

2018 年度 学位論文

# 電磁トランスデューサを用いた センサレス振動制御に関する研究



名古屋大学大学院 工学研究科  
機械理工学専攻 電子機械工学分野

池亀 透

# 目次

第 1 章	序論	1
1.1	はじめに	1
1.2	共振型パッシブシャント回路の最適設計	4
1.2.1	動吸振器の設計	5
1.2.2	圧電シャント制振系の設計	6
1.2.3	電磁シャント制振系の設計	7
1.2.4	共振型パッシブシャント回路の厳密な最適化	7
1.3	電磁シャント制振のためのモデル化とパラメータ推定	7
1.3.1	電磁シャント制振系のパラメータ推定	7
1.3.2	電磁トランスデューサのモデル化	8
1.4	本論文の目的と構成	8
第 2 章	電磁/圧電シャント制振の最適設計	13
2.1	シャント制振のモデル化	13
2.1.1	支配方程式	13
2.1.2	伝達関数	17
2.1.3	EMSD と PZSD, DVA の比較	19
2.1.4	EMSD と PZSD の無次元化伝達関数	22
2.2	シャント回路設計の評価規範	23
2.2.1	定点理論 (準 $H_\infty$ ノルム最小化)	23
2.2.2	$H_\infty$ ノルム最小化規範	24
2.2.3	$H_2$ ノルム最小化規範	27
2.2.4	安定度最大化規範	28
2.3	提案した評価規範による厳密解	29
2.3.1	コンプライアンス ( $G_a, G_b$ )	30

2.3.2	モビリティ ( $\hat{s}G_a, \hat{s}G_b$ ) . . . . .	30
2.3.3	アクセラランス ( $\hat{s}^2G_a, \hat{s}^2G_b$ ) . . . . .	31
2.3.4	安定度 . . . . .	31
2.3.5	考察 . . . . .	38
2.4	数値事例 . . . . .	41
2.4.1	$H_\infty$ 規範 . . . . .	41
2.4.2	$H_2$ 規範 . . . . .	42
2.4.3	安定度規範 . . . . .	42
2.5	まとめ . . . . .	45
第 3 章	電磁トランスデューサのセンサレスパラメータ推定	47
3.1	パラメータ推定のためのモデル化 . . . . .	47
3.2	パラメータ推定手法 . . . . .	49
3.2.1	適切な計測周波数帯域 . . . . .	49
3.2.2	周波数領域計測データによるパラメータ推定手法 . . . . .	50
3.3	パラメータ推定実験 . . . . .	53
3.3.1	実験装置 . . . . .	53
3.3.2	実験手順 . . . . .	54
3.3.3	実験結果と考察 . . . . .	55
3.4	推定値検証のための制振実験 . . . . .	56
3.4.1	シャント回路の最適設計 . . . . .	56
3.4.2	実験装置 . . . . .	60
3.4.3	実験手順 . . . . .	60
3.4.4	実験結果と考察 . . . . .	62
3.5	まとめ . . . . .	63
第 4 章	渦電流を考慮したモデリングとそのパラメータ推定	65
4.1	渦電流を考慮したモデリング . . . . .	65
4.1.1	従来モデル . . . . .	65
4.1.2	提案モデル . . . . .	67
4.2	提案モデルの等価回路モデル . . . . .	74
4.2.1	インダクタンス行列と抵抗行列の同時対角化 . . . . .	74
4.2.2	同時対角化によって得られた等価回路 . . . . .	76

4.3	パラメータ推定実験 . . . . .	76
4.3.1	パラメータ推定手法 . . . . .	76
4.3.2	パラメータ推定実験結果 . . . . .	78
4.4	提案モデルの検証のための制振実験 . . . . .	80
4.4.1	RC シヤント回路の最適設計 . . . . .	80
4.4.2	制振実験結果と考察 . . . . .	82
4.5	まとめ . . . . .	83
第 5 章	結論	87
	謝辞	91
	参考文献	93
付録 A	$H_\infty$ ノルム最小化規範に使用する $F_1$ と $F_2$	105
付録 B	有理関数で表された $H_2$ ノルムの導出方法	107
B.1	解析的な導出方法 . . . . .	107
B.2	解析的に導出した $H_2$ ノルム, $F_3$ , $F_4$ . . . . .	108
B.3	最適化された評価関数 . . . . .	109
付録 C	$D(\hat{s})$ の多重度	111
付録 D	表 2.2 で示された $G_a$ における $r_{opt}$ の近似解	115
付録 E	初期値選定方法	117
E.1	従来モデル II . . . . .	117
E.2	従来モデル III . . . . .	118
E.3	UD モデル . . . . .	119
E.4	NL モデル . . . . .	120
付録 F	付加質量を利用した機械パラメータ推定	121



# 第 1 章

## 序論

### 1.1 はじめに

鉄道車両や自動車などの機械構造物や橋梁，タワーなどの大型構造物に対して，大振幅または長期的な振動が発生すると，破損や疲労破壊，快適性・操作性の劣化などの様々な問題が引き起こされる．このような振動問題は現代社会の多くの場面で発生しており，構造物への有害な振動の抑制が求められている．振動の抑制に用いられる手法の一つとして，古くから動吸振器 (Dynamic vibration absorber) が用いられてきた [1,2]．図 1.1 に動吸振器の例として，実際に超高層ビルである台北 101 で用いられている動吸振器の写真を示す [3]．動吸振器は，振動する構造物に対して補助質量をばねやダンパを介して付加することで，構造物の振動を補助質量が吸収し振動を抑制する装置である．この動吸振器は受動制振装置でありながら，構造物の機械共振周波数において大きな制振性能が期待できるといった利点を持つ．しかしながら動吸振器は，可動部が存在するため装置の設置には空間的な制約があり，また動吸振器として設置するばねやダンパの調整が難しいといった欠点がある．そこで近年，純粋な機械式ダンパである動吸振器ではなく，電気機械式 (Electromechanical) のダンパによる振動制御が注目されている．電気機械式のダンパには例えば，渦電流ダンパ [4]，磁気粘性ダンパ [5]，電気粘性ダンパ [6]，圧電シャントダンパ [7]，電磁シャントダンパ [8] がある．電気機械式ダンパのメリットには，空間的な制約が動吸振器と比べて小さいだけでなく，電氣的に制御を行うため調整が容易であることなどが挙げられる．



Fig.1.1: Picture of dynamic vibration absorber of Taipei 101 [3]

本論文では、動吸振器に変わる振動制御方法として、電気機械変換可能な装置である電磁トランスデューサを用いた振動制御に着目する。電磁トランスデューサとは、広義の意味では DC モータや三相同期モータ、リニアモータなどの電気と機械のエネルギーを相互に変換可能な装置を指す。しかし本論文では電磁トランスデューサとして、特に永久磁石を用いたボイスコイルモータを想定する。本論文で使用する電磁トランスデューサを図 1.2 に示す。この電磁トランスデューサは、固定された鉄心に永久磁石が貼り付けられ、質量に取り付けられたプラスチックシリンダーに巻かれたコイルが永久磁石と相対的に直線運動する構成となっている。電磁トランスデューサは永久磁石によって作られた磁場中に電流を流れることでローレンツ力を発生させるため、アクチュエータとして広く利用されている [9–11]。また、磁石とコイルの相対運動によって速度起電力を発生させるため、センサとしても広く利用されている [12]。電磁トランスデューサの具体的な用途としては、位置制御装置 [13, 14]、スピーカーのアンプ [15–19]、振動絶縁装置 [20]、バルブ締め装置 [21]、磁気軸受 [22]、磁気浮上装置 [23]、サスペンション [24–26]、エネルギー回生装置 [27–29] 等と非常に多岐にわたる。

電磁トランスデューサを用いた振動制御方法としては、アクティブ振動制御が広く用いられている [30]。この方法は振動構造物にセンサを取り付け、そのセンサ信号を用いて適切なアクチュエーションを行うことで振動制御を達成する。この方法は振動制御として極めて一般的であるが、センサとアクチュエータの 2 つのデバイス

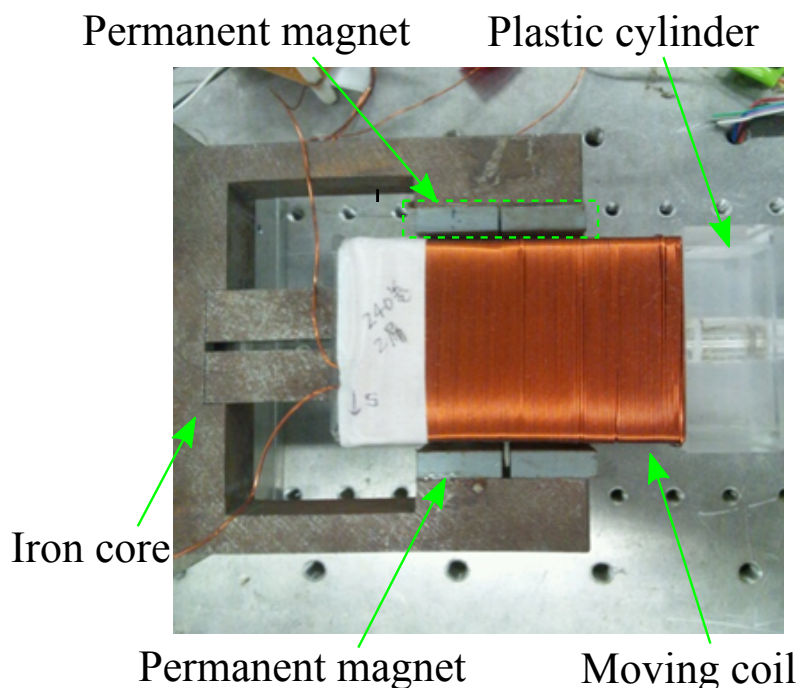


Fig.1.2: Picture of electromagnetic transducer

が必要であり，コントローラ次第では容易に振動が不安定化したり，取り付け位置によって抑えられる振動モードが変化したりするなどの問題もある．そこで近年，単一の電磁トランスデューサを用いた振動制御手法として，電磁トランスデューサの持つアクチュエーション，センシング特性の双方を同時に活用した，電磁シャント制振 (Electromagnetic shunt damper) という手法が Behrens ら [8] によって提案され，近年大きな注目を集めている [31–48]．電磁シャント制振の構成図を図 1.3 に，その概略図を図 1.4 に示す．電磁シャント制振は，振動する構造物に電磁トランスデューサを取り付け，その端子間にシャント回路と呼ばれる外部電気回路を取り付けるだけで振動制御を達成するため，位置や速度，加速度センサ等が不要な手法である．外部センサが不要であるため，この手法はアクティブ振動制御ではなく，パッシブ振動制御手法の一つである．この手法の直感的な説明としては，外部からの振動エネルギーによって構造物に振動が発生し，振動のエネルギーが電磁トランスデューサによって電気エネルギーに変換され，シャント回路の抵抗素子によって電気エネルギーが熱エネルギーとなり消散されることで，振動制御が達成される．電磁シャント制振ではシャント回路の構成次第で振動制御性能が決まるため，設計においてシャント回路は最も重要な要素である．これまで，RC パッシブ回路型 [31,32] や負性 LR 回路



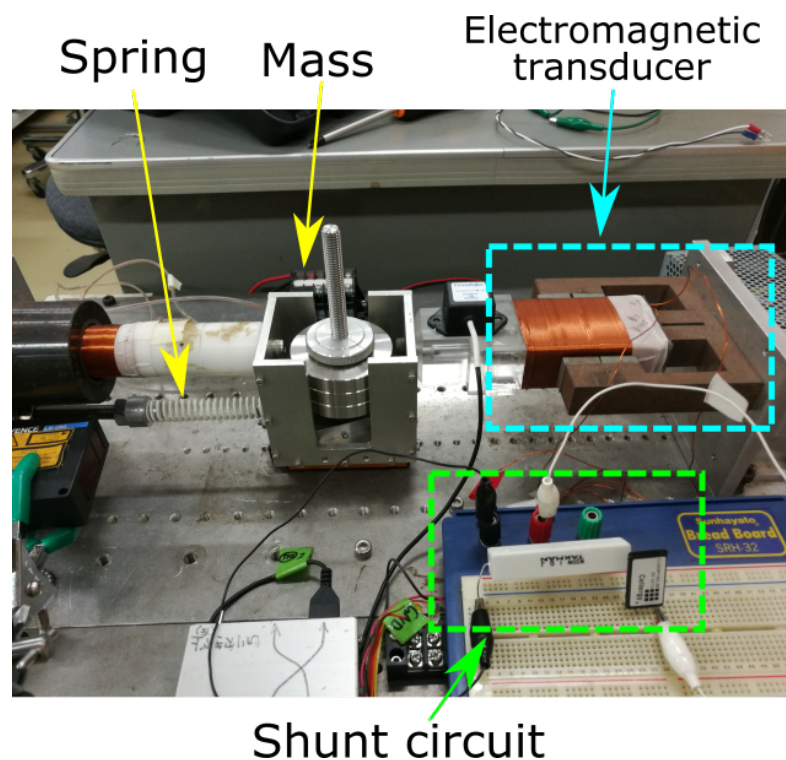


Fig.1.3: Picture of electromagnetic shunt damper

型 [37], セルフチューニング型 [33], 適応制御型 [42] 等が議論されている。

## 1.2 共振型パッシブシャント回路の最適設計

本論文では、抵抗とキャパシタを一つずつ直列接続しただけの回路である、RC パッシブ回路型 [8, 31, 32, 43, 44, 46, 47] のシャント回路を用いた電磁シャント制振に着目する。このシャント回路は非常に簡単な回路構成ではあるが、機械共振周波数で高い制振性能を発揮できる利点を持つ。機械共振周波数で高い制振性能が発揮できる理由は、シャント回路のキャパシタンスと電磁トランスデューサの自己インダクタンスによる電気共振周波数を機械共振周波数に一致させることで振動制御を達成しているためである。このように、あえて共振現象を発生させることで制御対象の振動を抑える方法は、動吸振器で振動を抑制することと同様のメカニズムである。他にも電気共振現象を引き起こして振動制御を行う方法として、圧電素子と LR パッシブ回路を用いた圧電シャント制振 (Piezoelectric shunt damper) [7] がある。このように、共振型シャント回路を用いた圧電シャント制振と電磁シャント制振は動吸振器と同様の

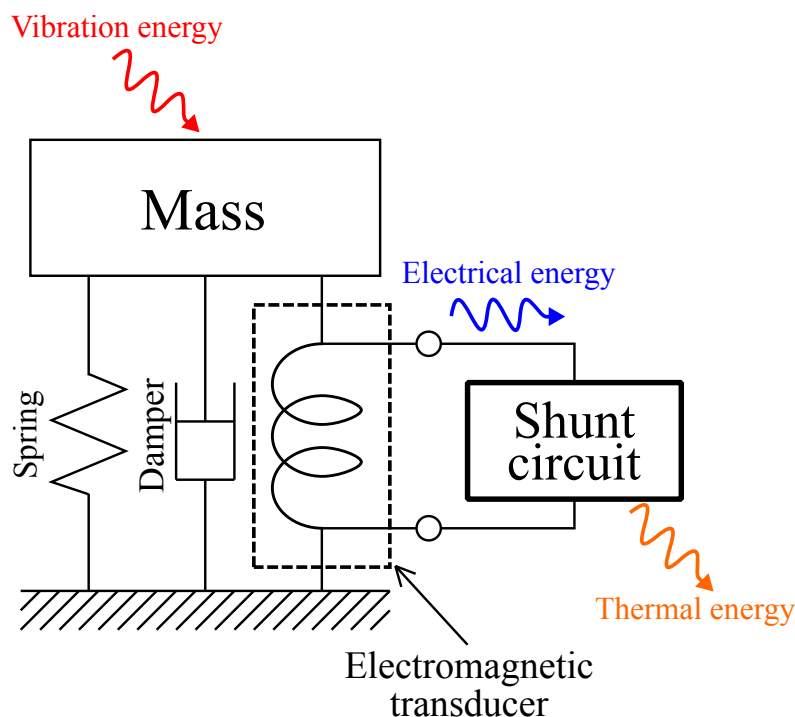


Fig.1.4: Conceptual diagram of electromagnetic shunt damper

メカニズムで振動を抑制している。動吸振器と圧電シャント制振，電磁シャント制振の設計方法については以前から議論されている。それらを比較するために，それぞれの振動制御系におけるこれまでの設計方法について以降にまとめる。

### 1.2.1 動吸振器の設計

動吸振器は振動する質量（ここでは主系と呼ぶ）に，付加的に質量とばね，ダンパを取り付けることで，主系の振動を抑える手法である．なお付加的に取り付ける質量，ばね，ダンパで構成される振動系のことを副系と呼称する．副系のばねとダンパを並列に繋いだものを Voigt 型動吸振器と呼ばれ，振動制御の分野で広く用いられている．動吸振器を設計する際，副系の質量を任意に決定した後，振動制御目標に応じて適切なばねとダンパを決める必要がある．代表的な制御目標としては，1) 主系に調和加振が加えられたときの振動振幅の最悪値の低減 [1, 49–59]，2) 主系にランダム加振が加えられたときの振動振幅の二乗平均平方根 (RMS 値) の低減 [59–62]，3) 自由振動応答の収束改善 [63–65] が挙げられる．一つ目は，伝達関数の周波数領域における最大ゲインで定義される  $H_\infty$  ノルムの最小化に相当する．二つ目は，周波数応

答関数の自乗積分の平方根で定義される  $H_2$  ノルム [66] の最小化に相当する。最後に三つ目は、系の極の実部の最大値の反数で定義される安定度 (Degree of stability) の最大化に相当する。動吸振器のばね定数と減衰係数の最適化において、簡単で基本的な手法として定点理論 (Fixed-point method) が古くから用いられている [1, 2]。この定点理論は  $H_\infty$  ノルム最小化問題を解くうえで、簡便な手法であるが近似解法に過ぎないことが報告されている [49, 50]。そこで定点理論を用いずに、厳密に  $H_\infty$  ノルムを最小化するような Voigt 型動吸振器の最適パラメータの導出方法が提案された [49–51]。また、厳密に  $H_2$  ノルムを最小化するような Voigt 型動吸振器の最適パラメータも導出されている [61, 62]。加えて文献 [63, 64] では、安定度を厳密に最大化する Voigt 型動吸振器の最適パラメータを導出している。上記は副系の質量を 1 つだけ使用した最もシンプルな動吸振器である、Voigt 型動吸振器の最適パラメータ導出方法であるが、近年では浅見や西原らによって三要素型の動吸振器 [67–70] や二重動吸振器 [71–73] の最適パラメータ導出方法も議論されている。

### 1.2.2 圧電シャント制振系の設計

圧電シャント制振は Hagood と von Flotow によって提案された圧電素子を用いた振動制御手法である [7]。圧電シャント制振は振動する構造物に貼り付けられた圧電素子の端子間にシャント回路を取り付けることで振動制御を達成する。シャント回路として抵抗とインダクタンスを一つずつ接続した回路 (LR パッシブ回路) を用いることで、動吸振器や RC パッシブ回路を用いた電磁シャント制振と同じように共振現象を引き起こして振動制御を達成する。なお抵抗とインダクタンスを並列に接続するか、直列に接続するかで制振性能が変化するため [74–77]、区別することに注意する。文献 [78, 79] において、定点理論を用いて  $H_\infty$  ノルムを近似的に最小化する、直列 LR パッシブ回路、並列 LR パッシブ回路それぞれを用いた圧電シャント制振の設計パラメータが導出された。文献 [80] は直列 LR パッシブ回路を用いた圧電シャント制振の、近似的ではなく、厳密に  $H_\infty$  ノルムを最小化する最適パラメータを導出した。文献 [7, 81] では、安定度を厳密に最大化する直列 LR パッシブ回路、並列 LR パッシブ回路それぞれを用いた圧電シャント制振の最適パラメータを導出している。

### 1.2.3 電磁シャント制振系の設計

最後に電磁シャント制振の最適設計方法の従来の研究について示す。文献 [31, 32] において、定点理論を用いて  $H_\infty$  ノルムを近似的に最小化する、直列 RC パッシブ回路を用いた電磁シャント制振のパラメータを導出された。文献 [48] は直列 RC パッシブ回路を用いた電磁シャント制振の、近似的ではなく厳密に  $H_\infty$  ノルムを最小化する最適パラメータと、 $H_2$  ノルムを最小化する最適パラメータを導出した。動吸振器と電磁シャント制振、圧電シャント制振のこれまでの設計方法について表 1.1 にまとめる。

### 1.2.4 共振型パッシブシャント回路の厳密な最適化

上記のように動吸振器においては様々な評価規範における厳密に最適となる設計方法について議論されている。しかし電磁シャント制振や圧電シャント制振においては、同様の評価規範における厳密に最適となるシャント回路の設計方法について議論されていない部分がある。そのため、実際に共振型パッシブシャント回路を用いてシャント制振を行う際に、既存の設計方法では所望の制振性能が満たされない恐れがある。

## 1.3 電磁シャント制振のためのモデル化とパラメータ推定

### 1.3.1 電磁シャント制振系のパラメータ推定

先に述べたように電磁シャント制振はシャント回路を接続するだけで振動制御を達成するため、位置や速度センサが不要となり一つのデバイスで制振が達成可能、回路調整のみで制振できるため設計が容易、受動制振であるためエネルギー供給の必要がない等の利点がある。しかし共振型シャント回路を用いた電磁シャント制振は電気共振現象を利用しているため、振動系の固有振動数や電磁トランスデューサの自己インダクタンス等といった系のパラメータ値の推定精度によって容易に制振性能が劣化するといった欠点もある。そこで、電磁トランスデューサが取り付けられた振動系の物理パラメータ値の高精度な推定が必要である。しかし系の物理パラメータ値を推定するためには、一般に加振用のアクチュエータやセンサが必要となる。例えば、固有振動数や減衰比を推定するためには、アクチュエータを制御対象に取り付けて加振

を行い、その応答を位置や速度センサを用いて計測する必要がある。また、自己インダクタンスや電気抵抗を推定するためには、制御対象が振動しないように固定して、LCR メータやインピーダンスアナライザを用いて計測する必要がある。電磁トランスデューサの電気機械変換の結合係数を推定するためには、制御対象の速度をセンサで計測しつつ、電圧センサで電磁トランスデューサの端子間電圧を計測する必要があるなど、非常にコストがかかる。そのため必要な計測機器の少ない、コストが低いパラメータ推定手法の提案が求められている。

### 1.3.2 電磁トランスデューサのモデル化

制御対象のパラメータ値を推定するためには、制御対象のモデルが必須である。振動系の機械系モデルは制御対象に依存するが、電磁トランスデューサの電気系モデルではこれまで、コイルに発生する速度起電力、コイルの内部抵抗と自己インダクタンスの直列接続で表される簡単なモデルが広く用いられてきた [8, 23, 24, 28, 29, 31–45]。また、従来研究の中には電気系モデルの精度向上を目指して、渦電流を考慮するために自己インダクタンスと並列に抵抗を加えたモデルや [16, 17]、分布的に渦電流が発生しているとしたモデルが考案されてきた [18, 19]。しかし第 4 章で示すように、上記に示したどの電気系モデルにおいても、とりわけ中高周波帯域で、計測データと十分に一致しないという問題がある。共振型パッシブシャント回路を用いた電磁シャント制振では、パラメータ値だけでなくモデル化の精度次第で制振性能が容易に変化する。そのため従来モデルを用いて推定したパラメータ値では、電磁シャント制振性能が最適化できないため、モデル化精度の高い電磁トランスデューサの電気系モデルの提案が求められている。

## 1.4 本論文の目的と構成

本論文の主な目的は次の 3 つである。1) シャント制振の最適設計方法の提案、2) 電磁シャント制振の設計に必要なパラメータ値のセンサレス推定手法の提案、3) 電磁シャント制振性能向上のための新しいモデリングの提案である。各章の概要は以下の通りである。

第 2 章で、共振型シャント回路を用いた電磁/圧電シャント制振の厳密に評価規範を最適化する設計パラメータの解析解を導出する。最適化する評価規範は、 $H_\infty$  ノルムの最小化、 $H_2$  ノルムの最小化、安定度の最大化の 3 つとする。第 2 章の具体的な

目標は、表 1.1 中で今まで調査されていない部分を表すアスタリスク \* 部を埋めることである。また従来研究では、電磁シャント制振と圧電シャント制振のどちらか一方に着目して議論されてきていたが、第 2 章では両シャント制振を包括的に扱う。初めに、共振型シャント回路を用いた両シャント制振を統一的にモデリングすることで、2 種類の外乱から変位までの無次元化伝達関数を導出する。第 2 章では性能指標として、外乱から変位だけでなく、外乱から速度や加速度への応答も扱う。そのため、3 つの性能指標と 2 つの無次元化伝達関数をに着目するため、本論文では合計 6 つの無次元化伝達関数を使用する。これまでに提案されてきた動吸振器における厳密な最適解の導出方法 [50, 62, 63] を拡張して、6 つの無次元化伝達関数の厳密に評価規範を最適化する設計パラメータの解析解を導出する。導出した設計パラメータの解析解を表にまとめ、それぞれの評価規範に基づいて最適化された時の制振特性について議論する。最後に数値事例によって厳密解の最適性を確認し、それぞれの設計パラメータにおける制振性能の違いについて議論する。第 2 章で議論した内容は文献 [82] にて公表予定である。

第 3 章で、電磁シャント制振の設計に必要な機械系、電気系、電気機械結合系の物理パラメータ値をセンサレスに同時に推定する手法を提案する。第 3 章で提案するパラメータ推定手法は、圧電シャント制振の設計に必要なパラメータ値のセンサレス推定に関する従来研究 [83, 84] を参考にしている。初めに電磁トランスデューサが取り付けられた振動系のモデル化を行い、その支配方程式から電磁トランスデューサの端子間電圧と電流の比である電気アドミタンス伝達関数を導出する。この時の電気系のモデルは、最も簡単な速度起電力とコイルの内部抵抗、自己インダクタンスが直列接続されたモデルを使用する。導出した電気アドミタンス伝達関数と計測した電気アドミタンスの周波数特性を用いることで、コイルの自己インダクタンス、内部抵抗や機械系の固有角振動数や減衰比、そして電気機械結合係数といった電磁シャント制振の設計に必要なパラメータ値が推定可能であることを示す。パラメータ値の推定方法は電気アドミタンス伝達関数と計測した周波数特性を用いて非線形最小二乗問題を定式化し、数値最適化によってこの問題を解くことで推定を行う。数値最適化を行う際に初期値が必須となるが、その適切な選定方法についても議論する。ここで推定するパラメータ値は、LCR メータや変位センサ、加振用アクチュエータ等を使用すれば、個別の推定が可能である。しかし第 3 章で提案する手法には、個別でパラメータ値を推定するよりも、短時間かつ低コストとなる利点がある。最後に推定したパラメータ値と定点理論によって設計したシャント回路を取り付けて電磁シャント制振実験を行い、パラメータ推定精度を検証する。第 3 章で議論した内容は文献 [85-87] にて公表

済みである。

第 4 章で、渦電流を考慮した電磁トランスデューサの新しい電気系モデルを提案する。渦電流のモデル化に関する従来研究 [16–19, 88] を参考にし、電磁気学の基本法則を活用してモデル化を行う。具体的には、アンペールの法則、磁場に関するガウスの法則、ファラデーの電磁誘導則といったマクスウェル方程式とオームの法則を用いることで、鉄心内部に発生する磁束密度に関する偏微分方程式を導出する。この偏微分方程式は直接伝達関数に変換することが困難であるため、次の 2 種類の物理的簡約化を考える。1 つ目は、透磁率等のパラメータが空間的に一様で、鉄心内部の渦電流が分布的に存在するといった仮定である。2 つ目は、透磁率等のパラメータが空間的に非一様であり、鉄心内部の渦電流が集中的に存在するといった仮定である。それぞれの仮定のもと、電磁トランスデューサの新しい電気系モデルを 2 種類提案する。第 3 章で提案したパラメータ推定手法を第 4 章で提案したモデルに対して拡張し、パラメータ推定実験とモデル化精度検証のための電磁シャント制振実験を行う。そして、提案モデルによる結果と従来モデルによる結果を比較することで、提案モデルの有効性を検証する。第 4 章で議論した内容は文献 [89–92] にて公表済みである。第 2, 3, 4 章の関係を表 1.2 にまとめる。

第 5 章で、本論文の結論と今後の展望を述べる。

Table 1.1: Past research on the optimization criteria of Voigt-type dynamic vibration absorbers (DVAs), electromagnetic shunt dampers (EMSDs), and piezoelectric shunt dampers (PZSDs).  $\zeta_1$  denotes the damping ratio of the primary system. The cells indicated by \* are investigated for the first time in this paper.

