対するラグランジアン密度である. また, Θ_0 は微細構造定数 $\alpha = e^2/(\hbar c) \simeq 1/137$ を使って以下で与えられる.

$$\Theta_0 \equiv \frac{\pi}{\alpha}$$

E.2 電磁場の運動方程式

電磁場の運動方程式は以下のように与えられる.

$$dF = 0 \quad (\in \Lambda^3) \quad (\text{E.2})$$

$$d * F = -\frac{4\pi}{c} J_a \quad (\in \Lambda^3) \quad (\text{E.3})$$

$$J_a \equiv \frac{c}{4\pi\Theta_0} d(\theta F) \quad (\text{E.4})$$

式 (E.2) はビアンキ恒等式である. また, 式 (E.3) はラグランジアン密度 (E.1) の接続 A に関するオイラー・ラグランジュ方程式から得られる. 式 (E.4) から電流密度 j_a^ν は以下で与えられる.

$$J_a \equiv j_a^\lambda * dx_\lambda \quad (\in \Lambda^3)$$

$$j_a^\nu \equiv \frac{c}{4\pi\Theta_0} (\partial_\mu \theta) \tilde{F}^{\mu\nu}$$

電流密度 J_a の保存則は式 (E.3) からと, 式 (E.4) の定義からと, 2通りの方法で導くことができる.

$$0 = dJ_a = \partial_\mu j_a^\mu \omega$$

補助場を導入しよう. 式 (E.4) は完全形式だから, 式 (E.3) は以下のように書き換えできる.

$$d * G_a = 0$$

ここで, 補助場 2 形式 G_a は, 以下で与えられる.

$$G_a \equiv F + 4\pi P_a$$

$$= \frac{1}{2} G_{a\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$G_{a\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu} + 4\pi P_{a\mu\nu}$$

$$= [\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}_a, \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}_a]$$

$$\begin{aligned}
P_a &\equiv -\frac{\theta}{4\pi\Theta_0} * F \\
&= \frac{1}{2} P_{a\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{a\mu\nu} &\equiv -\frac{\theta}{4\pi\Theta_0} \tilde{F}_{\mu\nu} \\
&= [+P_a, -M_a]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_a &\equiv \frac{\theta}{4\pi\Theta_0} \mathbf{B} \\
M_a &\equiv \frac{\theta}{4\pi\Theta_0} \mathbf{E}
\end{aligned}$$

E.3 対応関係

付録Cでの電磁気学とアクシオン電磁気学の対応関係をここで述べる．まずはじめに電流密度は以下の対応関係が成り立つ．

$$\begin{aligned}
J &\rightarrow J_a, \\
j^\nu &\rightarrow j_a^\nu.
\end{aligned}$$

また、分極は以下の対応関係が成り立つ．

$$\begin{aligned}
P &\rightarrow P_a, \\
P_{\mu\nu} &\rightarrow P_{a\mu\nu}.
\end{aligned}$$

電磁波のソース項は以下の対応関係が成り立つ．

$$S_e \rightarrow S_a \equiv \frac{4\pi}{c} d * J_a$$

ここで S_a はアクシオン場 θ と電磁場による電磁波のソース項であり、 S_e の場合とは違って電磁場も含まれていることに注意したい．したがって、ソース項によってつくられた電磁波がさらにソース項として電磁波にフィードバックの作用することが予想される．実際、アクシオン不安定性 [2] とは、これが正のフィードバックで増幅効果を生じることで起こる現象である．

また，改めてラグランジアン密度を見直すと，以下のように書き直せることがわかる．

$$\begin{aligned}
 L_{\text{em-a}} &= -\frac{1}{2}F \wedge *P_a \\
 &= \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{P}_a + \mathbf{B} \cdot \mathbf{M}_a)\omega \\
 &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{P}_a\omega \\
 &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{M}_a\omega \\
 &= \frac{1}{2c}J_a \wedge A
 \end{aligned}$$

E.4 アクシオンの運動方程式

アクシオンの運動方程式は以下のように与えられる．

$$d * d\theta + \frac{\partial \mathcal{V}(\theta)}{\partial \theta} \omega = *S_{\text{em}} \omega \quad (\in \Lambda^4) \quad (\text{E.5})$$