	Voigt-type DVAs	EMSDs		PZSDs	
		Series RC circuit	Series LR circuit	Series LR circuit	Parallel LR circuit
Fixed-point method	e.g., Den Hartog [1]	Inoue et al. [31]	Yamada et al. [78]	Yamada et al. [78]	
$H_\infty$ minimization $\zeta_1 = 0$	Nishihara & Asami [50]	Tang et al. [48]	Soltani et al. [80]		*
$H_\infty$ minimization $\zeta_1 > 0$	probably unsolvable [50]	*	*		*
$H_2$ minimization $\zeta_1 = 0$	Asami et al. [61]	Tang et al. [48]	*		*
$H_2$ minimization $\zeta_1 > 0$	Asami et al. [62]	*	*		*
Decay-rate maximization $\zeta_1 \geq 0$	Nishihara & Matsuhisa [63] Bisegna & Caruso [64]	*	Caruso [81]	Caruso [81]	Caruso [81]



Table 1.2: Summary of chapter

	Simple model	Proposed model
Modeling	Chapter 2	Chapter 4
Design of shunt circuit	Chapter 2	
Parameter estimation	Chapter 3	Chapter 4

## 第 2 章

# 電磁/圧電シャント制振の最適設計

本章では、共振型シャント回路を用いた電磁シャント制振と圧電シャント制振におけるシャント回路の最適な設計パラメータの解析解の導出方法について議論する。最適化する評価規範には、 $H_\infty$  ノルム、 $H_2$  ノルム、安定度の 3 つを使用する。評価規範を厳密に最適化するシャント回路の設計パラメータの導出方法を示し、その設計結果を表にまとめる。最後に数値事例によって、得られた設計結果の最適性を比較検討する。

### 2.1 シャント制振のモデル化

#### 2.1.1 支配方程式

■電磁シャント制振 (Electromagnetic shunt damper: EMSD) 本論文では 1 自由度振動系に電磁トランスデューサとシャント回路が取り付けられた系について考える。図 2.1(a) はインピーダンス  $Z_s$  [ $\Omega$ ] のシャント回路が取り付けられた EMSD のモデル (基本モデル) となる。電磁トランスデューサは流れる電流に比例したローレンツ力が発生させるため、運動方程式は以下のようなになる [8, 31].

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c_1 \frac{dx_1}{dt} + k_1 x_1(t) + \phi i_s(t) = f_d(t) \quad (2.1)$$

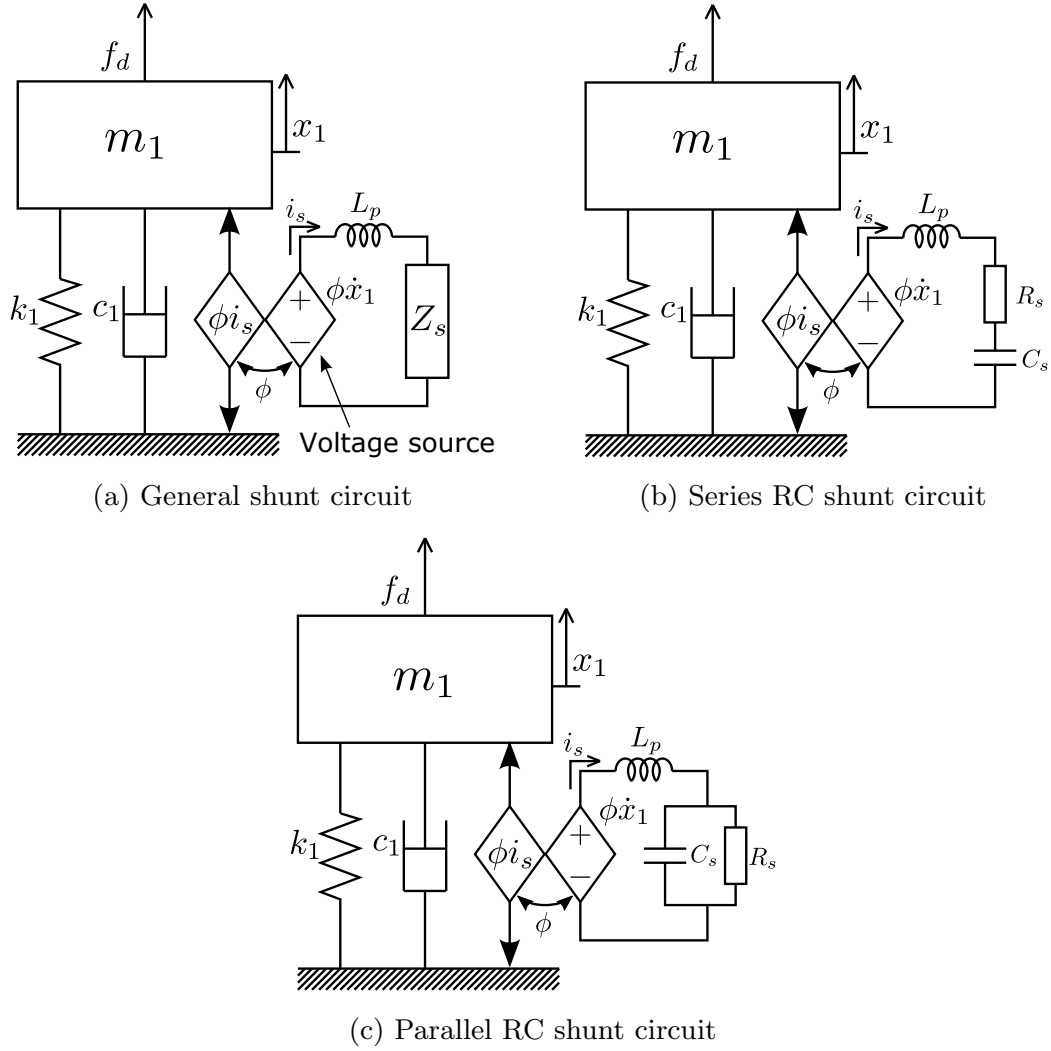


Fig.2.1: Models of the electromagnetic shunt damper (EMSD) using (a) the general shunt circuit, (b) the series RC shunt circuit, and (c) the parallel RC shunt circuit

ここで、 $m_1$  [kg],  $c_1$  [Ns/m],  $k_1$  [N/m],  $x_1(t)$  [m] はそれぞれ機械系の質量，減衰係数，ばね定数，変位を表し， $\phi$  [N/A or Vs/m] は電磁トランスデューサの電気機械結合係数， $i_s(t)$  [A] は電磁トランスデューサに流れる電流， $f_d(t)$  [N] は外乱を表す。また，電磁トランスデューサは相対速度に比例した速度起電力を発生させるため，ラプラス変換された回路方程式は以下ようになる。

$$(L_p s + Z_s(s))\tilde{i}_s(s) = \phi s \tilde{x}_1(s) \quad (2.2)$$

ここで,  $L_p$  [H] は電磁トランスデューサの自己インダクタンス,  $s$  はラプラス演算子を表す. また,  $\tilde{x}_1(s)$  や  $\tilde{i}_s(s)$  などのチルダはラプラス変換された変数を表し, 以降でも同様の表記を用いる.

ここで注意する点として, 図 1.2 からわかる通り, コイルが動くとき鉄心を通る磁路長が変化するため, 自己インダクタンス  $L_p$  は振幅に応じて非線形的に変化する [31]. そのため大振幅振動を扱う場合にはその非線形性を考慮する必要があるが, 本論文ではシャント制振によって十分に振動が抑えられるものと仮定して, 自己インダクタンス  $L_p$  の振幅依存性は考慮しないものとする. また一般に, 流れる電流が大きくなると鉄心に磁気飽和が発生し, 自己インダクタンスが小さくなることが知られている. そのため大電流が流れるような場合を扱う場合は磁気飽和による非線形性を考慮する必要があるが, 本論文では流れる電流は小さいものと仮定して, 磁気飽和による非線形性を考慮しないものとする.

本論文では共振現象を発生させるシャント回路に着目するため, EMSD ではシャント回路として直列または並列 RC 回路を用いる. 直列または並列 RC シャント回路のインピーダンスは次のようになる.

$$Z_s(s) = \begin{cases} R_s + \frac{1}{C_s s} & \text{(series)} \\ \frac{R_s}{C_s R_s s + 1} & \text{(parallel)} \end{cases} \quad (2.3)$$

ここで,  $R_s$  [ $\Omega$ ] と  $C_s$  [F] はシャント回路の抵抗とキャパシタンスを表す. 図 2.1(b) と 2.1(c) に直列 RC シャント回路と並列 RC シャント回路を用いたときの EMSD のモデルを表す. また実際には, 並列 RC シャント回路を用いた EMSD は電磁トランスデューサの内部抵抗を無視できないほど大きいことが多いため, 受動回路のみを用いたシャント回路では実現困難であることに留意せよ.

■圧電シャント制振 (Piezoelectric shunt damper: PZSD) PZSD では通常, 梁や平板などの多自由度系でモデル化される系の曲げ振動や膜振動を抑制するために用いられる. しかし, 本論文では解析の簡単化のため一つのモードのみに着目する. 図 2.2(a) はインピーダンスの逆数であるアドミタンス  $Y_s$  [S] のシャント回路が取り付けられた PZSD の基本モデルを示す. ここで  $m_1$ ,  $c_1$ ,  $k_1$ ,  $x_1(t)$ ,  $f_d(t)$  はそれぞれモード質量, モード減衰, モード弾性, モード変位, モード外乱を表す. 一貫性を保つために, PZSD で用いるパラメータの記号は EMSD のものと同一とする. 圧電素子は

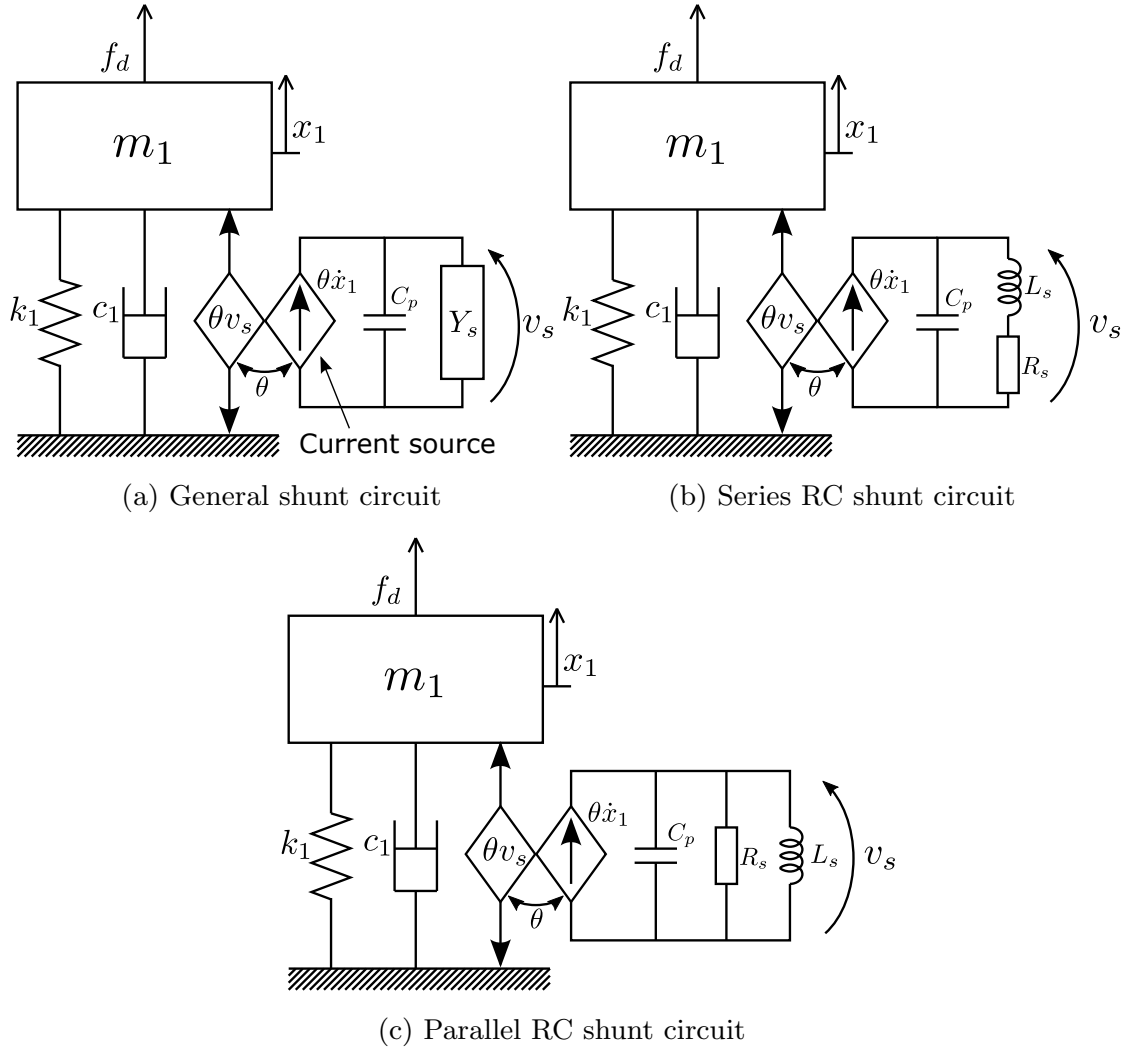


Fig.2.2: Models of the piezoelectric shunt damper (PZSD) using (a) the general shunt circuit, (b) the series LR shunt circuit, and (c) the parallel LR shunt circuit

端子間電圧に比例した力を発生させるため，運動方程式は以下のようなになる [78, 93].

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c_1 \frac{dx_1}{dt} + k_1 x_1(t) + \theta v_s(t) = f_d(t) \quad (2.4)$$

ここで  $\theta$  [N/V or As/m] は圧電素子の電気機械結合係数， $v_s(t)$  [V] は圧電素子の端子間電圧を表す．また，圧電素子はモード変位に比例した電荷を発生させるため，回路方程式は以下のようなになる [78, 93].

$$(C_p s + Y_s(s)) \tilde{v}_s(s) = \theta s \tilde{x}_1(s) \quad (2.5)$$

ここで,  $C_p$  [F] は圧電素子のキャパシタンスを表す.

本論文では共振現象を発生させるシャント回路に着目するため, PZSD ではシャント回路として直列または並列 LR 回路を用いる. 直列または並列 LR シャント回路のアドミタンスは次のようになる.

$$Y_s(s) = \begin{cases} \frac{1}{L_s s + R_s} & \text{(series)} \\ \frac{1}{L_s s} + \frac{1}{R_s} & \text{(parallel)} \end{cases} \quad (2.6)$$

ここで,  $L_s$  [H] はシャント回路の自己インダクタンスを表す. 図 2.2(b) と 2.2(c) に直列 LR シャント回路と並列 LR シャント回路を用いたときの PZSD のモデルを表す.

### 2.1.2 伝達関数

本項では EMSD と PZSD の外乱から変位までの無次元化伝達関数を示す.

■直列 RC シャント回路を用いた EMSD(Series EMSD) 式 (2.1)–(2.3) より, Series EMSD の無次元化伝達関数は以下のようなになる.

$$\frac{\tilde{x}_1(\hat{s})}{\tilde{x}_{st}(\hat{s})} = \frac{1}{\hat{s}^2 + 2\zeta_1 \hat{s} + 1 + \frac{\psi \hat{s}^2}{\hat{s}^2 + 2\zeta_s \nu \hat{s} + \nu^2}} \quad (2.7)$$

$$x_{st}(t) := \frac{f_d(t)}{k_1}, \quad \hat{s} := \frac{s}{\omega_1} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} \omega_1 := \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, & \zeta_1 := \frac{c_1}{2\sqrt{m_1 k_1}}, & \psi := \frac{\phi^2}{k_1 L_p}, \\ \omega_e := \sqrt{\frac{1}{L_p C_s}}, & \zeta_s := \frac{R_s}{2} \sqrt{\frac{C_s}{L_p}}, & \nu := \frac{\omega_e}{\omega_1}. \end{cases} \quad (2.9)$$

ここで  $\psi$  は無次元化電気機械結合係数と呼ぶ.

■並列 RC シャント回路を用いた EMSD(Parallel EMSD) 式 (2.1)–(2.3) より, Parallel EMSD の無次元化伝達関数は以下のようなになる.

$$\frac{\tilde{x}_1(\hat{s})}{\tilde{x}_{st}(\hat{s})} = \frac{1}{\hat{s}^2 + 2\zeta_1 \hat{s} + 1 + \frac{\psi(\hat{s}^2 + 2\zeta_p \nu \hat{s})}{\hat{s}^2 + 2\zeta_p \nu \hat{s} + \nu^2}} \quad (2.10)$$

$$\zeta_p := \frac{1}{2R_s} \sqrt{\frac{L_p}{C_s}} \quad (2.11)$$

■直列 LR シャント回路を用いた PZSD(Series PZSD) 式 (2.4)–(2.6) より, Series PZSD の無次元化伝達関数は以下のようになる.

$$\frac{\tilde{x}_1(\hat{s})}{\tilde{x}_{st}(\hat{s})} = \frac{1}{\hat{s}^2 + 2\zeta_1\hat{s} + 1 + \frac{\psi'(\hat{s}^2 + 2\zeta'_s\nu'\hat{s})}{\hat{s}^2 + 2\zeta'_s\nu'\hat{s} + \nu'^2}} \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} \psi' := \frac{\theta^2}{k_1 C_p}, & \omega'_e := \sqrt{\frac{1}{L_s C_p}}, \\ \zeta'_s := \frac{R_s}{2} \sqrt{\frac{C_p}{L_s}}, & \nu' := \frac{\omega'_e}{\omega_1}. \end{cases} \quad (2.13)$$

ここでパラメータに用いられているプライム  $\prime$  は PZSD の場合であることを示すために用いている.

■並列 LR シャント回路を用いた PZSD(Parallel PZSD) 式 (2.4)–(2.6) より, Parallel PZSD の無次元化伝達関数は以下のようになる.

$$\frac{\tilde{x}_1(\hat{s})}{\tilde{x}_{st}(\hat{s})} = \frac{1}{\hat{s}^2 + 2\zeta_1\hat{s} + 1 + \frac{\psi'\hat{s}^2}{\hat{s}^2 + 2\zeta'_p\nu'\hat{s} + \nu'^2}} \quad (2.14)$$

$$\zeta'_p := \frac{1}{2R_s} \sqrt{\frac{L_s}{C_p}} \quad (2.15)$$

■Voigt 型動吸振器 (Voigt-type DVA) 最後に, EMSD や PZSD との比較のために, 機械式な振動抑制装置として広く知られている Voigt 型動吸振器について示す. 図 2.3 は 1 自由度振動系に Voigt 型動吸振器が取り付けられたモデルを表し, その運動方程式は以下のように表される.

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c_1 \frac{dx_1}{dt} + k_1 x_1(t) - c_2 \left( \frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right) - k_2 (x_2(t) - x_1(t)) = f_d(t) \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + c_2 \left( \frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right) + k_2 (x_2(t) - x_1(t)) = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

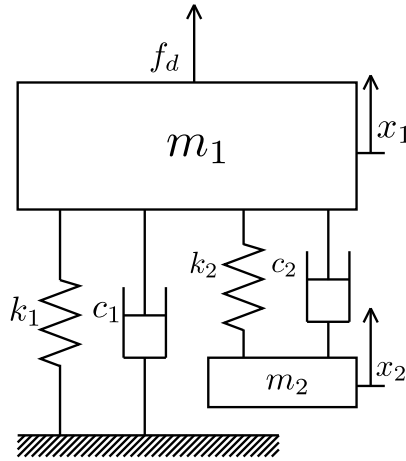


Fig.2.3: Model of the Voigt-type DVA

ここで  $m_2$  [kg],  $c_2$  [Ns/m],  $k_2$  [N/m],  $x_2(t)$  [m] はそれぞれ副系の質量, 減衰係数, ばね定数, 変位を表す. Voigt 型動吸振器における外乱から変位までの無次元化伝達関数は以下のように表される.

$$\frac{\tilde{x}_1(\hat{s})}{\tilde{x}_{st}(\hat{s})} = \frac{1}{\hat{s}^2 + 2\zeta_1\hat{s} + 1 + \frac{\mu\hat{s}^2(2\zeta_2\nu_d\hat{s} + \nu_d^2)}{\hat{s}^2 + 2\zeta_2\nu_d\hat{s} + \nu_d^2}} \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} \omega_2 := \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}, & \zeta_2 := \frac{c_2}{2\sqrt{m_2k_2}}, \\ \mu := \frac{m_2}{m_1}, & \nu_d := \frac{\omega_2}{\omega_1} \end{cases} \quad (2.18)$$

### 2.1.3 EMSD と PZSD, DVA の比較

式 (2.7) と式 (2.14) を比較すると, 無次元化パラメータの定義を除けば同一の形をしており, 言い換えると Series EMSD と Parallel PZSD は類似している. また, 式 (2.10) と式 (2.12) を比較すると同様のことが言え, Parallel EMSD と Series PZSD は類似していることがわかる. これらのことから, 共振型シャント回路を用いた EMSD と PZSD には双対の関係があることがわかる. EMSD と PZSD, DVA の関係をさらに議論するために, 以降で等価モデルと制御系の設計方法について示す.

■等価機械モデル 図 2.4 に EMSD と PZSD の機械アナロジーによって得られた等価機械モデルを示す [78, 79, 94]. 図 2.4(a) で示されるような振動抑制装置は



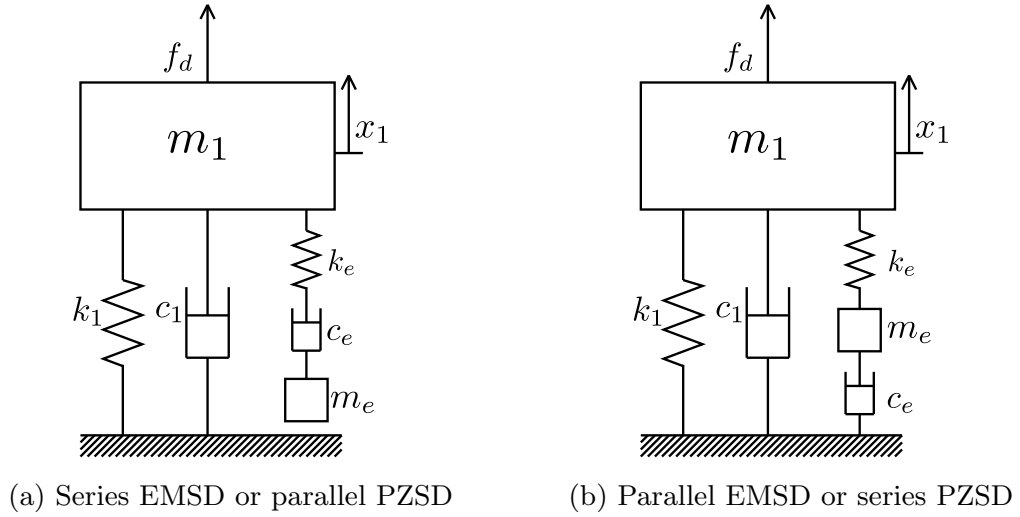


Fig.2.4: Equivalent mechanical models of the EMSD and the PZSD

Maxwell 型動吸振器 (Maxwell-type DVA) である．また，図 2.4(b) で示される振動抑制装置は Variant 動吸振器 (Variant DVA) と呼ばれ，その最適設計に関しては文献 [52, 53, 55, 60, 65] で議論されている．図中で表している等価機械パラメータ  $m_e$ ,  $c_e$ ,  $k_e$  は以下のように表される．

$$\left\{ \begin{array}{l} m_e = \phi^2 C_s \\ c_e = \frac{\phi^2}{R_s} \\ k_e = \frac{\phi^2}{L_p} \end{array} \right. \quad (\text{EMSD}) \quad (2.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_e = \theta^2 L_s \\ c_e = \theta^2 R_s \\ k_e = \frac{\theta^2}{C_p} \end{array} \right. \quad (\text{PZSD}) \quad (2.20)$$

図 2.3 と図 2.4 を比較すると，EMSD と PZSD は Voigt 型動吸振器と違うメカニズムで振動制御を行うため，これまで議論されてきた Voigt 型動吸振器の最適設計パラメータを直接 EMSD や PZSD の設計に適用できない．

■等価電気モデル 図 2.5 に電気アナロジーによって得られた EMSD と PZSD の等価電気モデルを示す．図中で表している等価電気パラメータ  $L_e$ ,  $R_e$ ,  $C_e$ ,  $i_f$ ,  $v_f$  は

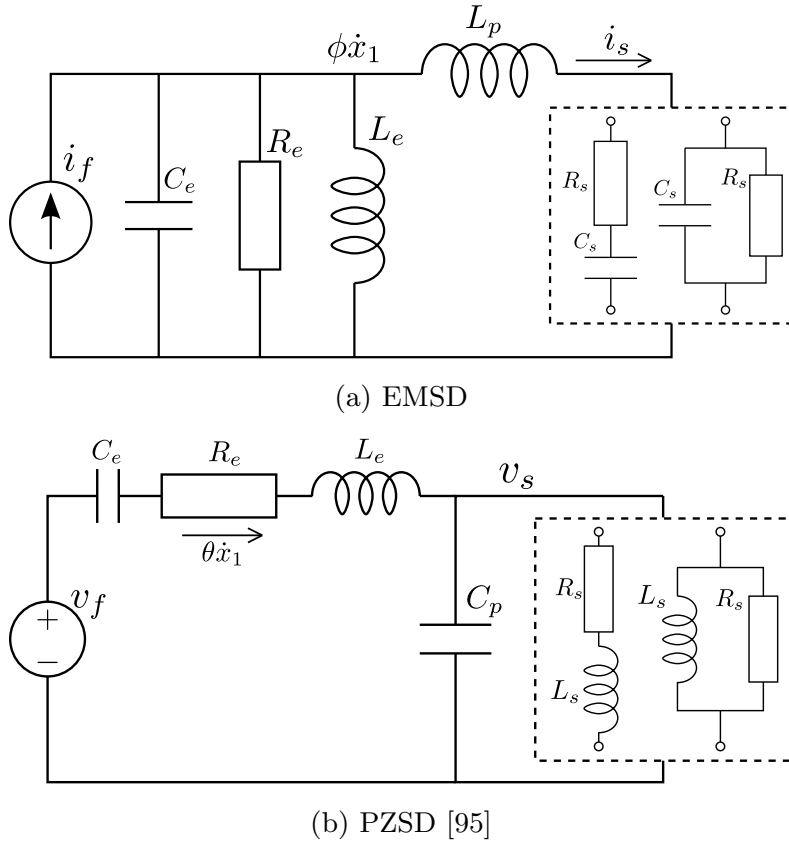


Fig.2.5: Equivalent electrical models of the EMSD and the PZSD

以下のように表される.

$$\begin{cases} L_e = \frac{\phi^2}{k_1}, & R_e = \frac{\phi^2}{c_1} \\ C_e = \frac{m_1}{\phi^2}, & i_f = \frac{f_d}{\phi} \end{cases} \quad \text{(EMSD)} \quad (2.21)$$

$$\begin{cases} L_e = \frac{m_1}{\theta^2}, & R_e = \frac{c_1}{\theta^2} \\ C_e = \frac{1}{k_1}, & v_f = \frac{f_d}{\theta} \end{cases} \quad \text{(PZSD)} \quad (2.22)$$

■制御系の設計方法 Voigt 型動吸振器や Variant 動吸振器の最適パラメータは質量比  $\mu := m_2/m_1$  によって求められる [1, 49–53, 55, 60–65]. 一方, 例えば文献 [7, 31] のように, EMSD や PZSD は質量比  $\mu$  ではなく, 無次元化電気機械結合係数  $\psi$  によって求められる. ここで式 (2.9) や式 (2.13) の定義と式 (2.19) と式 (2.20) の等価

パラメータに着目すると，無次元化電気機械結合係数は等価剛性比  $\psi = k_e/k_1$  と見なすことができる [95]．よって，シャント回路のパラメータ設計に用いる無次元化定数の物理的意味が異なることから，機械式動吸振器の最適設計方法は EMSD や PZSD に直接適用できない．

#### 2.1.4 EMSD と PZSD の無次元化伝達関数

本章の目的は式 (2.7)，式 (2.10)，式 (2.12)，式 (2.14) で示される 4 つの伝達関数における設計パラメータの最適解を求めることである．しかし前述のとおり，この 4 つの伝達関数は実質 2 つの形式である．そこで本章で着目する無次元化伝達関数を以下のように定義する．

$$G_a(\hat{s}) := \frac{1}{\hat{s}^2 + 2\zeta_1\hat{s} + 1 + \frac{\psi\hat{s}^2}{\hat{s}^2 + 2\zeta\nu\hat{s} + \nu^2}} \quad (2.23)$$

$$G_b(\hat{s}) := \frac{1}{\hat{s}^2 + 2\zeta_1\hat{s} + 1 + \frac{\psi(\hat{s}^2 + 2\zeta\nu\hat{s})}{\hat{s}^2 + 2\zeta\nu\hat{s} + \nu^2}} \quad (2.24)$$

ここで， $\nu$  は電気系と機械系の固有振動数比， $\zeta$  は電気系の減衰比である．ここで留意したい点は  $\nu$  と  $\zeta$  が設計するパラメータで， $\psi$  と  $\zeta_1$  は与えられたパラメータである．以降表記の簡約化のため，次の伝達関数を定義する．

$$G(\hat{s}) := \hat{s}^n G_i(\hat{s}), \quad (i = a, b; n = 0, 1, 2) \quad (2.25)$$

$G(\hat{s})$  は  $n$  の値によってコンプライアンス，モビリティ，アクセラランスのどれかに相当する．次節では式 (2.25) の表記を用いて，設計パラメータである  $\nu$  と  $\zeta$  の最適化に用いる 4 つの評価規範について議論する．

なお，最適化された無次元化パラメータ  $\nu_{\text{opt}}$  と  $\zeta_{\text{opt}}$  と有次元のシャント回路の最適パラメータ  $C_s^{\text{opt}}, R_s^{\text{opt}}$  (EMSD),  $L_s^{\text{opt}}, R_s^{\text{opt}}$  (PZSD) には式 (2.9)，式 (2.11)，式 (2.13)，式 (2.15) を用いるとことで以下の関係式が得られる．

$$\begin{cases} C_s^{\text{opt}} = \frac{1}{L_p\omega_1^2\nu_{\text{opt}}^2} \\ R_s^{\text{opt}} = \begin{cases} 2L_p\omega_1\nu_{\text{opt}}\zeta_{\text{opt}} & \text{(series)} \\ \frac{L_p\omega_1\nu_{\text{opt}}\zeta_{\text{opt}}}{2} & \text{(parallel)} \end{cases} \end{cases} \quad \text{(EMSD)} \quad (2.26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_s^{\text{opt}} = \frac{1}{C_p \omega_1^2 \nu_{\text{opt}}^2} \\ R_s^{\text{opt}} = \begin{cases} \frac{2\zeta_{\text{opt}}}{C_p \omega_1 \nu_{\text{opt}}} & \text{(series)} \\ \frac{1}{2C_p \omega_1 \nu_{\text{opt}} \zeta_{\text{opt}}} & \text{(parallel)} \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{(PZSD)} \quad (2.27)$$

実際にシャント回路を設計する際は、上式を用いてシャント回路の抵抗値やキャパシタンス、インダクタンスを決める必要があることに注意する。

## 2.2 シャント回路設計の評価規範

### 2.2.1 定点理論 (準 $H_\infty$ ノルム最小化)

Voigt 型動吸振器におけるシンプルな最適パラメータの導出方法として定点理論がよく知られている [1, 2]。この方法の目的は数値最適化を用いずに系の  $H_\infty$  ノルムを最小化することである。これまで文献 [31, 78] 等が、EMSD や PZSD に対して定点理論を適用してシャント回路の設計を行っている。定点理論による設計パラメータの解析解の導出手順を以下に示す。

1. 主系の減衰比が存在すると定点が存在しないため、ここでは  $\zeta_1 = 0$  とする。
2.  $\nu$  を任意の値に固定した時、電気系の減衰比  $\zeta$  の値に寄らず共振曲線が必ず通る点、つまり定点 (Fixed-point) が存在する。その定点の周波数比  $\lambda_P, \lambda_Q$  を求める際、以下のように  $\zeta = 0$  と  $\zeta = \infty$  の時を考えると良い。

$$(\lambda_P, \lambda_Q) = \left\{ \lambda \text{ s.t. } \left| G(j\lambda) \right|_{\zeta=0} = \left| G(j\lambda) \right|_{\zeta=\infty} \right\} \quad (2.28)$$

ここで、 $\lambda := \omega/\omega_1$ ,  $j$  は虚数単位を表す。

3. 2つの定点における振幅の大きさが一致するような最適固有振動数比  $\nu_{\text{opt}}$  を決める。つまり  $\nu_{\text{opt}}$  は以下の式で表される。

$$\nu_{\text{opt}} = \left\{ \nu \text{ s.t. } |G(j\lambda_P)| = |G(j\lambda_Q)| \right\} \quad (2.29)$$

4. 2つの定点にて共振曲線の頂点に来るように最適減衰比  $\zeta_{\text{opt}}$  を決める。つまり  $\zeta_{\text{opt}}$  は以下の式で表される。

$$\zeta_{\text{opt}} = \left\{ \zeta \text{ s.t. } \left. \frac{\partial |G(j\lambda)|}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_P} = 0 \text{ and } \left. \frac{\partial |G(j\lambda)|}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_Q} = 0 \right\} \quad (2.30)$$

しかし、2つの共振曲線の頂点が必ずしも2つの定点に同時に存在するとは限らない。そのため、従来研究では最適減衰比  $\zeta_{\text{opt}}$  を求める際に相加平均、相乗平均、二乗平均平方根 (Root mean square: RMS) などを用いて近似している [31, 78]。つまり以下の式で表される。

$$(\zeta_{\text{opt1}}, \zeta_{\text{opt2}}) = \left\{ \zeta \text{ s.t. } \left. \frac{\partial |G(j\lambda)|}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_P} = 0 \text{ or } \left. \frac{\partial |G(j\lambda)|}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_Q} = 0 \right\} \quad (2.31)$$

$$\zeta_{\text{opt}} = \frac{\zeta_{\text{opt1}} + \zeta_{\text{opt2}}}{2} \text{ or } \sqrt{\zeta_{\text{opt1}}\zeta_{\text{opt2}}} \text{ or } \sqrt{\frac{\zeta_{\text{opt1}}^2 + \zeta_{\text{opt2}}^2}{2}} \quad (2.32)$$

このように厳密な最適解が得られず平均を用いて求めるため、定点理論は厳密に  $H_\infty$  ノルムを最小化しているわけではなく、準最適な設計手法である。なお本章では、得られる近似解の表記が簡潔となるため、RMS を用いて近似解を導出することとする。

## 2.2.2 $H_\infty$ ノルム最小化規範

本項では  $H_\infty$  ノルムの最小化規範、以降では  $H_\infty$  規範と呼ぶ、に基づく厳密解の導出方法について述べる。 $H_\infty$  ノルムの最小化問題は以下のように表される。

$$(\nu_{\text{opt}}, \zeta_{\text{opt}}) = \underset{\nu, \zeta}{\operatorname{argmin}} \|G(\hat{s})\|_\infty \quad (2.33)$$

式 (2.33) は通常、解析的ではなく数値計算ソフトウェアによって数値的に解かれる。しかし、西原や浅見らは  $H_\infty$  規範に基づく Voigt 型動吸振器の厳密解を解析的に導出した [49–51]。本項では彼らの方法論を EMSD と PZSD に拡張し、式 (2.25) の  $H_\infty$  ノルムを最小にする厳密解を解析的に導出する。

初めに Voigt 型動吸振器を例に、文献 [49–51] による  $H_\infty$  ノルム最小化と定点理論による  $H_\infty$  ノルム最小化との違いを直感的に説明する。文献 [49–51] では、減衰が大きすぎない場合、Voigt 型動吸振の共振曲線には2つの頂点が存在するため、その2つの頂点の大きさが一致した条件が  $H_\infty$  ノルム最小化の必要条件であると考え、その解析解を導出している。その結果、多くの場合で2つの共振曲線の頂点の大きさが一致する条件が  $H_\infty$  ノルム最小化の必要十分条件であることがわかり、その導出した解を最適解としている。定点理論では、主系の減衰がなく、ばね定数のある値に定めた際の共振曲線には必ず通る2つの点（定点）を解析的に求め、2つの定点の大きさを一致させるようにばね定数を調整し、2つの定点と2つの共振曲線の頂点が一致

するように減衰係数を調整する。しかし、多くの場合で 2 つの定点と 2 つの共振曲線の頂点が同時に一致することはなく、相加平均などの近似を用いて導出する。このように、文献 [49–51] では  $H_\infty$  ノルムと関係の深い共振曲線の頂点に着目しているのに対し、定点理論では  $H_\infty$  ノルムと比較的関係の薄い定点に着目しているという点に違いがあることに留意しておきたい。以降で  $H_\infty$  規範に基づく厳密解導出の手順を以下に示す。

初めに主系の減衰比を無視する。この理由は Voigt 型動吸振器において、主系の減衰比が存在する場合の厳密解が求められないからであり [49–51]、本章でも主系の減衰比を考慮した厳密解を導出できなかったためである。 $|G(j\lambda)|^2$  の分子多項式、分母多項式を以下のように  $N(\lambda)$ 、 $D(\lambda)$  で表す。

$$|G(j\lambda)|^2 = \frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} \quad (2.34)$$

2 つの共振曲線の頂点の大きさが一致する条件は以下の式で表される。

$$\frac{N(\lambda_A)}{D(\lambda_A)} = \frac{N(\lambda_B)}{D(\lambda_B)} = h^2 \quad (2.35)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} \right|_{\lambda=\lambda_A} = \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} \right|_{\lambda=\lambda_B} = 0 \quad (2.36)$$

ここで、 $\lambda_A$  と  $\lambda_B$  は共振周波数比、 $h$  は共振周波数比における  $G(j\lambda)$  の大きさを表す。 $D(\lambda_A) \neq 0$ 、 $D(\lambda_B) \neq 0$  であるため、式 (2.36) は以下のように書くこともできる。

$$\left( \frac{\partial N}{\partial \lambda} - \frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} \frac{\partial D}{\partial \lambda} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_A} = \left( \frac{\partial N}{\partial \lambda} - \frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} \frac{\partial D}{\partial \lambda} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_B} = 0 \quad (2.37)$$

ここで  $F(\lambda)$  を次のように定義する。

$$F(\lambda) := D(\lambda) - \frac{N(\lambda)}{h^2} \quad (2.38)$$

$$= \lambda^8 + b_1 \lambda^6 + b_2 \lambda^4 + b_3 \lambda^2 + b_4 \quad (2.39)$$

ここで、 $b_1, \dots, b_4$  は多項式の係数である。式 (2.35) より、 $F(\lambda_A) = 0$  かつ  $F(\lambda_B) = 0$  であることがわかる。また、式 (2.37) より、 $\partial F / \partial \lambda|_{\lambda=\lambda_A} = 0$  かつ  $\partial F / \partial \lambda|_{\lambda=\lambda_B} = 0$  であることがわかる。これらのことから、 $F(\lambda)$  は次のように因数分解できる [50]。

$$F(\lambda) = (\lambda^2 - \lambda_A^2)^2 (\lambda^2 - \lambda_B^2)^2 \quad (2.40)$$

式 (2.39) と式 (2.40) の係数を比較することで、以下の条件式が得られる [49, 50].

$$F_1 = 0, F_2 = 0 \quad (2.41)$$

$$F_1 := b_1\sqrt{b_4} - b_3 \quad (2.42)$$

$$F_2 := \frac{b_1^2}{4} + 2\sqrt{b_4} - b_2 \quad (2.43)$$

以上のことをまとめると、式 (2.33) は以下のように書き直すことができる.

$$(\nu_{\text{opt}}, \zeta_{\text{opt}}) = \underset{\nu, \zeta}{\operatorname{argmin}} h \text{ s.t. } F_1 = 0, F_2 = 0 \quad (2.44)$$

式 (2.44) で示される最適化問題を解く方法について議論する. なお, それぞれの  $G(\hat{s})$  に関する  $F_1$  と  $F_2$  は付録 A に示す. 導出の簡単化のため,  $r^2 = 1 - 1/h^2$ ,  $0 < r < 1$  を導入する. 以降では,  $G(\hat{s}) = \hat{s}G_b(\hat{s})$  を例にとり, 方法論を説明する.  $G(\hat{s}) = \hat{s}G_b(\hat{s})$  の  $F_1$  と  $F_2$  は式 (A.4) に示す.

1.  $F_1 = 0$  を  $\zeta^2$  に関して解くことで以下のように  $\zeta^2$  を得る.

$$\zeta^2 = \frac{(1 - r^2)(1 - \nu^2)}{4(\nu^2 - (1 + \psi)^2)} \quad (2.45)$$

2. 式 (2.45) を  $F_2$  に代入することで以下の方程式を得る.

$$F_2 = a_4\nu^8 + a_3\nu^6 + a_2\nu^4 + a_1\nu^2 + a_0 \quad (2.46)$$

$$\begin{cases} a_4 = r^2 - 5 \\ a_3 = 4(5 - r^2 + 3\psi + \psi^2) \\ a_2 = 2r^2(3 + 2\psi + \psi^2) - 2(15 + 24\psi + 13\psi^2 + 2\psi^3) \\ a_1 = 4(1 + \psi)^2(5 - r^2 + 5\psi + \psi^2) \\ a_0 = (1 + \psi)^4(r^2 - 5 - 4\psi) \end{cases} \quad (2.47)$$

3. 式 (2.46) が重根を持たなければならないため,  $F_2$  と  $\partial F_2 / \partial \nu^2$  の終結式 (Resultant) が零になる必要がある (詳しくは文献 [49, 50] 中の 2.4, 2.5 節を参照せよ). 式で表すと以下ようになる.

$$\operatorname{Res}\left(F_2, \frac{\partial F_2}{\partial \nu^2}\right) = 0 \quad (2.48)$$

$\operatorname{Res}(\cdot, \cdot)$  は終結式を表す. 上式に式 (2.46) を代入すると以下の関係式が得られる.

$$r^4(2 + \psi) - 2r^2(2 + \psi)(3 + 2\psi) + 10 + 9\psi - 4\psi^2 - 4\psi^3 = 0 \quad (2.49)$$

4. 式 (2.49) を満たす解の内,  $r_{\text{opt}}$  で表す正の解は以下のように得られる.

$$r_{\text{opt}} = \sqrt{3 + 2\psi - 2\sqrt{\frac{2(1 + \psi)^3}{2 + \psi}}} \quad (2.50)$$

5. 得られた  $r_{\text{opt}}$  を用いると式 (2.46) は重根を持つので, 式 (2.46) は次のように因数分解される.

$$F_2 = (\nu^2 - \alpha_\infty^2)^2 (\nu^2 + 2\beta_\infty\nu + \beta_\infty^2 + \gamma_\infty^2) (\nu^2 - 2\beta_\infty\nu + \beta_\infty^2 + \gamma_\infty^2) \quad (2.51)$$

$$\alpha_\infty = \frac{1 + \psi}{\sqrt{\sqrt{2(1 + \psi)(2 + \psi)} - (1 + \psi)}} \quad (2.52)$$

$$\beta_\infty = \sqrt{1 + \frac{\psi}{2}} \quad (2.53)$$

$$\gamma_\infty = \sqrt{\frac{\psi}{2}} \quad (2.54)$$

式 (2.51) の根の内,  $\nu = \alpha_\infty$  が唯一の正根である. そのため最適な  $\nu$  は次のように表される.

$$\nu_{\text{opt}} = \frac{1 + \psi}{\sqrt{\sqrt{2(1 + \psi)(2 + \psi)} - (1 + \psi)}} \quad (2.55)$$

6. 式 (2.50) と式 (2.55) を式 (2.45) に代入することで, 最適なくは以下のように得られる.

$$\zeta_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2(1 + \psi)(2 + \psi)}}} \quad (2.56)$$

$G(\hat{s}) = \hat{s}G_b(\hat{s})$  以外の場合でも同様の手順を用いることで解を得ることができる. すべての場合における厳密解を 2.3 節にまとめる.

### 2.2.3 $H_2$ ノルム最小化規範

$H_\infty$  規範は周波数領域における最大振幅を最小化することを目的としている. しかし, 主系にランダム加振が与えられている時の振動振幅の RMS 値を用いて評価する場合,  $H_2$  ノルムで評価する方が適切である. Asami ら [62] は Voigt 型動吸振器にお



ける  $H_2$  規範に基づく最適解を導出した。本項は彼らの方法論を EMSD と PZSD に拡張し、式 (2.25) の  $H_2$  ノルムを最小にする厳密解を導出する。

$H_2$  ノルム最小化問題を以下のように  $H_2$  ノルムの二乗を用いて定式化する。

$$(\nu_{\text{opt}}, \zeta_{\text{opt}}) = \underset{\nu, \zeta}{\operatorname{argmin}} I \quad (2.57)$$

$$I := \|G\|_2^2 \quad (2.58)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\lambda)|^2 d\lambda \quad (2.59)$$

以下に式 (2.57) で表される最適化問題を解く方法を示す。

1. 初めに式 (2.59) の  $H_2$  ノルムの二乗を有理関数を用いて解析的に導出する。導出方法は付録 B.1 に示す。有理関数で表されたそれぞれの系の  $H_2$  ノルムの二乗、つまり評価関数  $I$  は付録 B.2 に示す。
2. 式 (2.57) の必要条件は  $I$  の偏導関数が零であることであるため、以下の式で表される。

$$(\nu_{\text{opt}}, \zeta_{\text{opt}}) = \left\{ (\nu, \zeta) \text{ s.t. } \frac{\partial I}{\partial \nu} = 0 \text{ and } \frac{\partial I}{\partial \zeta} = 0 \right\} \quad (2.60)$$

3. 上記の必要条件を簡単化することで 2 つの条件式  $F_3 = 0$  と  $F_4 = 0$  を求める。ここで求めた  $F_3$  と  $F_4$  は付録 B.2 に示す。

$$(\nu_{\text{opt}}, \zeta_{\text{opt}}) = \{(\nu, \zeta) \text{ s.t. } F_3 = 0 \text{ and } F_4 = 0\} \quad (2.61)$$

4.  $\nu_{\text{opt}}$  と  $\zeta_{\text{opt}}$  を求めるために、 $F_3 = 0$  と  $F_4 = 0$  の代数連立方程式を、 $\nu_{\text{opt}}$ 、 $\zeta_{\text{opt}}$ 、 $\psi$  が正値、 $\zeta_1$  が非負値という拘束条件下で解く。もし、 $\nu_{\text{opt}}$  や  $\zeta_{\text{opt}}$  が一意に決まらない場合は、 $\zeta_1$  と  $\psi$  の大きさに適切な拘束を加える。

## 2.2.4 安定度最大化規範

$H_\infty$  規範や  $H_2$  規範は周波数領域における性能評価には適している。一方、時間領域における性能、つまり系の自由振動の収束速度を評価するためには、安定度の最大化を目的とすることが適している。安定度とは安定な系の極の内、虚軸に最も近い極の実部の反数である。なお文献 [64, 81] ではこの規範のことを、指数的時間減衰

率 (Exponential time decay rate) の最大化規範と呼称しているが、本論文では安定度最大化規範、以降では省略して安定度規範と呼ぶ。Hagoood と von Flotow [7] や Caruso [81] は安定度規範に基づく Series PZSD と Parallel PZSD の最適パラメータの厳密解を導出した。本項では周波数領域の規範と比較するために、安定度最大化問題の定式化とその導出方法を示す。

安定度規範に基づく厳密解は極配置法 (Pole placement technique) を用いて求める [7, 81]。安定度規範は虚軸に最も近い系の極の実部の反数が最大となることと解釈できるため、安定度最大化問題は次のように定式化される。

$$(\nu_{\text{opt}}, \zeta_{\text{opt}}) = \underset{\nu, \zeta}{\operatorname{argmax}} \Lambda \quad (2.62)$$

$$\Lambda := - \max_i \operatorname{Re}(\hat{p}_i) \text{ s.t. } \hat{p}_i \in \{\hat{s} | D(\hat{s}) = 0\} \quad (2.63)$$

ここで  $\Lambda$  は安定度、 $D(\hat{s})$  は式 (2.25) で与えられた伝達関数の分母多項式、 $\operatorname{Re}(\hat{p})$  は極  $\hat{p}$  の実部を表す。式 (2.62) の問題の解法を以下に示す。

1. ここで  $D(\hat{s})$  が 2 つの共役な複素根を持つとすると、この最適化問題は  $D(\hat{s})$  が 2 つの複素根が重根を持つようにすることと解釈できる。くわしくは付録 C を参照せよ。そのため  $D(\hat{s})$  は次のように因数分解できる。

$$D(\hat{s}) = (\hat{s}^2 - 2\alpha_d \hat{s} + \alpha_d^2 + \beta_d^2)^2 \quad (2.64)$$

ここで、 $\alpha_d$  と  $\beta_d$  は実数である。

2. 式 (2.64) の係数と式 (2.25) の分母多項式の係数を比較すると、4 つの代数連立方程式が得られる。得られた連立方程式から  $\alpha_d$  と  $\beta_d$  を消去することで、最適パラメータ  $\nu_{\text{opt}}$ ,  $\zeta_{\text{opt}}$  を得る。

## 2.3 提案した評価規範による厳密解

前節で 4 つの設計規範を与え、それぞれの規範を厳密に最適化する解析解の導出方法を示した。本節では、得られた最適パラメータを着目する性能指標、つまりコンプライアンス、モビリティ、アクセラランス、安定度に分けて表にまとめる。

本論文では最適パラメータを解析的に導出するために *Mathematica 11.3* を使用した。本節では唯一の厳密解を決定するために、 $\zeta_1$  と  $\psi$  には  $0 \leq \zeta_1 < 0.15$ ,  $0 < \psi < 1$  といった制約を与える。この  $\zeta_1$  の制約は、大きな減衰 ( $\zeta_1 \geq 0.15$ ) を持つ系では振動制御を考える必要がないと考えることができるため適切である。また、 $\psi$  の制約は、

過去の研究において  $\psi$  の値が 0.22 [8], 0.02 [31], 0.025 [7], 0.004 [78], 0.0079 [81] のように計算できるため, 適切な範囲であることがわかる. この制約外, つまり  $\zeta_1 \geq 0.15$  または  $\psi \geq 1$  では本節で示す解と異なる解を持つかもしれないが, 本章では振動制御問題に着目するため,  $0 \leq \zeta_1 < 0.15$ ,  $0 < \psi < 1$  の制約下での解のみを考える.