これはラグランジアン密度 (E.1) のアクシオン場 θ に関するオイラー・ラグランジュ方程式から得られる． S_{em} は以下で与えられる．

$$\begin{aligned}
 S_{\text{em}} &\equiv \frac{1}{8\pi\Theta_0 C} * (F \wedge F) \\
 &= \frac{1}{16\pi\Theta_0 C} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \\
 &= \frac{1}{4\pi\Theta_0 C} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})
 \end{aligned}$$

式 (E.5) を書き換えると以下が得られる．

$$\square\theta + \frac{\partial \mathcal{V}(\theta)}{\partial \theta} = S_{\text{em}}$$

したがって， S_{em} はアクシオン場の波動のソース項となっている．

謝辞

本研究はたくさんの方に支えられて進められました。指導教員である川口由紀准教授には非常に丁寧に研究内容の指導や議論をしていただき、また、論文作成時には有益なコメントをして頂きました。大変深く感謝しています。元指導教員である佐藤昌利教授本研究のテーマを始めるきっかけを与えてくださいました。京都大学の方へ御栄転された後も研究の中で出てきた不明点を大変親切に指導していただきました。田仲由喜夫教授にはセミナーを通じて研究の問題点、結果の考察について助言を頂きました。矢田圭司助教にはセミナー中に有益なコメントを頂きました。山影相助教には丁寧な質問対応や議論をして頂きました。小林伸吾特任助教とは長い間同じ部屋で研究生活をしました。そしてよく議論をして頂きました。田口勝久博士とは共同研究を行い、非常に長い時間有益な議論ができました。秘書の木村薫さんと元秘書の三輪正代さんには事務的な手続きだけでなく研究以外の相談などで大変お世話になりました。その他、田仲研の先輩や同輩、後輩にはたいへん世話になりました。大変感謝しています。最後に家族には精神的にも経済的にも最後まで支えてくれて大変感謝しています。本当にありがとうございました。

参考文献

- [1] 有馬孝尚: マルチフェロイクス (共立出版, 2014).
- [2] H. Ooguri and M. Oshikawa: Phys. Rev. Lett. **108** (2012) 161803.
- [3] L. Fu and C. L. Kane: Phys. Rev. B **76** (2007) 045302.
- [4] T. Imaeda, Y. Kawaguchi, Y. Tanaka, and M. Sato: J. Phys. Soc. Jpn. **88** (2019) 024402.
- [5] K. Fujikawa: Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 1195.
- [6] K. Fujikawa: Phys. Rev. D **21** (1980) 2848.
- [7] A. Vilenkin: Phys. Rev. D **22** (1980) 3080.
- [8] D. E. Kharzeev, L. D. McLerran, and H. J. Warringa: Nucl. Phys. A **803** (2008) 227 .
- [9] K. Fukushima, D. E. Kharzeev, and H. J. Warringa: Phys. Rev. D **78** (2008) 074033.
- [10] M. M. Vazifeh and M. Franz: Phys. Rev. Lett. **111** (2013) 027201.
- [11] H. Sumiyoshi and S. Fujimoto: Phys. Rev. Lett. **116** (2016) 166601.
- [12] A. Sekine and K. Nomura: Phys. Rev. Lett. **116** (2016) 096401.
- [13] K. Taguchi, T. Imaeda, M. Sato, and Y. Tanaka: Phys. Rev. B **93** (2016) 201202.
- [14] T. Hayata: Phys. Rev. B **97** (2018) 205102.

出版論文

1. “*Photovoltaic chiral magnetic effect in Weyl semimetals*”
K. Taguchi, T. Imaeda, M. Sato, and Y. Tanaka: Phys. Rev. B **93** (2016) 201202
2. “*Electromagnetic effects induced by a time-dependent axion field*”
K. Taguchi, T. Imaeda, T. Hajiri, T. Shiraishi, Y. Tanaka, N. Kitajima, and T. Naka: Phys. Rev. B **97** (2018) 214409
3. “*Axion Instability and Nonlinear Electromagnetic Effect*”
T. Imaeda, Y. Kawaguchi, Y. Tanaka, and M. Sato: J. Phys. Soc. Jpn. **88** (2019) 024402