### 2.3.1 コンプライアンス ( $G_a$ , $G_b$ )

表 2.1-2.3 に定点理論,  $H_\infty$  規範, 主系の減衰の有無を考慮した  $H_2$  規範に基づく, コンプライアンスを最適化する厳密解を示す. 定点理論による解は文献 [78] によって,  $H_\infty$  規範による最適解は文献 [48, 80] によって, 主系の減衰を考慮しない Series EMSD の  $H_2$  規範による最適解は文献 [48] によって, すでに議論されている. 本項で初めて, 主系の減衰を考慮した  $G_a$  に関する  $H_2$  規範に基づく厳密解と, 主系の減衰の有無を考慮した  $G_b$  に関する  $H_2$  規範に基づく厳密解を示す. また表 2.2 中の  $r_{\text{opt}}$  の厳密解は長く, 工学的に現実的ではないため,  $r_{\text{opt}}$  の近似解について付録 D で議論する.

### 2.3.2 モビリティ ( $\hat{s}G_a$ , $\hat{s}G_b$ )

表 2.4, 表 2.5 に定点理論, 主系の減衰の有無を考慮した  $H_\infty$  規範, 主系の減衰の有無を考慮した  $H_2$  規範に基づく, モビリティを最適化する厳密解を示す. 定点理論による解は文献 [78] にてすでに議論されている. 本項で初めて,  $\hat{s}G_a$  と  $\hat{s}G_b$  に関する  $H_\infty$  規範に基づく厳密解と, 主系の減衰の有無を考慮した  $\hat{s}G_a$  と  $\hat{s}G_b$  に関する  $H_2$  規範に基づく厳密解を初めて示す. 表 2.4 中の  $\hat{s}G_a$ , つまり Series EMSD や Parallel PZSD では次のような特別な特徴がある.

- $H_2$  規範による最適パラメータは主系の減衰の考慮の有無に依存しない.
- 定点理論による解は  $H_\infty$  規範に基づく解と一致する. つまり,  $\hat{s}G_a$  においてのみ, 定点理論は準最適ではなく, 最適な設計方法である.
- もし主系の減衰があるときは, Voigt 型動吸振器や  $\hat{s}G_a$  以外の場合では,  $H_\infty$  規範に基づく厳密に最適な解析解はおそらく求められない. しかし  $\hat{s}G_a$  においてのみ, 主系の減衰がある場合でも  $H_\infty$  規範に基づく厳密に最適な解析解を求めることができる.

### 2.3.3 アクセランス ( $\hat{s}^2 G_a$ , $\hat{s}^2 G_b$ )

表 2.6 に定点理論,  $H_\infty$  規範に基づく, アクセランスを最適化する厳密解を示す. なおアクセランスに関する伝達関数では周波数が無限大の時にゲインが非零となるため,  $H_2$  ノルムの定義より, アクセランスの  $H_2$  ノルムは無限となる. そのため, 本項では  $H_2$  規範を考えない. 定点理論による解は文献 [78] にてすでに議論されている. 本項で初めて,  $\hat{s}^2 G_a$  と  $\hat{s}^2 G_b$  に関する  $H_\infty$  規範に基づく厳密解を示す.

### 2.3.4 安定度

前項までは周波数領域の性能に関して示したが, 安定度規範は時間領域の性能に基づいている. 表 2.7 に安定度規範に基づく厳密解を示すが, これらの解はすでに文献 [7, 81] によって議論されている.

Table 2.1: Exact solutions for the case of compliance,  $G_a$  or  $G_b$ , optimized by the following methods: the fixed-point method, the  $H_\infty$  criterion, and the  $H_2$  criterion with and without consideration of the primary damping

	$G_a$ (Series EMSD & Parallel PZSD)	$G_b$ (Parallel EMSD & Series PZSD)
Fixed-point	$\nu_{\text{opt}}$	$\sqrt{1+\psi}$ , in [78]
	$\zeta_{\text{opt}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\psi}{2-\psi}}$ , in [78]
$H_\infty$	$\nu_{\text{opt}}$	$\frac{\sqrt{8+3\psi-4r_{\text{opt}}^2}}{2}$ , in [80]
	$\zeta_{\text{opt}}$	$\frac{\sqrt{64+80\psi+27\psi^2-16r_{\text{opt}}(4+3\psi)}}{(8+5\psi)\sqrt{2}}$ , in [80]
$\zeta_1 = 0$	$\nu_{\text{opt}}$	$\frac{2r_{\text{opt}} - \psi + \sqrt{16r_{\text{opt}}^2 - 4r_{\text{opt}}\psi + \psi^2}}{6}$ , in [48]
	$\zeta_{\text{opt}}$	$\frac{(r_{\text{opt}} - 1)(3r_{\text{opt}} - 2\psi)}{r_{\text{opt}}(2r_{\text{opt}} + \psi - \sqrt{16r_{\text{opt}}^2 - 4r_{\text{opt}}\psi + \psi^2})}$ , in [48]
$H_2$	$r_{\text{opt}}$	$\frac{\sqrt{64-16\psi-26\psi^2}-\psi}{8}$ , in [80]
	$\nu_{\text{opt}}$	$\sqrt{1+\psi}$
$\zeta_1 = 0$	$\zeta_{\text{opt}}$	$\frac{\sqrt{\psi}}{2}$
	$\nu_{\text{opt}}$	$\sqrt{\frac{2\zeta_1^4 - \zeta_1^2(3+2\psi) + 1 + \psi - \zeta_1\sqrt{\psi(1-\zeta_1^2+\psi)}}{1-\zeta_1^2}}$
$\zeta_1 > 0$	$\zeta_{\text{opt}}$	$\frac{1-2\zeta_1^2-\nu_{\text{opt}}^2+\psi}{2\zeta_1\nu_{\text{opt}}}$

Table 2.2: Complement of Table 2.1. The exact solution for  $r_{\text{opt}}$  is the positive solution of  $a_0 r^4 + a_1 r^3 + a_2 r^2 + a_3 r + a_4 = 0$ .

$$\begin{aligned}
 r_{\text{opt}} &= -\frac{a_1}{4a_0} + \frac{A_3}{2} + \frac{\sqrt{A_1 + A_2}}{2} \\
 A_1 &= \frac{3a_1^2 A_4 - 2a_0(4a_2 A_4 + A_4^2 + A_5)}{6a_0^2 A_4} \\
 A_2 &= -\frac{8a_0^2 a_3 - 4a_0 a_1 a_2 + a_1^3}{4a_0^3 A_3} \\
 A_3 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a_1^2}{a_0^2} + \frac{4(-2a_2 A_4 + A_4^2 + A_5)}{3a_0 A_4}} \\
 A_4 &= \sqrt[3]{\frac{\sqrt{A_6^2 - 4A_5^3} + A_6}{2}} \\
 A_5 &= 12a_0 a_4 - 3a_1 a_3 + a_2^2 \\
 A_6 &= 27(a_0 a_3^2 + a_1^2 a_4) - 9a_2(a_1 a_3 + 8a_0 a_4) + 2a_2^3 \\
 a_0 &= 64 \\
 a_1 &= -16\psi \\
 a_2 &= -64 + 16\psi + 11\psi^2 \\
 a_3 &= 2\psi(8 - \psi)(2 - \psi) \\
 a_4 &= -2\psi^2(2 - \psi)
 \end{aligned}$$

Table 2.3: Complement of Table 2.1. The exact solution for  $\nu_{\text{opt}}$  is the positive solution of  $a_0 \nu^6 + a_1 \nu^4 + a_2 \nu^2 + a_3 = 0$ .

$$\begin{aligned}
 \nu_{\text{opt}} &= \sqrt{w^2 \frac{A_1}{3a_0} - w \frac{3a_0 a_2 - a_1^2}{3a_0 A_1} - \frac{a_1}{3a_0}} \\
 w &= \frac{-1 + \sqrt{3i}}{2} \\
 A_1 &= \sqrt[3]{\frac{\sqrt{A_2^2 - 4(a_1^2 - 3a_0 a_2)^3} - A_2}{2}} \\
 A_2 &= 27a_0^2 a_3 - 9a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3 \\
 a_0 &= 16(\zeta_1^2 - 1) \\
 a_1 &= 4(\zeta_1^2 - 1)(16\zeta_1^2 + 5\psi - 8) \\
 a_2 &= 4(16\zeta_1^6 - 8\zeta_1^4(4 + \psi) + \zeta_1^2(20 - 2\psi + \psi^2) - 2(2 - 3\psi + \psi^2)) \\
 a_3 &= -\psi(16\zeta_1^4 - 4\zeta_1^2(5 + 2\psi) + (2 - \psi)^2) \\
 \zeta_{\text{opt}} &= \frac{2 - 4\zeta_1^2 - 2\nu_{\text{opt}}^2 - \psi - \sqrt{4(1 - 2\zeta_1^2 - \nu_{\text{opt}}^2)^2 - 4(1 + 2\zeta_1^2 - \nu_{\text{opt}}^2)\psi + \psi^2}}{8\zeta_1 \nu_{\text{opt}}}
 \end{aligned}$$

Table 2.4: Exact solutions for the case of mobility,  $\hat{s}G_a$  or  $\hat{s}G_b$ , optimized by the following methods: the fixed-point method, the  $H_\infty$  criterion with and without consideration of the primary damping, and the  $H_2$  criterion with and without consideration of the primary damping

	$\hat{s}G_a$ (Series EMSD & Parallel PZSD)	$\hat{s}G_b$ (Parallel EMSD & Series PZSD)
Fixed-point	$\nu_{\text{opt}}$	$\frac{1+\psi}{\sqrt{1+\frac{\psi}{2}}}$ , in [78]
	$\zeta_{\text{opt}}$	$\sqrt{\frac{\psi(24+24\psi+5\psi^2)}{16(1+\psi)(2+\psi)^2}}$ , in [78]
$H_\infty$	$\nu_{\text{opt}}$	$\frac{1+\psi}{\sqrt{\sqrt{2(1+\psi)(2+\psi)} - (1+\psi)}}$
	$\zeta_{\text{opt}}$	$\frac{1}{\sqrt{\frac{3\psi}{8} - \frac{1}{\sqrt{2(1+\psi)(2+\psi)}}}}$
$\zeta_1 = 0$	$r_{\text{opt}}$	$\sqrt{1 - \frac{\psi}{2}}$
	$\nu_{\text{opt}}$	probably unsolvable
$H_\infty$	$\zeta_{\text{opt}}$	probably unsolvable
	$r_{\text{opt}}$	$\sqrt{1 + 2\psi - 4\left(\zeta_1^2 - \zeta_{\text{opt}}^2\right) - 2\sqrt{\psi(8\zeta_{\text{opt}}(\zeta_1 + \zeta_{\text{opt}}) + \psi)}}$
$\zeta_1 > 0$	$\nu_{\text{opt}}$	$\frac{1+\psi}{\sqrt{1+\frac{\psi}{2}}}$
	$\zeta_{\text{opt}}$	$\frac{1}{\sqrt{2(1+\psi)(2+\psi)}}$
$H_2$	$\nu_{\text{opt}}$	Table 2.5
	$\zeta_{\text{opt}}$	$\frac{1}{\sqrt{\nu_{\text{opt}}^4 + \zeta_1^2(1+\psi) - (1+\psi)^2 - \zeta_1\sqrt{1+\psi}}}$

Table 2.5: Complement of Table 2.4. The exact solution for  $\nu_{\text{opt}}$  is the positive solution of  $a_0\nu^8 + a_1\nu^6 + a_2\nu^4 + a_3\nu^2 + a_4 = 0$ .

$$\begin{aligned}
 \nu_{\text{opt}} &= \sqrt{-\frac{a_1}{4a_0} + \frac{A_3}{2} + \frac{\sqrt{A_1+A_2}}{2}} \\
 A_1 &= \frac{3a_1^2A_4 - 2a_0(4a_2A_4 + A_4^2 + A_5)}{6a_0^2A_4} \\
 A_2 &= -\frac{8a_0^2a_3 - 4a_0a_1a_2 + a_1^3}{4a_0^3A_3} \\
 A_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a_1^2}{a_0^2} + \frac{4(-2a_2A_4 + A_4^2 + A_5)}{3a_0A_4}} \\
 A_4 &= \sqrt[3]{\frac{\sqrt{A_6^2 - 4A_5^3} + A_6}{2}} \\
 A_5 &= 12a_0a_4 - 3a_1a_3 + a_2^2 \\
 A_6 &= 27(a_0a_3^2 + a_1^2a_4) - 9a_2(a_1a_3 + 8a_0a_4) + 2a_2^3 \\
 a_0 &= (2 + \psi)^2 - 4\zeta_1^2(1 + \psi) \\
 a_1 &= 2\psi(1 + \psi)(6\zeta_1^2 - 2 - \psi) \\
 a_2 &= (1 + \psi)^2(8\zeta_1^2 - 12\psi - 3\psi^2 - 8) \\
 a_3 &= 4\psi(1 + \psi)^2(4\zeta_1^4 - 5\zeta_1^2(1 + \psi) + (1 + \psi)^2) \\
 a_4 &= 4(1 + \psi)^5(1 + \psi - \zeta_1^2)
 \end{aligned}$$



Table 2.6: Exact solutions for the case of acceleration,  $\hat{s}^2G_a$  or  $\hat{s}^2G_b$ , optimized by the fixed-point method and the  $H_\infty$  criterion

	$\hat{s}^2G_a$ (Series EMSD & Parallel PZSD)	$\hat{s}^2G_b$ (Parallel EMSD & Series PZSD)
Fixed-point	$\nu_{\text{opt}}$	$1 + \psi$ , in [78]
	$\zeta_{\text{opt}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3\psi}{2(1+\psi)}}$ , in [78]
$H_\infty$	$\nu_{\text{opt}}$	$\frac{\sqrt{16 + 23\psi + 9\psi^2} - 2\sqrt{(2 + \psi)^2(4 + 3\psi)}}{2\sqrt{6}}$
	$\zeta_{\text{opt}}$	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{8 + 9\psi - 4\sqrt{4 + 3\psi}}{1 + \psi}}$
$\zeta_1 = 0$	$r_{\text{opt}}$	$\frac{8\sqrt{(4 + 3\psi)^3} - 8\psi}{64 + 80\psi + 27\psi^2}$

Table 2.7: Solutions based on the stability criterion. All the optimal parameters were given in [81].

	$G_a$ (Series EMSD & Parallel PZSD)	$G_b$ (Parallel EMSD & Series PZSD)
$\zeta_1 = 0$	$\nu_{\text{opt}} = 1$	$1 + \psi$
	$\zeta_{\text{opt}} = \sqrt{\psi}$	$\sqrt{\frac{\psi}{1 + \psi}}$
	$\Lambda_{\text{opt}} = \frac{\sqrt{\psi}}{2}$	$\frac{\sqrt{\psi(1 + \psi)}}{2}$
	$\nu_{\text{opt}} = 1$	$\frac{1 + \psi + \zeta_1 \left( \sqrt{\psi(1 + \psi - \zeta_1^2)} - \zeta_1 \right)}{1 - \zeta_1^2}$
$\zeta_1 > 0$	$\zeta_{\text{opt}} = \zeta_1 + \sqrt{\psi}$	$\frac{\sqrt{\psi(1 + \psi - \zeta_1^2)} + \zeta_1}{1 + \psi}$
	$\Lambda_{\text{opt}} = \zeta_1 + \frac{\sqrt{\psi}}{2}$	$\frac{\zeta_1(2 + \psi) - 2\zeta_1^3 + \sqrt{\psi(1 - \zeta_1^2 + \psi)}}{2(1 - \zeta_1^2)}$

### 2.3.5 考察

図 2.6 に  $\zeta_1 = 0$  の場合における，縦軸を得られた最適パラメータ  $\nu_{\text{opt}}$ ,  $\zeta_{\text{opt}}$ , 横軸を  $\psi$  としたときのグラフを表す．図より， $\psi$  が小さい場合では，定点理論による最適パラメータは  $H_\infty$  規範による最適パラメータとよく一致している． $H_\infty$  規範と  $H_2$  規範との間の違いは主に  $\zeta_{\text{opt}}$  であることがわかる．安定度規範による最適パラメータは  $\nu_{\text{opt}}$ ,  $\zeta_{\text{opt}}$  とともに他の規範による最適パラメータと比べて大きくずれていることが多いことがわかる．

図 2.7 に  $\zeta_1 = 0$  の場合における，縦軸を最適化した  $\|G\|_\infty$ ,  $\|G\|_2$ ,  $\Lambda$ , 横軸に  $\psi$  としたときのグラフを示す．(a) はコンプライアンス，(b) はモビリティ，(c) はアクセラランス，(d) は安定度を表す．コンプライアンス (a) とモビリティ (b) において， $G_b$  や  $\hat{s}G_b$  の最適化した  $\|G\|_\infty$  と  $\|G\|_2$  は  $G_a$  や  $\hat{s}G_a$  のものと比べて小さいことがわかる．アクセラランス (c) において，最適化した  $\|\hat{s}^2 G_a\|_\infty$  と  $\|\hat{s}^2 G_b\|_\infty$  は完全に一致している．これは表 2.6 からみても明らかである．安定度 (d) において， $G_b$  の最適化した  $\Lambda$  は  $G_a$  と比べて大きいことがわかる．これらをまとめると，コンプライアンス，モビリティ，安定度において  $G_b$ ，つまり Parallel EMSD や Series PZSD は  $G_a$ ，つまり Series EMSD や Parallel PZSD よりも良い性能を持っており，アクセラランスにおいては同じ性能を持っている．

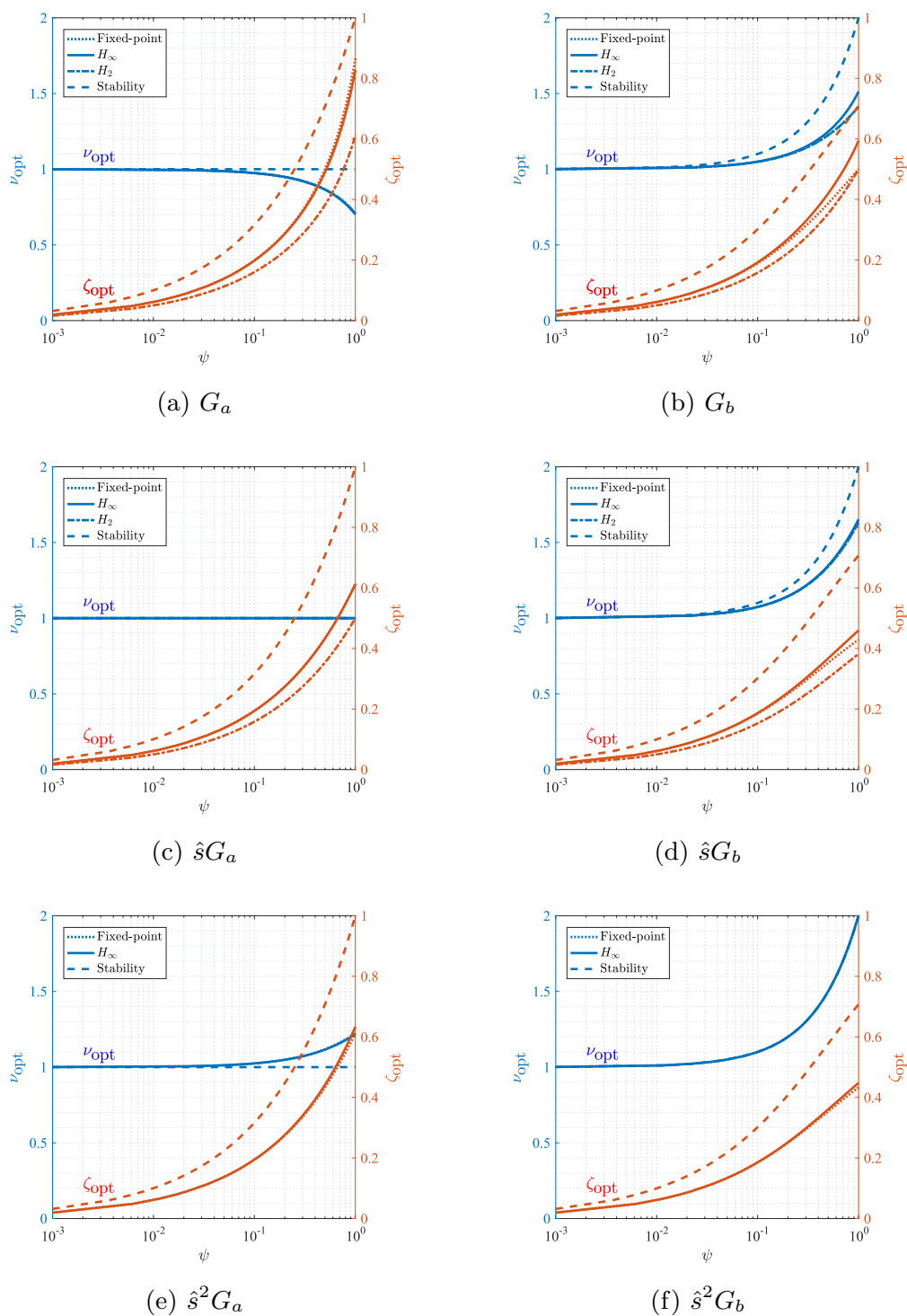


Fig.2.6: Derived optimal parameters,  $\nu_{\text{opt}}$  and  $\zeta_{\text{opt}}$ , versus  $\psi$ , when  $\zeta_1 = 0$ : (a)  $G_a$ ; (b)  $G_b$ ; (c)  $\hat{s}G_a$ ; (d)  $\hat{s}G_b$ ; (e)  $\hat{s}^2G_a$ ; (f)  $\hat{s}^2G_b$ . The blue and red lines show  $\nu_{\text{opt}}$  and  $\zeta_{\text{opt}}$ , respectively.

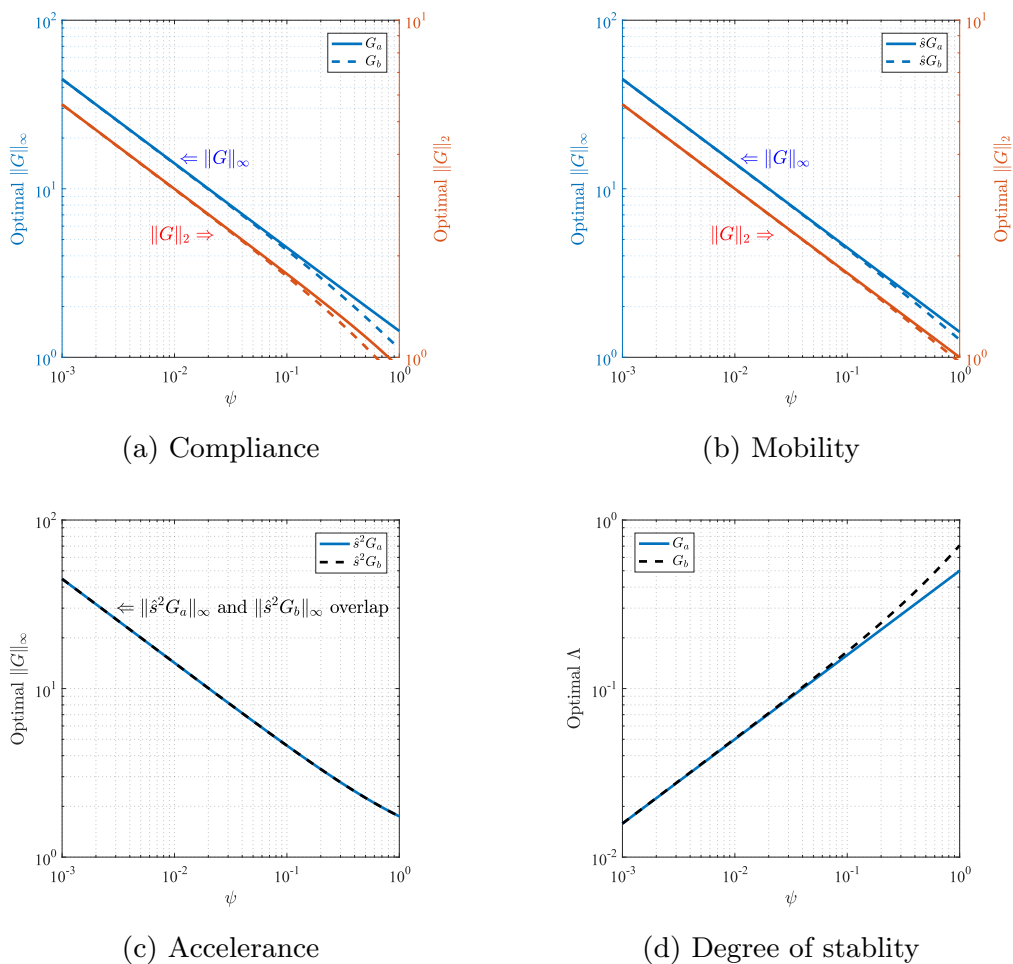


Fig.2.7: Optimal  $\|G\|_\infty$  and  $\|G\|_2$ , or  $\|G\|_\infty$ , or  $\Lambda$ , versus  $\psi$ , when  $\zeta_1 = 0$ , for the cases of the performance indexes of (a) compliance, (b) mobility, (c) accelerance, and (d) degree of stability. The solid and broken lines show  $G_a$  and  $G_b$ , respectively. The blue and red lines in (a) and (b) show optimal  $\|G\|_\infty$  and optimal  $\|G\|_2$ , respectively.

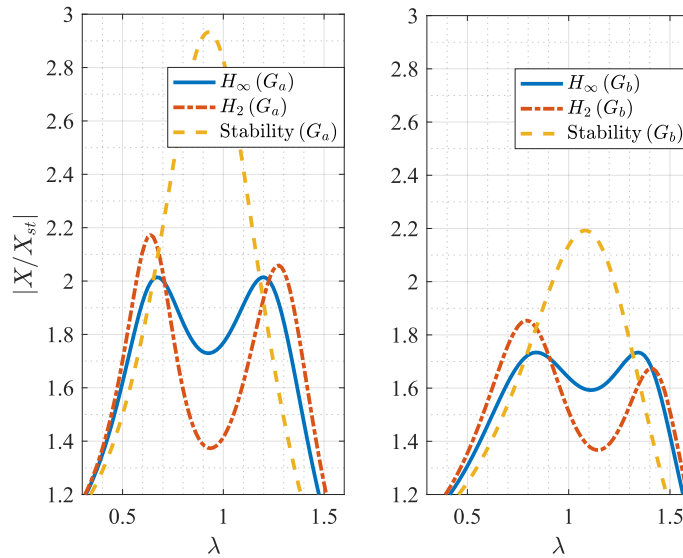


Fig.2.8: Frequency responses for the case of compliance optimized by the  $H_\infty$ ,  $H_2$ , and stability criteria with  $\psi = 0.5$ ,  $\zeta_1 = 0$  (left:  $G_a$ ; right:  $G_b$ )

## 2.4 数値事例

### 2.4.1 $H_\infty$ 規範

■  $H_2$  規範, 安定度規範との比較 図 2.8 に  $H_\infty$  規範,  $H_2$  規範, 安定度規範によって最適化されたコンプライアンスの周波数応答を示す.  $H_\infty$  規範によって最適化された  $\|G\|_\infty$  が最も小さくなっており,  $\|G_b\|_\infty$  が  $\|G_a\|_\infty$  よりも小さいことも確認できる.

■ 定点理論との比較 図 2.9 に  $G_b$  における定点理論または  $H_\infty$  規範によって設計された周波数応答の拡大図を示す.  $H_\infty$  規範によって最適化された 2 つの共振ピーク大きさは一致しており, 定点理論によって設計された共振ピークより小さいことがわかる.

■ 主系の減衰を考慮した  $H_\infty$  規範 図 2.10 に  $\hat{s}G_a$  における, 主系の減衰の有無を考慮した  $H_\infty$  規範によって最適化された周波数応答の拡大図を示す. 主系の減衰を考慮することで, 2 つの共振ピーク大きさが減衰を考慮しない場合と比べて小さくなることを確認できる. 図 2.11 に主系の減衰を考慮した場合としない場合の  $\|\hat{s}G_a\|_\infty$

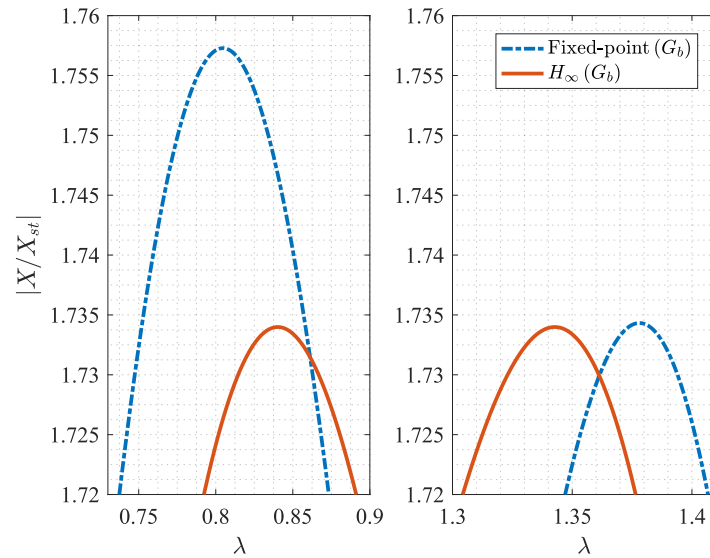


Fig.2.9: Close-ups of the frequency responses for the case of compliance of  $G_b$  optimized by the fixed-point method and the  $H_\infty$  criterion with  $\psi = 0.5$ ,  $\zeta_1 = 0$

の相対誤差を示す。もし、 $\zeta_1$  が 0.1 より小さければ、その相対誤差はたかだか 0.6% 程度である。

### 2.4.2 $H_2$ 規範

図 2.12 に主系の減衰を考慮した  $\|G_a\|_2$  の最適値を 1 に正規化した等高線図を表す。減衰を考慮しない  $H_2$  規範の場合では約 0.23% だけ性能が劣化しており、 $H_\infty$  規範や定点理論、安定度規範ではそれぞれ 1.5%, 1.7%, 14% の性能劣化が確認できる。

### 2.4.3 安定度規範

図 2.13 に安定度規範、 $H_\infty$  規範、 $H_2$  規範によって最適化された極の位置を示す。安定度規範では虚軸に最も近い極の実部が最も小さくなっていることがわかる。また、 $G_a$  と比べて  $G_b$  の方がより虚軸から遠ざかっていることもわかる。

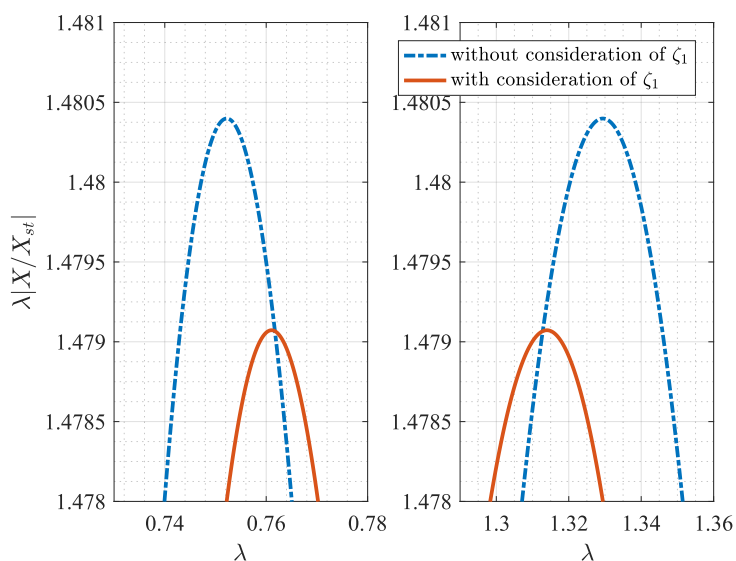


Fig.2.10: Close-ups of the frequency responses for the case of  $\hat{s}G_a$  optimized by the  $H_\infty$  criterion with and without consideration of the primary damping with  $\psi = 0.5$ ,  $\zeta_1 = 0.1$

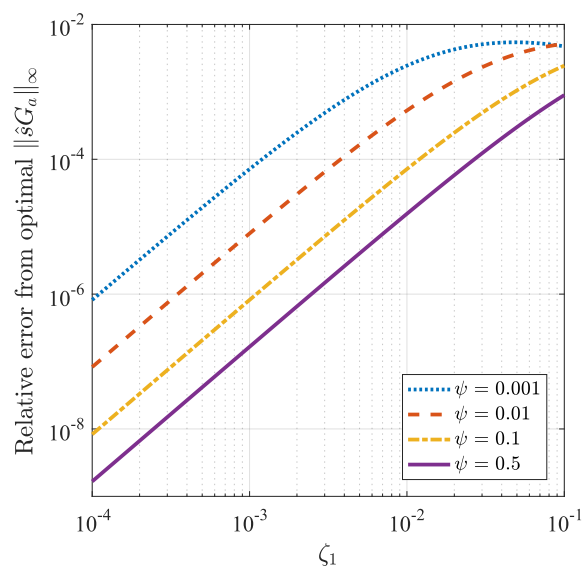


Fig.2.11: Relative errors between  $\|\hat{s}G_a\|_\infty$  with and without consideration of  $\zeta_1$  versus  $\zeta_1$  with  $\psi = 0.001, 0.01, 0.1$ , and  $0.5$



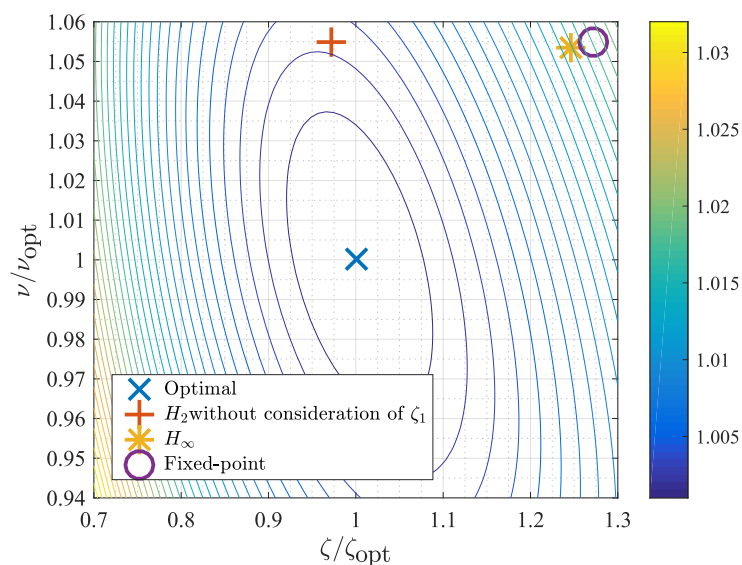


Fig.2.12: Normalized contour map of  $\|G_a\|_2$  with consideration of the primary damping with  $\psi = 0.5$ ,  $\zeta_1 = 0.05$ . The contour interval is 0.001.

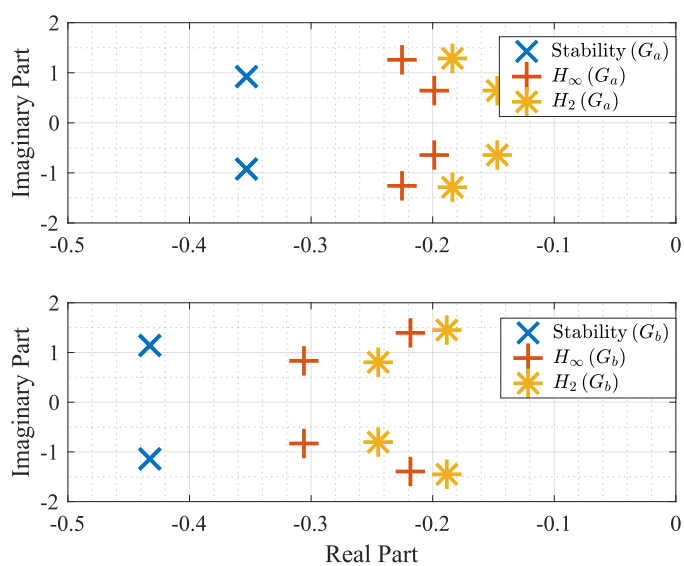


Fig.2.13: Pole map for the case of compliance optimized by the stability,  $H_\infty$ , and  $H_2$  criteria with  $\psi = 0.5$ ,  $\zeta_1 = 0$  (upper:  $G_a$ ; lower:  $G_b$ )

## 2.5 まとめ

本章では EMSD と PZSD の共振型シャント回路の厳密な最適解を導出した。2 つの無次元化伝達関数を導入することで、Series/Parallel EMSD と Parallel/Series PZSD の統一的なモデル化を行った。4 つの設計規範における主系の減衰を考慮しない最適な厳密解を導出した。加えて、 $H_2$  規範と安定度規範に基づく主系の減衰を考慮した厳密解や、ある特別な場合においては、 $H_\infty$  規範による主系の減衰を考慮した厳密解を導出した。

実際に設計を行う際は、主系に調和加振が与えられたときの最悪値低減を目的とする場合は  $H_\infty$  規範を、ランダム加振が与えられたときの振動振幅の RMS 値低減を目的とする場合は  $H_2$  規範による最適パラメータを使用してシャント回路の設計を行う必要がある。しかし無次元化電気機械結合係数  $\psi$  が小さい場合は、両規範における最適パラメータには大きな差異がない。そのため実用上、電気機械結合が小さい場合に限り、どちらの規範による最適パラメータを用いても制振性能は大きく変わらない。

結果から、 $H_\infty$  規範による最適解は非常に複雑であるが、定点理論による最適解は非常にシンプルで、実用上は  $H_\infty$  規範の代わりとなりうる。 $H_2$  規範において、その性能は主系の減衰に大きく依存せず、また主系の減衰を考慮しない最適解の方がシンプルであるため、実用上は主系の減衰を考慮しない設計の方が適している。また Series EMSD よりも Parallel EMSD の方が性能が高く、また同様に、Parallel PZSD よりも Series PZSD の方が性能が高いことがわかった。本章で得られた結果は EMSD や PZSD の共振型シャント回路の設計に関して指針となることが期待される。



## 第3章

# 電磁トランスデューサのセンサレスパラメータ推定

本章では、電磁シャント制振のシャント回路の設計に必要な機械系・電気系・電気機械結合系のパラメータをセンサレスに同時に推定する手法を提案する。パラメータ推定には振動系に取り付けられた電磁トランスデューサのアドミタンス周波数特性を用いる。この方法は電気アドミタンスの周波数特性計測のみで推定を行うため、位置や速度センサ等が不要といった利点を持つ。パラメータ推定手法には重み付き非線形最小二乗問題を数値的に解くことでパラメータを推定する。数値最適化には適切な初期値を与える必要があるため、初期値選定方法についても議論する。

### 3.1 パラメータ推定のためのモデル化

本節では電磁トランスデューサのパラメータ推定に用いるモデル化を行う。第2章で示したモデルはシャント回路が取り付けられたモデルを用いていたが、本章で用いるモデルはシャント回路が取り付けられていない状態のモデルを用いる。そのため、第2章とは電圧や電流の正負が逆の部分もあるため、注意が必要である。

電磁トランスデューサが取り付けられた振動系のモデルは、機械系モデル、電気機械結合系モデル、電気系モデルの3つのサブモデルに分けることができる。本章では

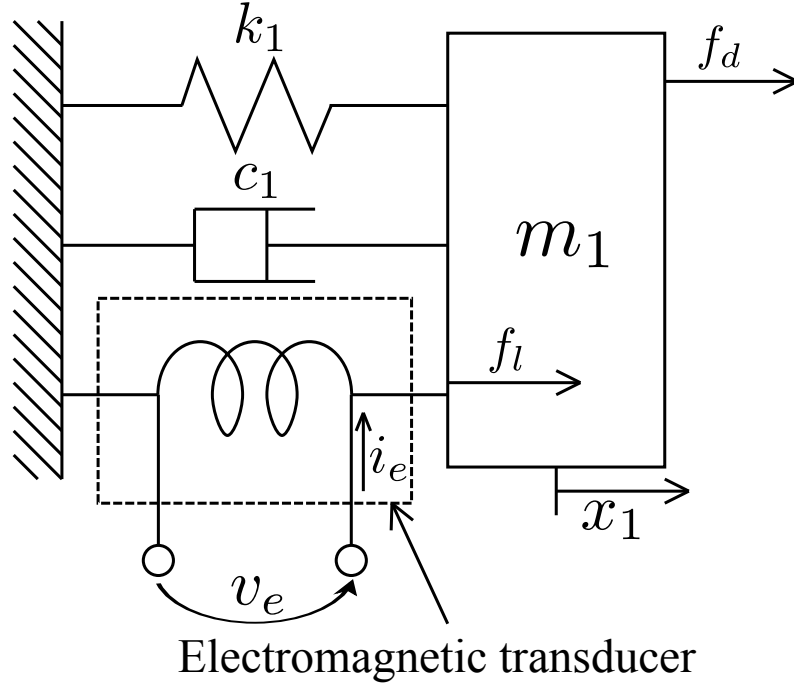


Fig.3.1: Simple mass-spring-damper system coupled to an electromagnetic transducer

簡単化のために，図 3.1 に示すような，1 自由度振動系に電磁トランスデューサが取り付けられたモデルを考える．このモデルの運動方程式は以下のようなになる．

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c_1 \frac{dx_1}{dt} + k_1 x_1(t) = f_d(t) + f_l(t) \quad (3.1)$$

ここで  $f_l(t)$  [N] はローレンツ力を表す．電気機械結合系モデルは次の二つの式で表すことができる [8, 31, 32, 44]．

$$f_l(t) = \phi i_e(t) \quad (3.2)$$

$$v_{\text{emf}}(t) = \phi \dot{x}_1(t) \quad (3.3)$$

ここで  $i_e(t)$  [A] は電磁トランスデューサに流れる電流， $v_{\text{emf}}(t)$  [V] は速度起電力を表す．電気系モデルは，図 3.2 に示すような，コイルの自己インダクタンス  $L_0$  [H]，コイルの内部抵抗  $R_0$  [ $\Omega$ ]，速度起電力  $v_{\text{emf}}(t)$  でモデル化される．この時の回路方程式は以下のようなになる．

$$v_e(t) - v_{\text{emf}}(t) = L_0 \frac{di_e}{dt} + R_0 i_e(t) \quad (3.4)$$

$v_e(t)$  [V] は電磁トランスデューサの端子間電圧を表す．

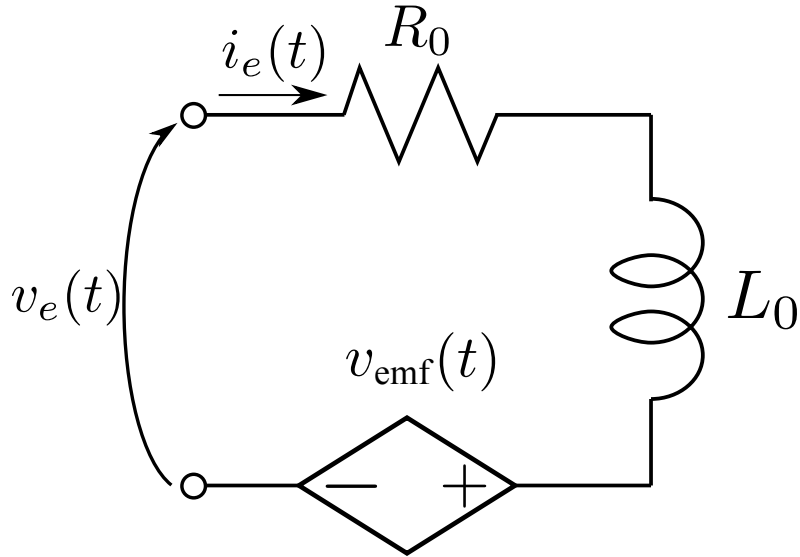


Fig.3.2: Electrical system model of the series connection of the impedance of the coil,  $Z_c(s)$ , the internal resistance in the coil,  $R_0$ , and the motional electromotive force,  $v_{emf}(t)$

## 3.2 パラメータ推定手法

### 3.2.1 適切な計測周波数帯域

本項では、位置や速度、加速度センサ等を用いずに、つまり変位  $x(t)$  を計測せずに電圧  $v_e(t)$  と電流  $i_e(t)$  の計測のみで、電磁トランスデューサが取り付けられた振動系のパラメータを推定可能かを議論する。パラメータ推定では外乱が系に加わらないものと仮定するのが適切であるため、 $f_d(t) = 0$  とする。式 (3.1)-(3.4) をラプラス変換し、整理することで電磁トランスデューサの電気アドミタンス伝達関数  $Y_e(s)$  [S] が以下のように得られる。

$$Y_e(s) := \frac{\tilde{i}_e(s)}{\tilde{v}_e(s)} = \left( L_0 s + R_0 + \frac{\bar{\phi}^2 s}{s^2 + 2\zeta_1 \omega_1 s + \omega_1^2} \right)^{-1} \quad (3.5)$$

ここで  $\bar{\phi} := \phi / \sqrt{m_1}$  は質量で正規化された電気機械結合係数を表す。

アドミタンスの周波数特性は LCR メータやインピーダンスアナライザによって直接測定することが可能である。ここでの問題は機械系、電気機械結合系、電気系のすべてのパラメータが同時に推定できるかである。ここで、 $\bar{\phi} = 0$  を式 (3.5) に代入

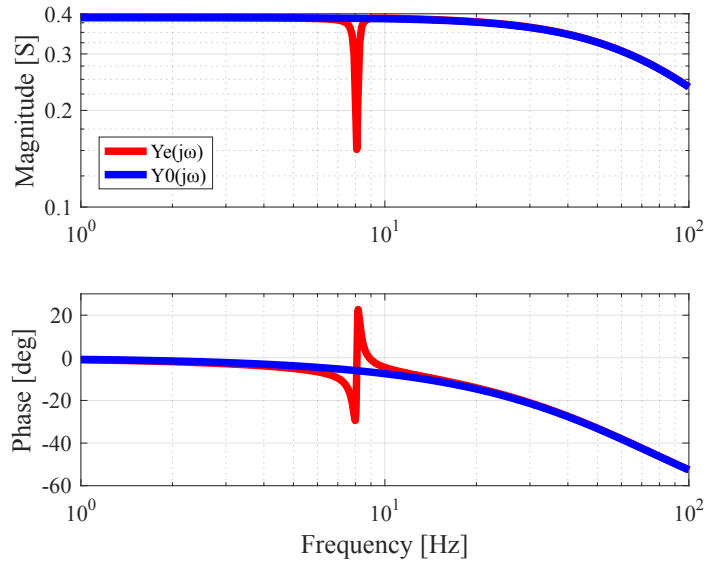


Fig.3.3: Bode admittance diagrams of  $Y_e(j\omega)$  (red solid line) and  $Y_0(j\omega)$  (blue solid line) for the parameters listed in Table 3.2, where  $Y_e(j\omega)$  includes the effect of the mechanical system and  $Y_0(j\omega)$  does not

したアドミタンス  $Y_0(s) := (L_0s + R_0)^{-1}$  と  $Y_e(s)$  を比較する．図 3.3 に  $Y_0(j\omega)$  と  $Y_e(j\omega)$  のボード線図を示す．ここで用いたパラメータ値は後に示す表 3.2 の値を用いる．注目すべき点は，機械系の固有振動数付近（約 8 Hz）で  $Y_0(j\omega)$  と  $Y_e(j\omega)$  が差異がみられ，それ以外の範囲（6 Hz 以下，10 Hz 以上）ではほとんど一致していることである．また  $Y_0(j\omega)$  は一次遅れ特性を持っており，低周波帯域では  $R_0$  が，高周波帯域では  $L_0$  が支配的であることがわかる．これらのことから，機械系の固有振動数付近の周波数帯域で計測したアドミタンス周波数特性  $Y_e(j\omega)$  によってパラメータの推定が可能であることがわかる．

### 3.2.2 周波数領域計測データによるパラメータ推定手法

本項ではアドミタンスの周波数特性  $Y_e(j\omega)$  の計測データからパラメータを推定する方法を提案する．計測したデータは  $Y_s(j\omega_s[k])$ ,  $k = 1, 2, \dots, N_s$  で表す．ここで  $\omega_s[k]$  は  $k$  番目のサンプル角周波数， $N_s$  はサンプリング点数を表す．

■パラメータ推定問題 (非線形最小二乗問題) パラメータ  $\zeta_1, \omega_1, \bar{\phi}, R_0, L_0$  は次のようにベクトル形式で書くことができる.

$$\boldsymbol{\theta}_{\text{nls}} := [\zeta_1, \omega_1, \bar{\phi}, R_0, L_0]^\text{T} \quad (3.6)$$

このパラメータベクトルの依存性を明示するため, 以降では  $Y_e(s)$  を  $Y_e(s; \boldsymbol{\theta}_{\text{nls}})$  のように表記する. このパラメータ推定問題は以下のように周波数領域の重み付き非線形最小二乗問題として定式化できる.

$$\min_{\boldsymbol{\theta}_{\text{nls}}} \sum_{k=1}^{N_s} \left| \left( \frac{1}{Y_e(j\omega_s[k]; \boldsymbol{\theta}_{\text{nls}})} - \frac{1}{Y_s(j\omega_s[k])} \right) W_{\text{nls}}(j\omega_s[k]) \right|^2 \quad (3.7)$$

ここで  $W_{\text{nls}}(j\omega_s[k])$  は重み関数である.  $1/Y_e(j\omega_s[k]; \boldsymbol{\theta}_{\text{nls}})$  が 3 次/2 次の伝達関数であるため高周波でゲインが大きくなり, 低周波帯域の推定精度が低くなる恐れがある. そこで重み関数を  $W_{\text{nls}}(j\omega_s[k]) := 1/j\omega_s[k]$  と選ぶことで, 周波数領域における推定精度の平滑化を行う.

■初期値選定方法 (線形最小二乗問題) 式 (3.7) で表される非線形最小二乗問題の初期値を選定する方法を示す. 評価関数と推定するパラメータを変形することで, 線形最小二乗問題に置き換えることで初期値を求める. 式 (3.5) を有理関数で表すと以下のようなになる.

$$Y_e(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2}{L_0 s^3 + (R_0 + 2L_0\zeta_1\omega_1) s^2 + (2R_0\zeta_1\omega_1 + L_0\omega_1^2 + \bar{\phi}^2) s + R_0\omega_1^2} \quad (3.8)$$

パラメータベクトル  $\boldsymbol{\theta}_{\text{nls}}$  を新しいパラメータベクトル  $\boldsymbol{\theta}_{\text{ini}}$  に整理すると, 式 (3.8) は以下のように書き換えられる.

$$Y_e(s) = \frac{g_{\text{num}}(s; \boldsymbol{\theta}_{\text{ini}})}{g_{\text{den}}(s; \boldsymbol{\theta}_{\text{ini}})} \quad (3.9)$$

ここで  $g_{\text{num}}(s; \boldsymbol{\theta}_{\text{ini}})$  は分子多項式,  $g_{\text{den}}(s; \boldsymbol{\theta}_{\text{ini}})$  は分母多項式,  $\boldsymbol{\theta}_{\text{ini}}$  は  $g_{\text{num}}(s; \boldsymbol{\theta}_{\text{ini}})$  と  $g_{\text{den}}(s; \boldsymbol{\theta}_{\text{ini}})$  の  $s$  の係数をパラメータとしたパラメータベクトルである. つまり, パラメータベクトル  $\boldsymbol{\theta}_{\text{ini}}$  を以下のように定義できる.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_{\text{ini}} &:= \frac{1}{\omega_1^2} [1, 2\zeta_1\omega_1, L_0, R_0 + 2L_0\zeta_1\omega_1, 2R_0\zeta_1\omega_1 + L_0\omega_1^2 + \bar{\phi}^2, R_0\omega_1^2]^\text{T} \\ &= \left[ \frac{1}{\omega_1^2}, \frac{2\zeta_1}{\omega_1}, \frac{L_0}{\omega_1^2}, \frac{R_0}{\omega_1^2} + \frac{2L_0\zeta_1}{\omega_1}, \frac{2R_0\zeta_1}{\omega_1} + L_0 + \frac{\bar{\phi}^2}{\omega_1^2}, R_0 \right]^\text{T} \end{aligned} \quad (3.10)$$



ここで用いるパラメータベクトル  $\boldsymbol{\theta}_{\text{ini}}$  と、式 (3.7) で用いるパラメータベクトル  $\boldsymbol{\theta}_{\text{nls}}$  は全く異なるものであることに注意する。  $\boldsymbol{\theta}_{\text{ini}}$  の各成分を  $\theta_i, i = 1, 2, \dots, 6$  とすると、式 (3.10) より  $\zeta_1, \omega_1, \bar{\phi}, R_0, L_0$  は以下のように求めることができる。

$$\zeta_1 = \frac{\theta_2}{2\sqrt{\theta_1}} \quad (3.11)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\theta_1}} \quad (3.12)$$

$$\bar{\phi} = \sqrt{\frac{\theta_5}{\theta_1} - \frac{\theta_3}{\theta_1^2} - \theta_6 \frac{\theta_2}{\theta_1}} \quad (3.13)$$

$$R_0 = \theta_6 \quad (3.14)$$

$$L_0 = \frac{\theta_3}{\theta_1} \quad (3.15)$$

なお  $\boldsymbol{\theta}_{\text{ini}}$  は 6 次元で、求めるパラメータは 5 個であるため、この代数方程式は過決定である。そのため、複数の解が考えられるが本論文では上記のように重み付き線形最小二乗問題の解を決定する。次に最適な  $\boldsymbol{\theta}_{\text{ini}}$  を求める方法について示す。

式 (3.7) の評価関数に分子多項式  $g_{\text{num}}(s; \boldsymbol{\theta}_{\text{ini}})$  を掛けることで、パラメータ推定問題は以下のような周波数領域の重み付き線形最小二乗問題に再定式化される。

$$\min_{\boldsymbol{\theta}_{\text{ini}}} \sum_{k=1}^{N_s} \left| \left( \frac{g_{\text{num}}(j\omega_s[k]; \boldsymbol{\theta}_{\text{ini}})}{Y_s(j\omega_s[k])} - g_{\text{den}}(j\omega_s[k]; \boldsymbol{\theta}_{\text{ini}}) \right) W_{\text{ini}}(j\omega_s[k]) \right|^2 \quad (3.16)$$

ここで、 $W_{\text{ini}}(j\omega_s[k])$  は重み関数を表し、本論文では非線形最小二乗問題の場合と同様の理由で  $W_{\text{ini}}(j\omega_s[k]) := 1/j\omega_s[k]$  とする。式 (3.16) の重み付き線形最小二乗問題は行列形式で書きなおすことができ、その最適解は次のように得られる。

$$\min_{\boldsymbol{\theta}_{\text{ini}}} \|\mathbf{A}\boldsymbol{\theta}_{\text{ini}} - \mathbf{b}\|^2 \quad (3.17)$$

$$\boldsymbol{\theta}_{\text{iniopt}} = \left( \mathbf{A}^* \mathbf{A} + \overline{\mathbf{A}^* \mathbf{A}} \right)^{-1} \left( \mathbf{A}^* \mathbf{b} + \overline{\mathbf{A}^* \mathbf{b}} \right) \quad (3.18)$$

ここで、 $\mathbf{A}^*$  は  $\mathbf{A}$  の複素共役転置、 $\overline{\mathbf{A}}$  は  $\mathbf{A}$  の複素共役を表す。  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{b}$  の  $k$  番目の行成分を  $A_k, b_k, k = 1, 2, \dots, N_s$  で表すと、以下のように書くことができる。

$$A_k := \left[ \frac{j\omega_s[k]}{Y_s(j\omega_s[k])}, \frac{1}{Y_s(j\omega_s[k])}, -(j\omega_s[k])^2, -j\omega_s[k], -1, -\frac{1}{j\omega_s[k]} \right] \quad (3.19)$$

$$b_k := -\frac{1}{j\omega_s[k]Y_s(j\omega_s[k])} \quad (3.20)$$

Table 3.1: Parameters of the analog circuit

$R_{in}$ [ $\Omega$ ]	$K_{in}$ [-]	$K_{out}$ [-]
0.0996	99.23	0.9846

式 (3.19) と式 (3.20) を式 (3.18) に代入することで,  $\theta_{inopt}$  が決定される. 計測データによって求めた  $\theta_{inopt}$  を式 (3.11)-(3.15) に代入することで数値最適化の初期値を決定する.

### 3.3 パラメータ推定実験

#### 3.3.1 実験装置

アドミタンス計測実験装置の概略図を図 3.4 に, 使用する実験装置を図 3.5 に示す. 電磁トランスデューサは図 3.6 の概略図で示すように, 可動コイル (巻き数:  $N_s = 480$ ) と二つの永久磁石, 鉄心から構成される. 鉄心と永久磁石は固定されており, 可動コイルは振動系の質量に取り付けられたプラスチック製のシリンダーに巻かれている. 装置は直動ベアリングにより水平一自由度の運動に制限された台車に, 制振用の電磁トランスデューサと加振器が取り付けられている. 加振器は制振実験で使用するため, パラメータ推定実験の際には加振器の端子間を開放しておく. なお, この機械系の固有振動数は, 自由振動応答によって発生する速度起電力等を観測することで約 8 Hz (約 50 rad/s) であると概算した.

アドミタンスは LCR メータやインピーダンスアナライザ等を用いることで計測可能だが, 本節ではシャント制振実験で使用するアナログ回路を利用してアドミタンス周波数特性を計測する. 制振用の電磁トランスデューサには, 電流計測用の抵抗  $R_{in}$  と計装アンプ (倍率  $K_{in}$ ), パワー OP アンプ (倍率  $K_{out}$ ) からなるアナログ回路が接続されており, 図 3.4 中の破線内に示す. また, アナログ回路の素子値は表 3.1 に示されており, 素子値の選定方法に関しては文献 [96] を参照されたい. 電磁トランスデューサに流れる電流  $i_e$  はアナログ回路の抵抗  $R_{in}$  と計装アンプ  $K_{in}$  によって, 電流を電圧  $v_y = R_{in}K_{in}i_e$  に変換して計測を行う.

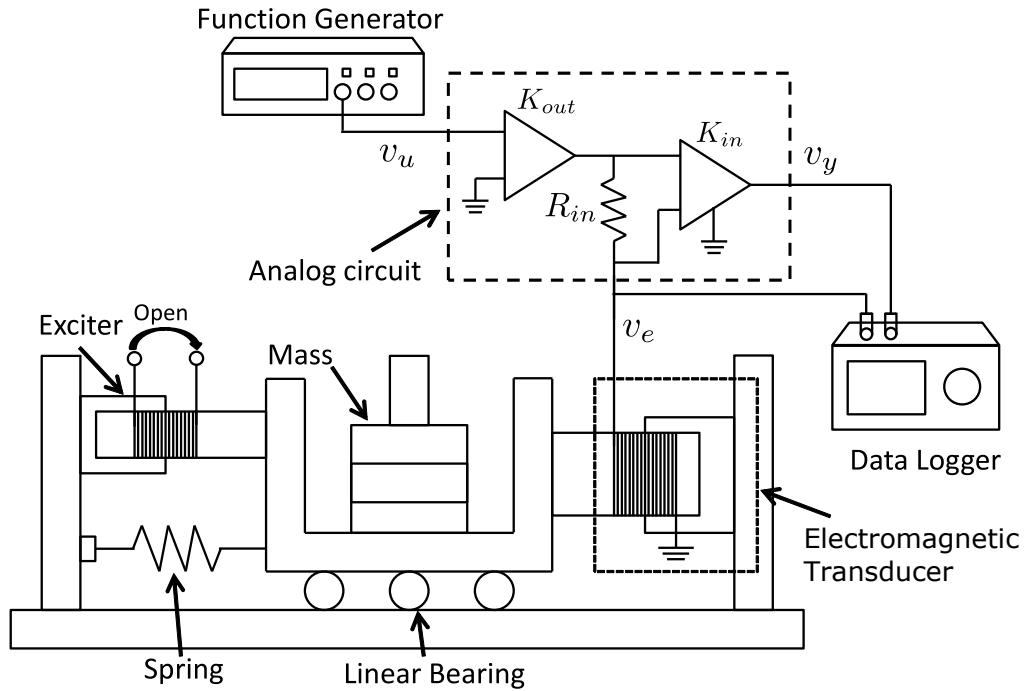


Fig.3.4: Experimental setup for the admittance measurement

### 3.3.2 実験手順

1. ファンクションジェネレータを用いて、図 3.4 中の  $v_u$  に掃引正弦波の入力電圧を加える。データロガーを用いて電磁トランスデューサの端子間電圧  $v_e$  と、計装アンプから出る電圧  $v_y (= R_{in} K_{in} i_e)$  を測定する。機械系の固有振動数は 8 Hz (50 rad/s) 付近と概算できたので、固有振動数付近である 4~12 Hz の間で計測を行う。本節では、ファンクションジェネレータの印加電圧を 250 mV、データロガーのサンプリング周波数を 500 Hz で 65536 点を計測する。
2. 計測を 5 回行い、 $v_e$  と  $v_y$  の平均クロススペクトルを  $v_e$  の平均パワースペクトルで割り、 $\tilde{v}_y/\tilde{v}_e$  の周波数応答を求める。得られた  $\tilde{v}_y/\tilde{v}_e$  の周波数応答に  $1/(R_{in} K_{in})$  をかけることで、電圧  $\tilde{v}_y$  が電流  $\tilde{i}_e$  に変換され、所望の複素アドミタンス  $Y_s(j\omega_s[k]) = \tilde{i}_e/\tilde{v}_e$  が得られる。
3. 得られた複素アドミタンス  $Y_s(j\omega_s[k])$  に対して、3.2.2 項の方法によってパラメータを推定する。非線形最小二乗問題を解く際には数値最適化ソフトウェアを用いる。本研究では Matlab の Optimization Toolbox にあるコマンド `lsqnonlin` を使用する [97]。

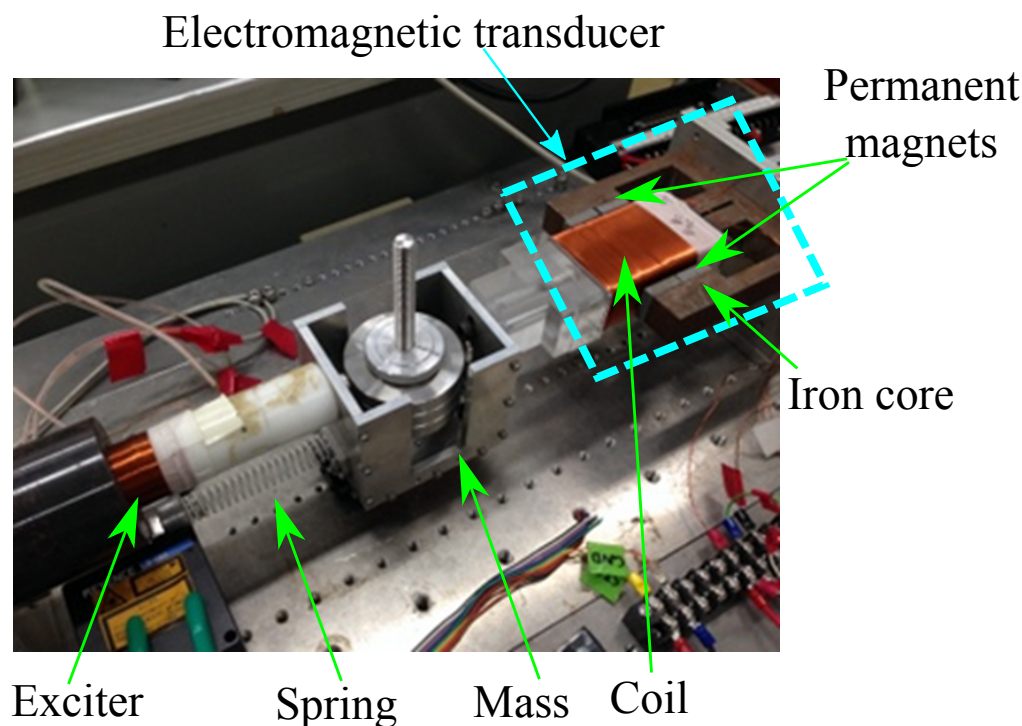


Fig.3.5: Picture of the experimental setup

### 3.3.3 実験結果と考察

実験によって得られた複素アドミタンスの計測データとパラメータ推定結果を用いたモデルの応答との比較を行う．表 3.2 に得られたパラメータ推定結果を示す．図 3.7 と図 3.8 に計測データと応答モデルを重ね書きしたものを示す．図 3.7 は複素平面上における  $1/(j\omega Y_e(j\omega))$  のベクトル軌跡，図 3.8 はアドミタンス周波数特性  $Y_e(j\omega)$  のボード線図である．ここでベクトル軌跡の  $1/(j\omega Y_e(j\omega))$  は式 (3.7) で示した非線形最小二乗法によるパラメータ推定で使用した評価関数である．図 3.7，図 3.8 ともに青い点は計測したアドミタンス，赤い破線と実線はそれぞれ線形最小二乗問題と非線形最小二乗問題を用いて推定したモデルの応答である．

図 3.8 は破線と実線に違いが見られないが，図 3.7 では実験データへの適合度合いに違いが見られる．ここで，線形最小二乗問題と非線形最小二乗問題の評価関数を比較すると，非線形最小二乗問題の評価関数の方がアドミタンスの推定誤差を小さくするという物理的意味がはっきりしている．そこで，非線形最小二乗問題の評価関数に基づき図 3.7 を対比すると，周波数領域における平均的な推定誤差が定性的に小さい

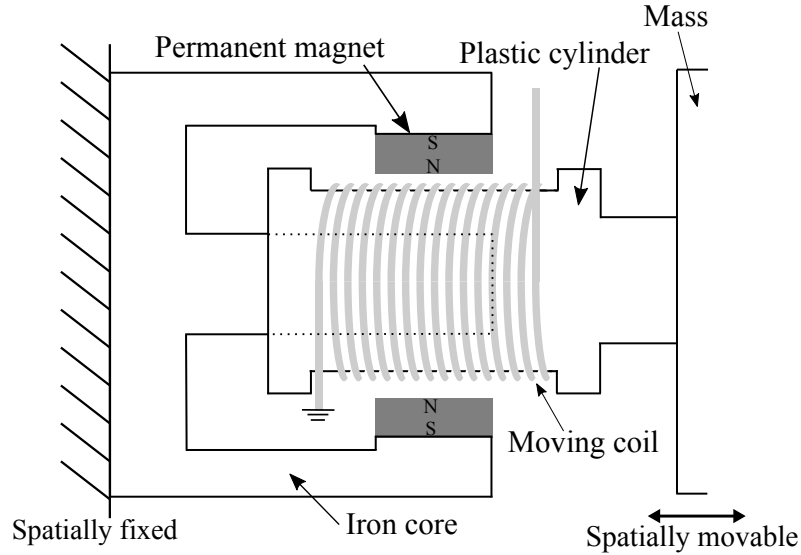


Fig.3.6: Schematic of an electromagnetic transducer comprising a moving coil, two permanent magnets, and an iron core

Table 3.2: Estimated parameter values

	$\zeta_1$ [-]	$\omega_1$ [rad/s]	$\bar{\phi}$ [N/A/kg <sup>1/2</sup> ]	$R_0$ [ $\Omega$ ]	$L_0$ [H]
Linear	0.00814	50.8	1.76	2.56	$5.68 \times 10^{-3}$
Nonlinear	0.00705	50.8	1.70	2.57	$5.35 \times 10^{-3}$

ので非線形最小二乗問題を用いた方がパラメータ推定精度が高いことが確認できる。

### 3.4 推定値検証のための制振実験

#### 3.4.1 シャント回路の最適設計

前節で得られたパラメータ推定値の検証のために、電磁シャント制振実験を行う。式 (3.1)-(3.4) より、外乱  $f_d$  から  $x_1$  までの伝達関数は以下のように表される。

$$G_{xf}(s) = \frac{1}{m_1} \frac{1}{s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2 + \frac{\bar{\phi}^2 s}{L_0 s + R_0 + Z_s(s)}} \quad (3.21)$$

ここで、 $Z_s(s) := -\tilde{v}_e(s)/\tilde{i}_e(s)$  はシャント制振のインピーダンスである。もし、電磁トランスデューサの端子間を開放した場合、つまり  $i_e = 0$  では、 $G_{xf}(s)$  は以下の

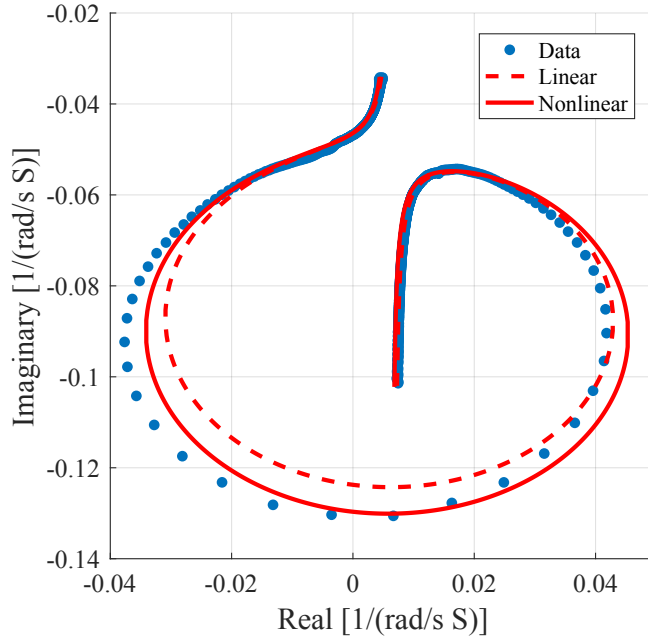


Fig.3.7: Vector locus of the identified  $1/(j\omega Y_e(j\omega))$

ようになる.

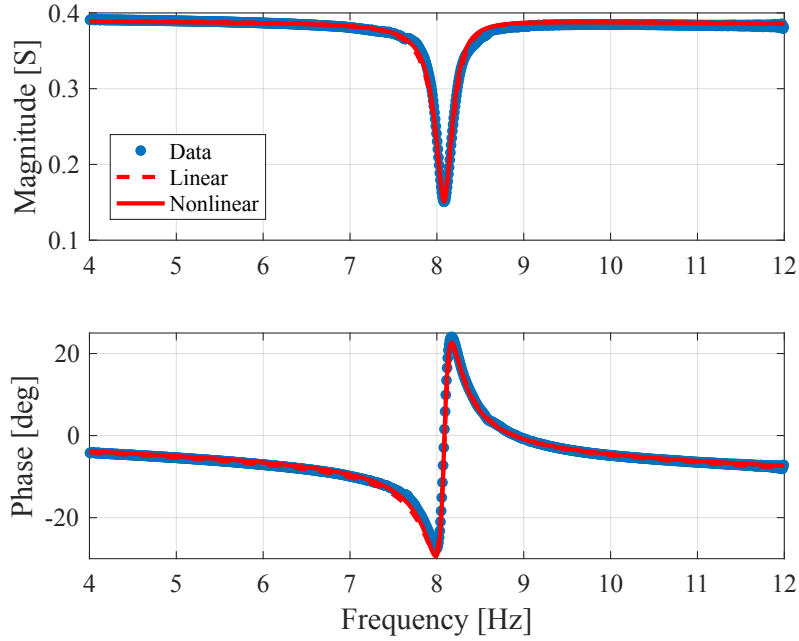
$$G_{\text{open}}(s) = \frac{1}{m_1} \frac{1}{s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2} \quad (3.22)$$

本節ではシャント回路に抵抗のみの回路，抵抗とキャパシタの直列接続した回路の 2 種類を用いる．それぞれのインピーダンスは以下ようになる．

$$Z_s(s) = \begin{cases} R_s & (\text{R shunt}) \\ R_s + \frac{1}{C_s s} & (\text{RC shunt}) \end{cases} \quad (3.23)$$

シャント回路の最適設計値は，動吸振器の定点理論によって導出した最適設計式に推定したパラメータ値を代入することで求める．R シャント回路の最適設計式には式 (3.24)，RC シャント回路の最適設計式には式 (3.25) を用いる [31,96]．RC シャント回路における抵抗値の最適設計式が第 2 章の表 2.1 で示したものと異なるが，これは定点理論による最適減衰比の近似方法による差異である．

$$R_s^{\text{opt(Rshunt)}} = L_0 \sqrt{\frac{2\omega_1^2 L_0 + \bar{\phi}^2}{2L_0}} - R_0 \quad (3.24)$$

Fig.3.8: Bode diagram of the identified  $Y_e(j\omega)$ 

$$\begin{cases} R_s^{\text{opt(RCshunt)}} = \frac{\bar{\phi}}{4} \left( \sqrt{6L_0 + \sqrt{\frac{2\bar{\phi}^2 L_0}{\omega_1^2}}} + \sqrt{6L_0 - \sqrt{\frac{2\bar{\phi}^2 L_0}{\omega_1^2}}} \right) - R_0 \\ C_s^{\text{opt(RCshunt)}} = \frac{2}{2\omega_1^2 L_0 - \bar{\phi}^2} \end{cases} \quad (3.25)$$

ここで第 2 章で示した  $H_\infty$  規範による設計ではなく定点理論を用いた理由を説明する。2.3.5 項の図 2.6(a) で示したように、無次元化電気機械結合係数  $\psi$  が小さい場合には定点理論による最適パラメータと  $H_\infty$  規範による最適パラメータはよく一致している。実際に表 3.2 の非線形最小二乗問題によるパラメータ推定結果を用いると、 $\psi = \bar{\phi}^2 / (L_0 \omega_1^2) = 0.210$  と算出することができる。その時の定点理論と  $H_\infty$  規範による最適パラメータは有効数字 3 桁まで同一となる。本章では定点理論と  $H_\infty$  規範の差異を判断できるほどの精度の高い実験を行う必要がないことや、減衰比が存在するため  $H_\infty$  規範でも厳密解ではない、最適パラメータの数式がシンプルであるため入力ミスを防ぐといった理由から、本節では定点理論による最適パラメータを使用する。式 (3.24) と式 (3.25) に表 3.2 の非線形最小二乗問題によるパラメータ推定結果を代入することで求めた最適設計値を表 3.3 に示す。

シャント回路の最適設計を行った時の、外力から変位までの周波数応答の数値事

Table 3.3: Parameters of the shunt circuit

$R_s^{\text{opt(Rshunt)}}$	-2.28	$[\Omega]$
$R_s^{\text{opt(RCshunt)}}$	-2.42	$[\Omega]$
$C_s^{\text{opt(RCshunt)}}$	0.0810	$[\text{F}]$

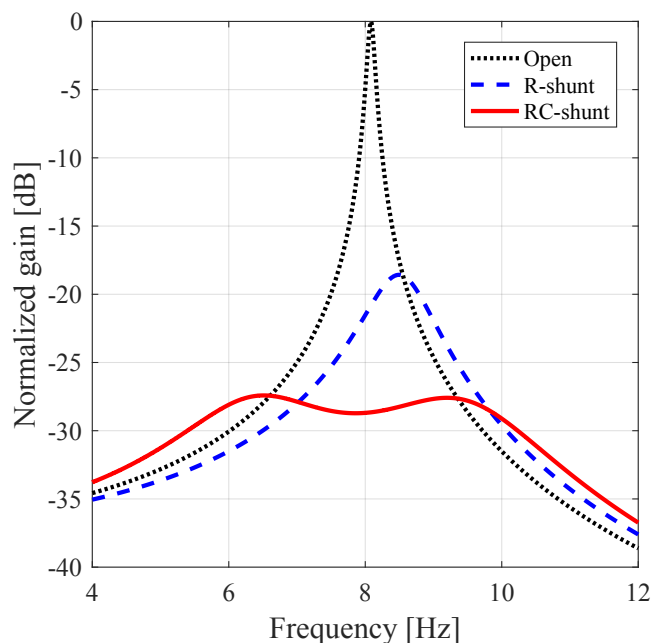


Fig.3.9: Simulated frequency response

例を図 3.9 に示す．黒の点線が端子間開放時，青の破線が R シヤント回路接続時，赤の実線が RC シヤント回路接続時を表しており，端子間開放時のゲインのピークを 0 dB に正規化している．端子間開放時と比べて R シヤント回路接続時では約  $-18.6$  dB のピークゲイン低減とピークの位置がずれることが確認できる．ピークの位置がずれる現象について簡単に説明する．電磁トランスデューサに R シヤント回路を接続することは，図 2.4(a) の副系の質量  $m_e$  が無限大，つまり固定されていることに相当する．よってマスばねダンパ系にばねとダンパを直列に接続されていると解釈することができ，系全体には無制御時と比べて減衰と剛性が付加されているためピークの位置がずれる．また，RC シヤント回路接続時では，1 個のピークが 2 個に分かれ，約  $-27.4$  dB の低減が確認できる．



### 3.4.2 実験装置

表 3.3 より，本実験装置では最適設計を行ったシャント回路の抵抗値が負の値を持つ．これは回路全体の最適抵抗値が制振用の電磁トランスデューサの内部抵抗より小さいために起こる現象である．そこで仮想インピーダンス回路を接続することにより，仮想的に負値の抵抗を取り付けることが可能となる [96]．

仮想インピーダンス回路を接続した制振実験装置の概略図を図 3.10 に示す．図中の  $v_y$  は DSP の AD ボードへの信号， $v_u$  は DSP の DA ボードからの信号を表す．シャント回路へ接続する所望のインピーダンスを  $Z_s(s)$  とすると DSP に書き込むコントローラ  $K(s)$  は次式で表される．

$$K(s) = \frac{\tilde{v}_u(s)}{\tilde{v}_y(s)} = \frac{1}{R_{in}K_{in}K_{out}} (Z_s(s) - R_{in}) \quad (3.26)$$

また，加振器には電流アンプとファンクションジェネレータが接続されている．本実験では制振性能の評価のために，振動によって生じる台車の変位  $x_1$  をレーザ変位計 (LB-080, KEYENCE) によって計測する．なお，式 (3.2) より，電磁トランスデューサの最大出力は  $f_l^{\max} = \phi i_e^{\max}$  により与えられる．ただし  $i_e^{\max}$  はコイルに流れる最大電流を表し，パワー OP アンプ  $K_{out}$  (LM675, Texas Instruments) により決定される．本実験装置で使用する DSP の最大出力電圧が 10 V 以下であり，パワー OP アンプの増幅率  $K_{out}$  は表 3.1 より約 1 なので，パワー OP アンプの最大出力電圧は 10V 以下である．パワー OP アンプのデータシートによれば，パワー OP アンプを流れ出る最大電流はパワー OP アンプの最大出力電圧から決定され， $i_e^{\max} = 3$  A と見積もることができる．電気機械結合変数  $\phi$  は提案手法では一意に定まらないが，付録 F で提案するように付加質量を用いたり，速度センサと電圧センサを用いることで求めることが可能である．ここでは表 F.2 で示した値  $\phi = 2.51$  N/A を用いると，電磁トランスデューサの最大出力は  $f_l^{\max} = 7.53$  N と見積もることができる．

### 3.4.3 実験手順

1. R シャント回路，RC シャント回路のインピーダンス  $Z_s(s)$  はそれぞれ式 (3.27)，式 (3.28) で表される．表 3.1，表 3.3 の値と式 (3.27) または式 (3.28) を用いて式 (3.26) で示したコントローラ  $K(s)$  を決定する．そしてコントローラ  $K(s)$  を双一次変換によって離散化を行い，Matlab の Simulink を用いて

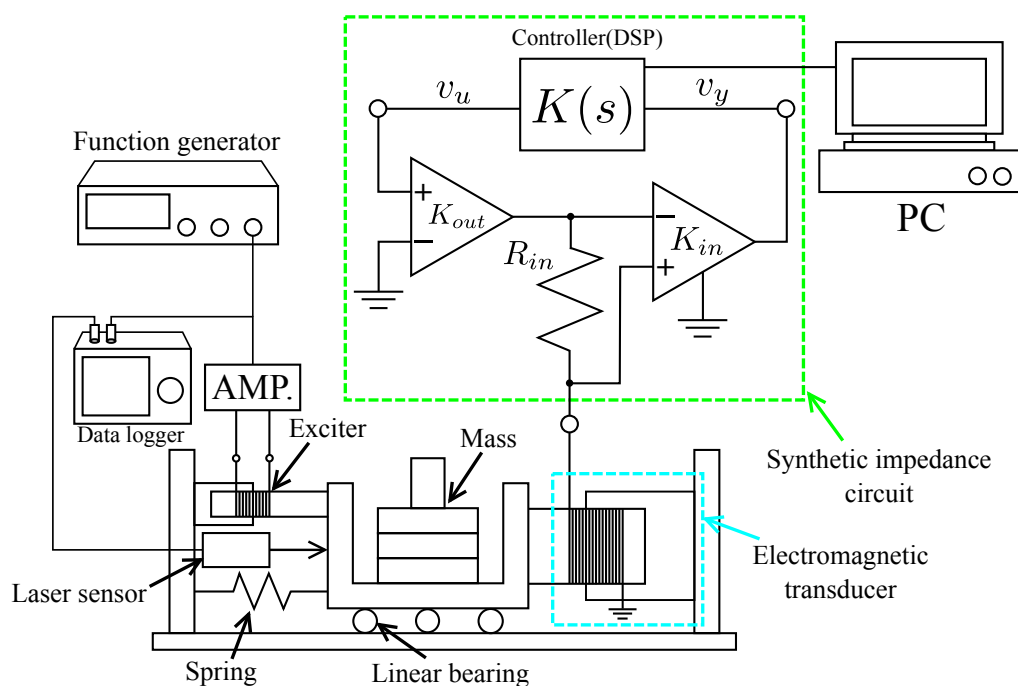


Fig.3.10: Experimental setup for the shunt damping

DSP に書き込むことで仮想的にシャント回路を実現する．DSP のサンプリング周波数は 5000 Hz とする．

$$Z_s^{\text{Rshunt}}(s) = R_s^{\text{opt}(\text{Rshunt})} \quad (3.27)$$

$$Z_s^{\text{RCshunt}}(s) = R_s^{\text{opt}(\text{RCshunt})} + \frac{1}{C_s^{\text{opt}(\text{RCshunt})} s} \quad (3.28)$$

2. データロガーを用いて，ファンクションジェネレータの印加電圧 (外乱)  $f_d$  とレーザセンサによって計測した変位  $x_1$  を計測する．ファンクションジェネレータの入力信号は 700 mV 振幅で 4~12 Hz までを 81 秒間かけてスイープ加振を行う．サンプリング周波数は 200 Hz で 16384 点とる．
3. 端子間開放と R シャント回路，RC シャント回路における最適設計値を用いた場合の全部で 3 通りの制振実験をそれぞれ 3 回計測を行う．
4.  $f_d$  と  $x_1$  の平均クロススペクトルを  $f_d$  の平均パワースペクトルで割ることで，3 通りの計測結果それぞれの外乱  $f_d$  から変位  $x_1$  の周波数応答  $G_{x f_d}(j\omega)$  を求める．

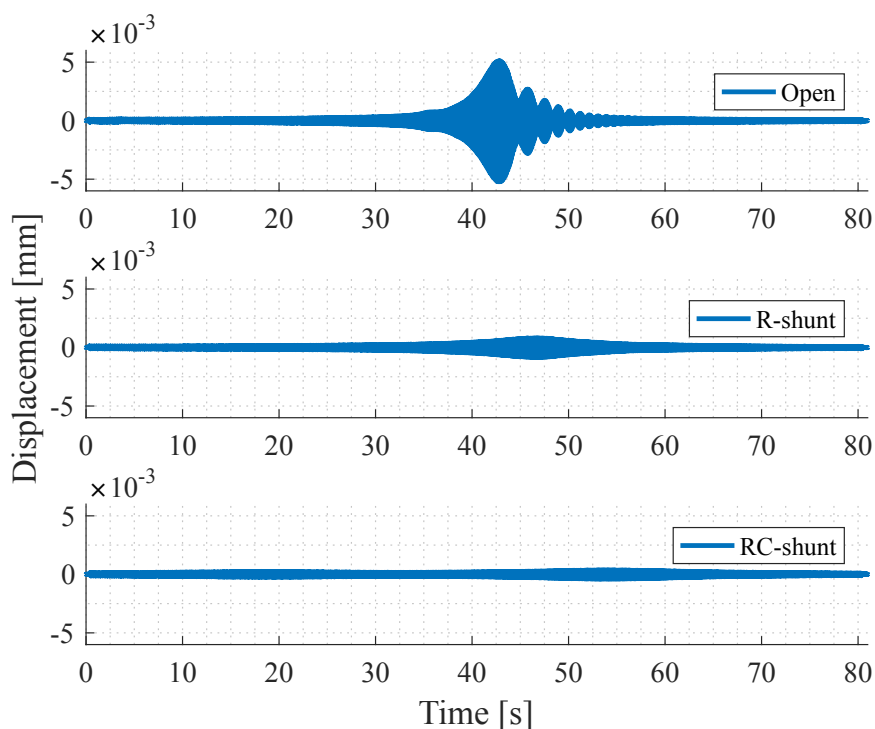


Fig.3.11: Time response in the experiment

### 3.4.4 実験結果と考察

端子間開放時と R シャント回路, RC シャント回路を取り付けた場合それぞれにおける制振実験結果の時刻歴を図 3.11 に示す. それぞれの最大振幅は上から約 5.13 mm, 約 0.84 mm, 約 0.39 mm であり, 制振が行われていることが確認できる.

次に制振性能の比較のために端子間開放, R シャント回路, RC シャント回路におけるゲイン線図を重ね書きし, 端子間開放時のゲインのピークを 0 dB に正規化したものを図 3.12 に示す. またこの時のコヒーレンスを図 3.13 に示す. 両図共に黒の点線が端子間開放時, 青の破線が R シャント回路接続時, 赤の実線が RC シャント回路接続時である. 図 3.7 と図 3.8 より, 推定されたモデルの応答が実験データによく一致していることから推定されたパラメータの誤差は小さいと考えられる. しかし共振型シャント回路を用いた電磁シャント制振においては, 僅かなパラメータ誤差が制振性能に大きく影響するため検証が必要となる. 図 3.12 から R シャント回路接続時では端子間開放と比べて約  $-19.2$  dB, RC シャント回路接続時では約  $-26.0$  dB 低

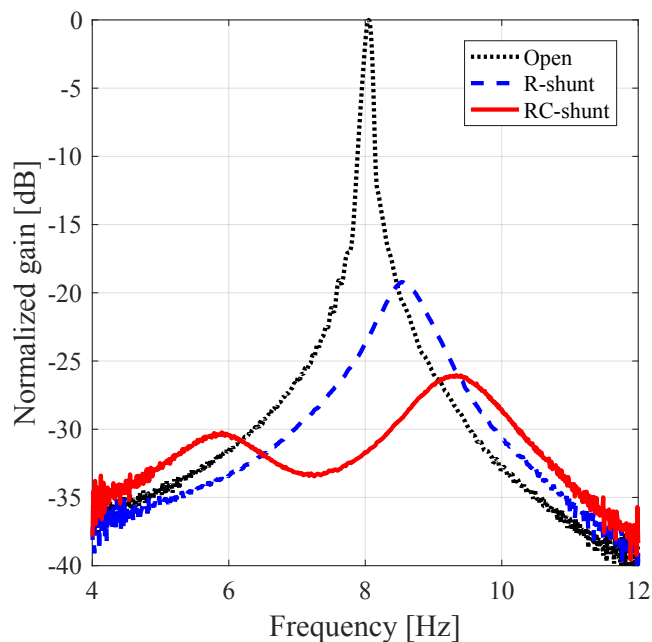


Fig.3.12: Frequency response in the experiment

減されていることが確認できた。つまり共振周波数付近での最大振幅が R シャント回路接続時では約  $1/9$  に、RC シャント回路接続時では約  $1/20$  以下に抑えられていることが確認でき、十分に高い制振性能が発揮できている。

図 3.9 と図 3.12 を比較すると、R シャント回路接続時においては理論解析と制振実験の結果がほぼ一致していることが確認できる。一方、RC シャント回路接続時の理論解析においては、1 個のピークが 2 個のピークに分かれる形で制振されているという点で、制振実験の結果と定性的に一致する。理論解析では 2 個のピークの高さがほぼ一致するのに対し、制振実験では 2 個のピークの高さが異なるという意味で、定量的に違いがみられる。しかし、理論解析と制振実験での最大ピークの高さがほぼ一致する (理論解析:  $-27.4$  dB, 制振実験:  $-26.0$  dB) ことから、制振実験は理論解析と同様の制振性能を達成したと判断できる。

### 3.5 まとめ

電磁トランスデューサのモデル化と支配方程式の導出、電磁トランスデューサの端子間におけるアドミタンス伝達関数の導出を行った。得られた電気系と機械系が結合されたアドミタンスと結合なしのアドミタンスとを比較することで、機械系の固有振

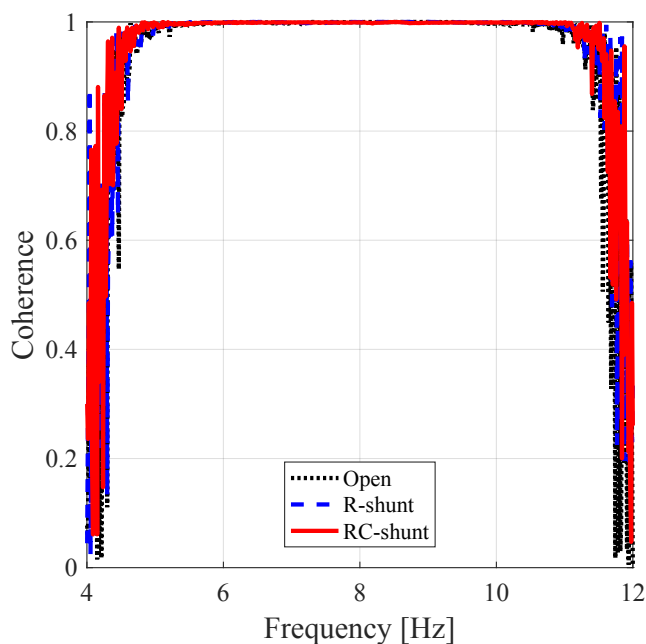


Fig.3.13: Coherence in the experiment

動数付近のアドミタンス周波数特性が重要であることを考察した。そして、固有振動数付近のアドミタンス周波数特性計測のみで電気系だけでなく、機械系と電気機械結合系のパラメータも変位・速度センサや加振用のアクチュエータを使用せずに推定可能であることを示した。次にパラメータ推定のための非線形最小二乗問題を定式化し、数値最適化の初期値のための線形最小二乗問題を示した。提案手法によって各パラメータ値が推定可能であることと、推定したパラメータ値を用いて電磁シャント制振実験を行うことで、パラメータ推定値が妥当であることを示した。

本章で提案したパラメータ推定手法を用いることで、外部センサや加振用アクチュエータを必要とせずにパラメータ推定から電磁シャント制振までを行うことができるため、より装置のコスト低減や簡単化を行うこと可能である。また、電磁シャント制振に限らず電磁トランスデューサを使用する際には、電磁トランスデューサのパラメータ (特に電気機械結合係数) を必要とすることが多いため、本推定手法は電磁シャント制振以外の応用にも有効と予想できる。

## 第 4 章

# 渦電流を考慮したモデリングとそのパラメータ推定

本章では、高周波帯域で精度の高い電磁トランスデューサの電気系モデルを提案する。電磁トランスデューサには鉄心が含まれているため、鉄心中の磁場変化に応じてヒステリシス損と渦電流損が発生する。本章ではその中でも渦電流損に着目する。渦電流損が高周波帯域で大きくなるため、前章で用いたモデルでは、高周波帯域でモデル化誤差が大きくなるという問題がある。そこで、鉄心に発生する渦電流をモデル化することで、モデル化精度の向上を図る。そして前章で提案したパラメータ推定手法を拡張して、提案モデルのパラメータ値の推定とモデル化精度検証のための電磁シャント制振実験を行う。

### 4.1 渦電流を考慮したモデリング

#### 4.1.1 従来モデル

電磁トランスデューサの電気系モデルは一般的に式 (3.4) で表される [8, 23, 24, 28, 29, 31–45]。しかし、電磁トランスデューサには鉄心が含まれており、高周波帯域では鉄心内部に渦電流が発生し、このモデルでは不十分であると考えられる。この渦電

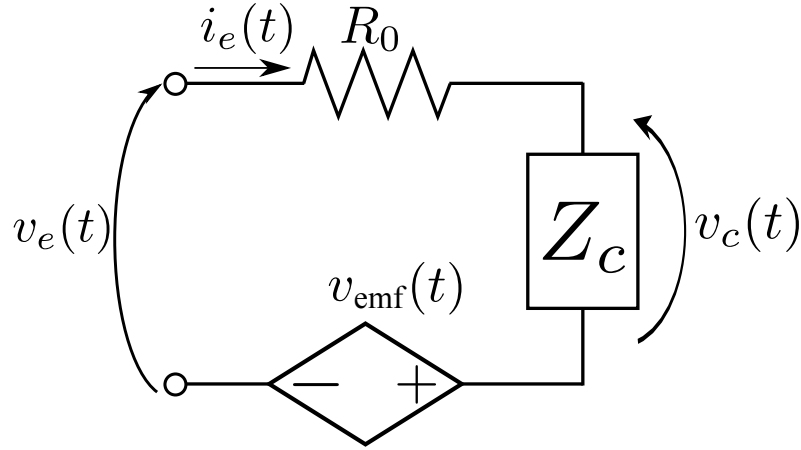


Fig.4.1: Electrical system model of the series connection of the impedance of the coil,  $Z_c(s)$ , the internal resistance in the coil,  $R_0$ , and the motional electromotive force,  $v_{emf}(t)$

流を考慮したモデリングを行うために，電気系モデルの支配方程式，つまり式 (3.4) を修正して以下のように一般化する．

$$v_e(t) - v_{emf}(t) = R_0 i_e(t) + v_c(t) \quad (4.1)$$

$v_c(t)$  [V] はインピーダンス  $Z_c(s)$  の端子間電圧であり，ラプラス変換を用いると  $Z_c(s)$  は以下のように表される．

$$Z_c(s) := \frac{\tilde{v}_c(s)}{\tilde{i}_e(s)} \quad (4.2)$$

この時の回路図は図 4.1 のようになる．式 (3.4) で表される従来モデルにおける  $Z_c(s)$  に相当する部分は次のように表される．

$$Z_c^I(s) = L_0 s \quad (4.3)$$

以降ではこのモデルを“従来モデル I”と呼ぶこととし，以降で示すモデルとの違いを識別するために右肩にモデルの名前を付ける．

また，渦電流損を考慮するために，文献 [16, 17] では，自己インダクタンス  $L_0$  と並列に抵抗  $R_\mu$  を加えたモデルが提案されている．以降ではこのモデルを“従来モデル II”と呼ぶ．この従来モデル II のインピーダンスは次のように表される．

$$Z_c^{II}(s) = \frac{R_\mu L_0 s}{L_0 s + R_\mu} \quad (4.4)$$

さらに上記以外にも、渦電流を考慮した電気系モデルとして文献 [18, 19] が以下のようなモデルを提案している。以降ではこのモデルを“従来モデル III”と呼ぶ。

$$Z_c^{\text{III}}(s) = -\beta\sqrt{-s}\frac{J_1(\sqrt{-\alpha s})}{J_0(\sqrt{-\alpha s})} \quad (4.5)$$

ここで  $\alpha$ ,  $\beta$  は渦電流に関するパラメータである。

## 4.1.2 提案モデル

### 4.1.2.1 空間的非一様パラメータ・空間的分布渦電流

従来モデル I はこれまでの研究で広く用いられてきたが、鉄心の電気伝導率を無視している。この近似は低周波帯域では有効であるが、高周波帯域では鉄心内に渦電流 [98] が誘導されるため有効ではない。渦電流は空間に分布的に存在しているが、従来モデル II では渦電流が集中定数化されている [18, 98]。実際、4.3.2 項で示す実験結果からわかるように、中高周波数帯域では計測データと従来モデル I, II はあまり一致しない。

本項では、空間的に非一様なパラメータと鉄心中に空間的に分布する渦電流を考慮することで、新しいインピーダンスモデル  $Z_c(s)$  を提案する。解析の簡単化のため、電磁トランスデューサは図 4.2 に示すようなトロイダル状の鉄心とコイルで構成されているものとする。ファラデーの電磁誘導則より、磁束の直流成分は誘導起電力を発生させないため、電磁トランスデューサの永久磁石による影響は以降のモデル化手法では無視する。さらなる解析の簡単化のため、磁束の方向に沿う微小円筒要素によって鉄心を分割する。図 4.2 で示すように、ある半径  $r$  の位置にある微小円筒要素を  $D$  と表記する。

次に電磁気学の基本法則 [99, 100] に基づいてインピーダンスモデル  $Z_c(s)$  のモデル化を行う。磁場に関するガウスの法則 (Gauss's law for magnetism) より、鉄心内部とギャップにおける磁束は連続的である。また、アンペールの法則 (Ampere's circuital law) より、領域  $D$  を通る閉曲線  $C$  に沿った磁場の強さの線積分は、閉曲線によって形成された閉曲面の中を通る総電流量に比例するため、以下の式で表すことができる。

$$\sigma(r)B(t, r) = N_c i_e(t) + \int_r^{r_{\max}} \mathcal{J}(t, \xi) l(\xi) d\xi \quad (4.6)$$

$$\sigma(r) := \frac{l(r)}{\mu_0 \mu_s(r)} + \frac{d(r)}{\mu_0} \quad (4.7)$$



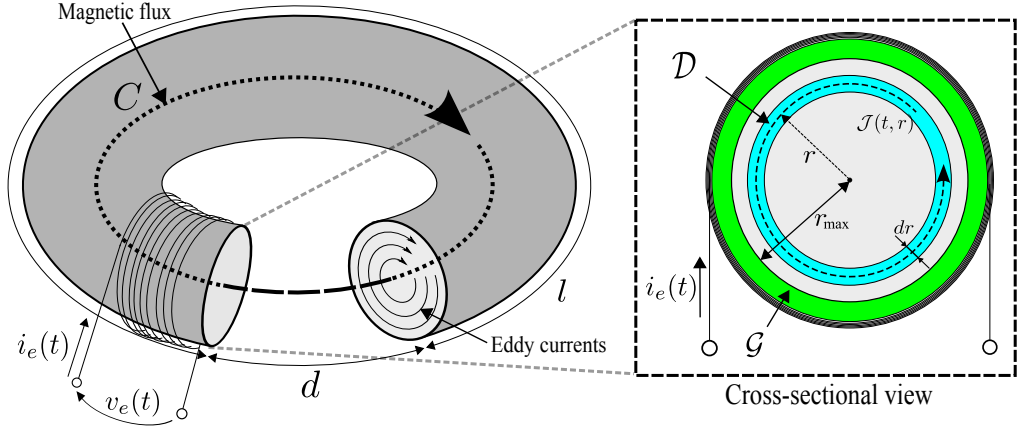


Fig.4.2: Schematic of a simple electromagnetic transducer modeled by pairing a toroidal iron core and a coil. The dashed box shows the schematic of the cross section of the coil and iron core with the infinitesimal cylindrical elements,  $\mathcal{D}$ , and with the circumferential gap,  $\mathcal{G}$ , between the coil and iron core.

ここで、 $B(t, r)$  [T] は磁束密度、 $\mathcal{J}(t, r)$  [A/m<sup>2</sup>] は領域  $\mathcal{D}$  内を円周上に流れる渦電流密度、 $\mu_0$  [H/m] は真空の透磁率、 $\mu_s(r)$  [-] は比透磁率、 $l(r)$  [m] と  $d(r)$  [m] はそれぞれ鉄心とギャップの軸方向の磁路長、 $r_{\max}$  [m] は鉄心の最大半径を表す。ファラデーの電磁誘導則 (Faraday's law of induction) より、領域  $\mathcal{D}$  内の円周上に発生する誘導起電力  $\mathcal{E}(t, r)$  [V] は領域  $\mathcal{D}$  の内側に流れる総磁束量の時間変化であるため、以下のように表される。

$$\mathcal{E}(t, r) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^r 2\pi\xi B(t, \xi) d\xi \quad (4.8)$$

オームの法則 (Ohm's law) より、渦電流密度は以下のような関係式を満たす。

$$\mathcal{J}(t, r) = \frac{\mathcal{E}(t, r)}{2\pi\rho(r)r} \quad (4.9)$$

ここで、 $\rho(r)$  [ $\Omega\text{m}$ ] は鉄心の電気抵抗率を表す。式 (4.6)、式 (4.8)、式 (4.9) をまとめると、磁束密度  $B(t, r)$  に関する次の偏微分方程式と境界条件が得られる。

$$\frac{\partial B(t, r)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\rho(r)r}{l(r)} \frac{\partial \sigma(r)B(t, r)}{\partial r} \right) \quad (4.10)$$

$$\sigma(r_{\max})B(t, r_{\max}) = N_c i_e(t) \quad (4.11)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} r \frac{\partial \sigma(r)B(t, r)}{\partial r} = 0 \quad (4.12)$$

また、図 4.2 中の  $\mathcal{G}$  は鉄心とコイルが相対運動するために必要なギャップを表している。実際、前章の図 3.6 に示したように、実験装置ではプラスチック製のシリンダーにコイルが巻かれており、ギャップは存在している。領域  $\mathcal{G}$  では鉄心と比べて電気伝導率が低く渦電流が発生しないと仮定できるため、領域  $\mathcal{G}$  内での磁束密度は  $B_g(t) = N_c i_e(t) / \sigma_g$ ,  $\sigma_g := (l_g + d_g) / \mu_0$  のように表される。ここで下付き文字の  $g$  はギャップ中のパラメータ、定数であることを示す。これらの事を考慮すると、ファラデーの電磁誘導則より、コイルに発生する逆起電力  $v_c(t)$  は次のように表される。

$$v_c(t) = N_c \frac{d}{dt} \left( \frac{N_c S_g}{\sigma_g} i_e(t) + \int_0^{r_{\max}} 2\pi \xi B(t, \xi) d\xi \right) \quad (4.13)$$

ここで、 $S_g [\text{m}^2]$  は領域  $\mathcal{G}$  の断面積を表す。以上をまとめると、このモデルの支配方程式は式 (4.10)、境界条件は式 (4.11) と式 (4.12)、出力方程式は式 (4.13) で与えられる。

#### 4.1.2.2 空間的一様パラメータ・空間的分布渦電流

式 (4.10) を直接ラプラス変換を用いて、伝達関数に変換することはできないため、本項では式中の物理パラメータ  $\sigma(r)$ ,  $\rho(r)$ ,  $l(r)$  がそれぞれ正の定数  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $l$  であると仮定する。この仮定は、鉄心の材質が一様、漏れ磁束を無視することに相当する。この仮定により、式 (4.10)-(4.12) は以下のように書き換えられる。

$$\frac{\partial B(t, r)}{\partial t} = \frac{\sigma \rho}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B(t, r)}{\partial r} \right) \quad (4.14)$$

$$\sigma B(t, r_{\max}) = N_c i_e(t) \quad (4.15)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} r \frac{\partial B(t, r)}{\partial r} = 0 \quad (4.16)$$

式 (4.14) を時間  $t$  に関してラプラス変換を行うことで、以下のように  $r$  に関する常微分方程式に書き下すことができる。

$$s \tilde{B}(s, r) = \frac{\sigma \rho}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{B}(s, r)}{\partial r} \right) \quad (4.17)$$

式 (4.15)、式 (4.16) の境界条件の元、式 (4.17) の常微分方程式の解を求めると以下のようなになる。

$$\tilde{B}(s, r) = \beta' \frac{J_0(\sqrt{-\alpha' r^2 s})}{J_0(\sqrt{-\alpha' r_{\max}^2 s})} \tilde{i}_e(s) \quad (4.18)$$

ここで  $\alpha' := l/(\sigma\rho)$ ,  $\beta' := N_c/\sigma$  と定義され,  $J_\nu(z)$  は実数  $\nu$  に関する第 1 種ベッセル関数である. ラプラス変換された式 (4.13) に式 (4.18) を代入することで, ラプラス変換後の逆起電力  $\tilde{v}_c(s)$  が次のように得られる.

$$\tilde{v}_c(s) = \left( L_g s - \beta \sqrt{-s} \frac{J_1(\sqrt{-\alpha s})}{J_0(\sqrt{-\alpha s})} \right) \tilde{i}_e(s) \quad (4.19)$$

ここで,  $L_g := N_c^2 S_g / \sigma_g$ ,  $\alpha := l r_{\max}^2 / (\sigma\rho)$ ,  $\beta := 2\pi N_c^2 r_{\max} \sqrt{\rho/(\sigma l)}$  はすべて正の定数である. このモデルは空間的に“一様な (Uniform)” パラメータで空間的に渦電流が“分布 (Distributed)” することを考慮しているため, インピーダンスモデルは  $Z_c^{\text{UD}}(s)$  と表記し, 以降では“UD モデル”と呼ぶ.  $Z_c^{\text{UD}}(s)$  は以下のように表される.

$$Z_c^{\text{UD}}(s) = L_g s - \beta \sqrt{-s} \frac{J_1(\sqrt{-\alpha s})}{J_0(\sqrt{-\alpha s})} \quad (4.20)$$

このモデルでは  $L_g$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  が推定する未知パラメータであり, その数は 3 つである.

上記のような渦電流の分布モデル化は式 (4.5) で示したように文献 [18, 19] でも議論されている. 式 (4.20) と式 (4.5) を比較すると, 従来モデル III には  $L_g s$  が無いことがわかる. この  $L_g s$  は図 4.2 中の領域  $\mathcal{G}$  に発生する自己誘導成分を表している. そのため, UD モデルは従来モデル III の自然な拡張である. 加えて, UD モデルは相対運動に不可欠なコイルと鉄心との間のギャップを考慮しているため, UD モデルは従来モデル III よりも適切なモデルであると考えられる.

#### 4.1.2.3 空間的非一様パラメータ・空間的集中渦電流

後のパラメータ推定実験で示すが, 高周波帯域で UD モデルは従来モデルと比べて良い一致を示しているが, 中周波帯域でまだ差異がみられる. この差異は前項において UD モデルに対して行った, 物理パラメータ  $\sigma(r)$ ,  $\rho(r)$ ,  $l(r)$  がそれぞれ正の定数であるという仮定が原因であると考えられる.

本項では 4.1.2.1 項で示したモデルを離散化することで, 新しいインピーダンスモデルを提案する. 図 4.3 に示すように, 鉄心の断面を  $n$  個のリングに分割する. ここで  $\mathcal{D}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  は内側から  $j$  番目のリングであることを示す. 領域  $\mathcal{D}_j$  内の磁束  $\Phi_j(t)$  [Wb] は以下のように定義する.

$$\Phi_j(t) := \int_{r_{j-1}}^{r_j} 2\pi \xi B(t, \xi) d\xi \quad (4.21)$$

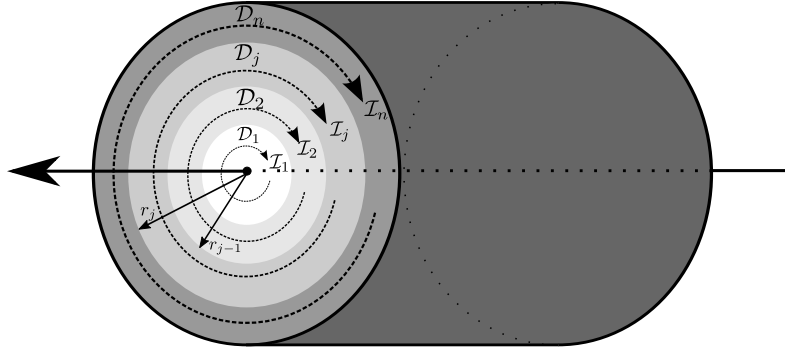


Fig.4.3: Schematic of the cross section of the iron core divided into  $n$  rings, where  $\mathcal{D}_j$  denotes the  $j$ -th ring numbered from the inside

式 (4.6) を式 (4.21) に代入すると以下の式が得られる.

$$\Phi_j(t) = N_c \int_{r_{j-1}}^{r_j} \frac{2\pi\xi}{\sigma(\xi)} d\xi i_e(t) + \int_{r_{j-1}}^{r_j} \frac{2\pi\xi}{\sigma(\xi)} \int_{\xi}^{r_{\max}} \mathcal{J}(t, \xi') l(\xi') d\xi' d\xi \quad (4.22)$$

ここで、右辺第二項の積分区間を  $[\xi, r_{\max}]$  から  $[r_{j-1}, r_{\max}]$  に近似することで、以下の式が得られる.

$$\Phi_j(t) = N_c \mathcal{P}_j i_e(t) + \mathcal{P}_j \sum_{k=j}^n \mathcal{I}_k(t) \quad (4.23)$$

$$\mathcal{P}_j := \int_{r_{j-1}}^{r_j} \frac{2\pi\xi}{\sigma(\xi)} d\xi \quad (4.24)$$

$$\mathcal{I}_j(t) := \int_{r_{j-1}}^{r_j} \mathcal{J}(t, \xi) l(\xi) d\xi \quad (4.25)$$

$\mathcal{P}_j$  [H] は磁気パーミアンスと  $\mathcal{I}_j(t)$  [A] は離散化された渦電流を表す. 式 (4.21) を式 (4.8) に代入することで、以下の式が得られる.

$$\mathcal{E}(t, r_j) = -\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^j \Phi_k(t) \quad (4.26)$$

一方、式 (4.9) を式 (4.25) に代入すると、以下の式が得られる.

$$\mathcal{I}_j(t) = \int_{r_{j-1}}^{r_j} \frac{l(\xi) \mathcal{E}(t, \xi)}{2\pi\rho(\xi)\xi} d\xi \quad (4.27)$$

式 (4.27) 中の  $\mathcal{E}(t, \xi)$  を積分区間で区分的に定数であると近似すると、以下の式が得

られる。

$$R_j \mathcal{I}_j(t) = \mathcal{E}(t, r_j) \quad (4.28)$$

$$R_j := \left( \int_{r_{j-1}}^{r_j} \frac{l(\xi)}{2\pi\rho(\xi)\xi} d\xi \right)^{-1} \quad (4.29)$$

$R_j$  [ $\Omega$ ] は離散化された電気抵抗を表す。最後に式 (4.21) を式 (4.13) に代入することで、以下の式が得られる。

$$v_c(t) = N_c \frac{d}{dt} \left( \frac{N_c S_g}{\sigma_g} i_e(t) + \sum_{j=1}^n \Phi_j(t) \right) \quad (4.30)$$

式 (4.23), 式 (4.26), 式 (4.28), 式 (4.30) をまとめると、以下のように行列形式の回路方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} v_c(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{L} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_e(t) \\ \mathcal{I}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e(t) \\ \mathcal{I}(t) \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \begin{bmatrix} L_0 & M_{01} & \cdots & M_{0n} \\ M_{10} & L_1 & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n0} & M_{n1} & \cdots & L_n \end{bmatrix} \\ &:= \begin{bmatrix} N_c^2 (\mathcal{P}_g + \mathbf{u}^T \mathcal{P} \mathbf{u}) & N_c \mathbf{u}^T \mathcal{P} \mathbf{D}^T \\ N_c \mathbf{D} \mathcal{P} \mathbf{u} & \mathbf{D} \mathcal{P} \mathbf{D}^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\mathcal{P}_g := \frac{S_g}{\sigma_g} = \frac{L_g}{N_c^2}, \quad (4.33)$$

$$\mathcal{P} := \text{diag} [ \mathcal{P}_1 \quad \cdots \quad \mathcal{P}_n ] \quad (4.34)$$

$$\mathbf{R} := \text{diag} [ R_1 \quad \cdots \quad R_n ] \quad (4.35)$$

$$\mathcal{I}(t) := [ \mathcal{I}_1(t) \quad \cdots \quad \mathcal{I}_n(t) ]^T \quad (4.36)$$

$$\mathbf{u} := [ 1 \quad \cdots \quad 1 ]^T \in \mathbb{R}^n \quad (4.37)$$

$$\mathbf{D} := \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ 1 & \cdots & 1 & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (4.38)$$

式 (4.31) より、鉄心内部に式 (4.25) で定義される渦電流が流れることで、仮想的にコイルが形成されていると考えることができる。そのため、図 4.4 のような図 4.3 の等価電気系モデルが得られる。ここで、 $L_0$  はコイルの自己インダクタンス、 $L_j$ ,

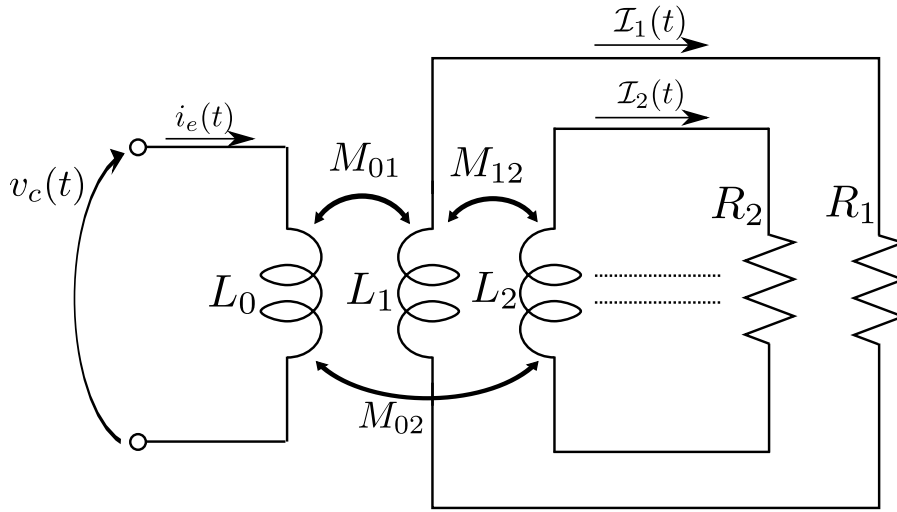


Fig.4.4: Equivalent circuit diagram of Fig. 4.3

$1 \leq j \leq n$  は鉄心内部に仮想的に形成されるコイルの自己インダクタンス,  $M_{ij}$ ,  $0 \leq i, j \leq n$  はこれらのコイル間にある相互インダクタンス,  $R_j$ ,  $1 \leq j \leq n$  は鉄心内部に仮想的に形成されるコイルの内部抵抗である. インダクタに貯まる磁気エネルギーと鉄心の抵抗率は正であるため,  $\mathbf{L}$  は正定対称行列,  $R_j$  が正であり, この回路は受動であるといえる [101]. このモデルは空間的に“非一様な (Non-uniform)”パラメータで空間的に渦電流が“集中 (Lumped)”していることを考慮しているため, インピーダンスモデルは  $Z_c^{NL}(s)$  と表記し, “NL モデル”と呼ぶ. 式 (4.31) をラプラス変換することで, 以下のインピーダンスモデル  $Z_c^{NL}(s)$  が得られる.

$$Z_c^{NL}(s) = N_c^2 (\mathcal{P}_g + \mathbf{u}^T \mathcal{P} \mathbf{u}) s - N_c^2 \mathbf{u}^T \mathcal{P} \mathbf{D}^T (\mathbf{D} \mathcal{P} \mathbf{D}^T s + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{D} \mathcal{P} \mathbf{u} s^2 \quad (4.39)$$

このモデルでは  $\mathcal{P}_g$ ,  $\mathcal{P}_j$ ,  $R_j$  が推定する未知パラメータであり, その数は  $2n + 1$  個である. ここで, 離散化の数  $n$  に任意性があることに留意したい.

#### 4.1.2.4 空間的一様パラメータ・空間的集中渦電流

4.1.2.3 項における式中の物理パラメータ  $\sigma(r)$ ,  $\rho(r)$ ,  $l(r)$  がそれぞれ正の定数  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $l$  であると仮定する. つまり式 (4.24) と式 (4.29) は次のように変形される.

$$\mathcal{P}_j = \frac{\pi}{\sigma} (r_j^2 - r_{j-1}^2) \quad (4.40)$$

$$R_j = \frac{2\pi\rho r_j}{l(r_j - r_{j-1})} \quad (4.41)$$

ここで式 (4.29) 中の被積分関数が  $l/2\pi\rho r_j$  であると近似している．簡単化のため，領域  $\mathcal{D}_j$  の断面積が同一であると考えると， $r_j$  は次のように与えられる．

$$r_j = \sqrt{\frac{j}{n}} r_{\max} \quad (4.42)$$

式 (4.42) を式 (4.40) と式 (4.41) に代入すると， $\mathcal{P}_j$  と  $R_j$  は以下のように得られる．

$$\mathcal{P}_j = \frac{\pi r_{\max}^2}{\sigma} \frac{1}{n} = \frac{\sqrt{\alpha}\beta}{2N_c^2} \frac{1}{n} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} R_j &= \frac{2\pi\rho}{l} \left( j + \sqrt{j(j-1)} \right) \\ &= \frac{\beta}{N_c^2\sqrt{\alpha}} \left( j + \sqrt{j(j-1)} \right) \end{aligned} \quad (4.44)$$

ここで，式 (4.43) と式 (4.44) の右辺はパラメータ  $\alpha$  と  $\beta$  で表している．式 (4.33)，式 (4.43)，式 (4.44) を式 (4.39) に代入することで，空間的に一様なパラメータで空間的に渦電流が集中していることを考慮したモデルが得られる．このインピーダンスモデルは式 (4.20) の UD モデルが離散化されたモデルと考えることができる．このインピーダンスモデルは  $L_g$ ， $\alpha$ ， $\beta$  の 3 つが未知パラメータであることに注意する．

## 4.2 提案モデルの等価回路モデル

### 4.2.1 インダクタンス行列と抵抗行列の同時対角化

本節では，4.1.2.3 項で提案した NL モデルの新しい等価回路モデルについて議論する．新しい等価回路モデルを導出するために，式 (4.31) のインダクタンス行列  $\mathbf{L}$  と抵抗行列  $\mathbf{R}$  の同時対角化を行う．しかし， $v_c(t)$  と  $i_e(t)$  は電磁トランスデューサのインピーダンスモデルを導出するために必須であるため，これらの変数は対角化してはならない事に注意する．そのため， $\mathbf{L}$  を式 (4.32) のように部分行列に分解することで，行列  $\mathbf{D}\mathbf{P}\mathbf{D}^T$  と行列  $\mathbf{R}$  の同時対角化を行う．

文献 [102] の定理 7.6.4(a) を拡張して，以下に本節で使用する新しい定理を示す．

**定理 1.** 行列  $\mathbf{A}$ ， $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  がエルミートであり，行列  $\mathbf{\Lambda}_A$  は正の対角行列である．もし  $\mathbf{A}$  が正定値行列であるなら，次の式を満たす正則行列  $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  が存在する．

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}_A\mathbf{S}^* \\ \mathbf{B} &= \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}_B\mathbf{S}^* \end{aligned}$$

ここで  $\Lambda_B$  は実対角行列である。またシルヴェスターの慣性法則 (Sylvester's law of inertia) より、行列  $B$  と  $\Lambda_B$  の慣性は同じであるので、もし  $B$  が正定値行列ならば  $\Lambda_B$  は正の対角行列である。

証明.  $T^{-1}AT^{-*} = I$  を満たす正則行列  $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$  を選ぶ。次に  $U^*T^{-1}BT^{-*}U = \Lambda$  が対角行列となるようなユニタリ行列  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  を選ぶ。そうして得られた  $T$  と  $U$  を用いて変換行列  $S$  を  $S = TU\Lambda_A^{-\frac{1}{2}}$  のように決定する。そうすると、 $S^{-1}AS^{-*} = \Lambda_A^{\frac{1}{2}}U^*T^{-1}AT^{-*}U\Lambda_A^{\frac{1}{2}} = \Lambda_A$ 、 $S^{-1}BS^{-*} = \Lambda_A^{\frac{1}{2}}U^*T^{-1}BT^{-*}U\Lambda_A^{\frac{1}{2}} = \Lambda\Lambda_A = \Lambda_B$  と 2 つの行列が同時に対角行列となる。□

$\mathcal{P}$  と  $R$  は正の対角行列であるため、 $D\mathcal{P}D^T$  と  $R$  は正定値行列である。それゆえ定理 1 より、 $D\mathcal{P}D^T$  と  $R$  の同時対角化が可能である。正則行列  $S$  によって式 (4.31) を部分同時対角化することで以下の式が得られる。

$$\begin{bmatrix} v_c(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0 & \hat{M}^T \\ \hat{M} & \hat{L} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_e(t) \\ \hat{\mathcal{I}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e(t) \\ \hat{\mathcal{I}}(t) \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

$$L_0 := N_c^2 (\mathcal{P}_g + \mathbf{u}^T \mathcal{P} \mathbf{u}) \quad (4.46)$$

$$\hat{L} := S^{-1} D\mathcal{P}D^T S^{-T} \quad (4.47)$$

$$\hat{R} := S^{-1} R S^{-T} \quad (4.48)$$

$$\hat{M} := N_c S^{-1} D\mathcal{P} \mathbf{u} \quad (4.49)$$

$$\hat{\mathcal{I}}(t) := S^T \mathcal{I}(t) \quad (4.50)$$

ここで  $\hat{L}$  と  $\hat{R}$  は正の対角行列である。 $D\mathcal{P}D^T$  と  $R$  はともに正定値行列であるため、所望の対角行列に対角化できるという任意性がある。そのため以下に 3 つの例を示すが、その限りではないことに注意せよ。

#### ■ $\hat{L}$ を単位行列とする場合

$$\hat{L} = I, \hat{R} = \Lambda_a \quad (4.51)$$

この場合、正則行列  $S$  は以下の条件を満たす。

$$\begin{aligned} S &= T_a U_a, \\ \text{s.t. } \begin{cases} T_a = D\mathcal{P}^{\frac{1}{2}} \\ U_a^T T_a^{-1} R T_a^{-T} U_a = \Lambda_a \end{cases} \end{aligned} \quad (4.52)$$



■  $\hat{R}$  を単位行列とする場合

$$\hat{L} = \Lambda_b, \hat{R} = I \quad (4.53)$$

この場合、正則行列  $S$  は以下の条件を満たす。

$$\begin{aligned} S &= T_b U_b, \\ \text{s.t. } \begin{cases} T_b = R^{\frac{1}{2}} \\ U_b^T T_b^{-1} D P D^T T_b^{-T} U_b = \Lambda_b \end{cases} \end{aligned} \quad (4.54)$$

■  $\hat{R}$  を  $R$  と同一とする場合

$$\hat{L} = \Lambda_c R, \hat{R} = R \quad (4.55)$$

この場合、正則行列  $S$  は以下の条件を満たす。

$$\begin{aligned} S &= T_c U_c R^{\frac{1}{2}}, \\ \text{s.t. } \begin{cases} T_c = R^{\frac{1}{2}} \\ U_c^T T_c^{-1} D P D^T T_c^{-T} U_c = \Lambda_c R \end{cases} \end{aligned} \quad (4.56)$$

## 4.2.2 同時対角化によって得られた等価回路

図 4.5 に  $n = 3$  の時の式 (4.45) を表す等価回路図を示す。図 4.5 中の  $\hat{M}_i$ ,  $\hat{L}_i$ ,  $\hat{R}_i$ ,  $\hat{I}_i(t)$  はそれぞれ,  $\hat{M}$ ,  $\hat{L}$ ,  $\hat{R}$ ,  $\hat{I}(t)$  の  $i$  番目の成分を表す。図 4.5 中の相互インダクタンスの数が, 図 4.4 と比較して削減されていることがわかる。また, 図 4.6 に, 図 4.5 の相互インダクタンスを除去することで得られた別の等価回路図を示す。

## 4.3 パラメータ推定実験

### 4.3.1 パラメータ推定手法

本節で行うパラメータ推定手法は, 前章の 3.2 節で示した従来モデル I で用いた手法を拡張したものをを用いる。具体的には非線形数値最適化に用いる初期値の選定を拡張する。その結果は付録 E にて詳しく述べる。

式 (3.1)-(3.3) と式 (4.1), 式 (4.2) を用いるとアドミタンスは次のように表される。

$$Y_e(s) := \frac{\tilde{i}_e(s)}{\tilde{v}_e(s)} = \left( Z_c(s) + R_0 + \frac{\bar{\phi}^2 s}{s^2 + 2\zeta_1 \omega_1 s + \omega_1^2} \right)^{-1} \quad (4.57)$$

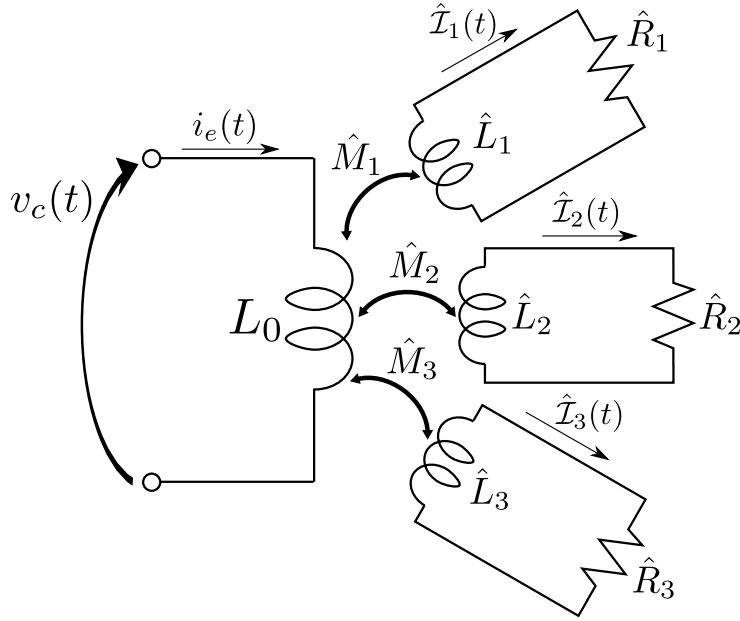


Fig.4.5: Equivalent circuit diagram obtained from the diagonalization in Eq. (4.45) when  $n = 3$

従来モデルと提案したモデルにおけるアドミタンス伝達関数  $Y_e^I(s)$ ,  $Y_e^{II}(s)$ ,  $Y_e^{III}(s)$ ,  $Y_e^{UD}(s)$ ,  $Y_e^{NL}(s)$  は式 (4.57) 中の  $Z_c(s)$  に  $Z_c^I(s)$ ,  $Z_c^{II}(s)$ ,  $Z_c^{III}(s)$ ,  $Z_c^{UD}(s)$ ,  $Z_c^{NL}(s)$  を代入することで得られる。本節では式 (4.57) で明示されている, パラメータ  $\zeta_1$ ,  $\omega_1$ ,  $\bar{\phi}$ ,  $R_0$  だけでなく, 式 (4.3)-(4.5), 式 (4.20), 式 (4.39) で与えられたインピーダンスモデルのパラメータを推定する。これらのパラメータを以下に示すように, それぞれのモデルに分けてベクトル形式で書くことができる。

$$\theta_{\text{nls}} := \begin{cases} [\zeta_1, \omega_1, \bar{\phi}, R_0, L_0]^T & \text{Eq. (4.3)} \\ [\zeta_1, \omega_1, \bar{\phi}, R_0, L_0, R_\mu]^T & \text{Eq. (4.4)} \\ [\zeta_1, \omega_1, \bar{\phi}, R_0, \alpha, \beta]^T & \text{Eq. (4.5)} \\ [\zeta_1, \omega_1, \bar{\phi}, R_0, L_g, \alpha, \beta]^T & \text{Eq. (4.20)} \\ [\zeta_1, \omega_1, \bar{\phi}, R_0, \mathcal{P}_g, \mathcal{P}_j, R_j]^T, (j = 1, \dots, n) & \text{Eq. (4.39)} \end{cases} \quad (4.58)$$

周波数領域によって感度の違うパラメータを考慮するために, 前章の式 (3.7) の推定問題を 2 ステップに分けて解く。ここで  $R_0$  は低周波帯域で,  $L_0$  は高周波帯域で支配的であることを思い出したい。最初のステップは, 重み関数  $W_{\text{nls}}(s) = 1/s$  を用いて式 (3.7) を解くことで,  $\theta_{\text{nls}}$  で表されるすべてのパラメータを計算し,  $R_0$  と  $\omega_1$  の値を決定する。そして次のステップで, 重み関数  $W_{\text{nls}}(s) = 1$  を用いて式 (3.7) を解くことで, 残りのパラメータを計算する。この二つの推定手順は式 (3.7) の非線形

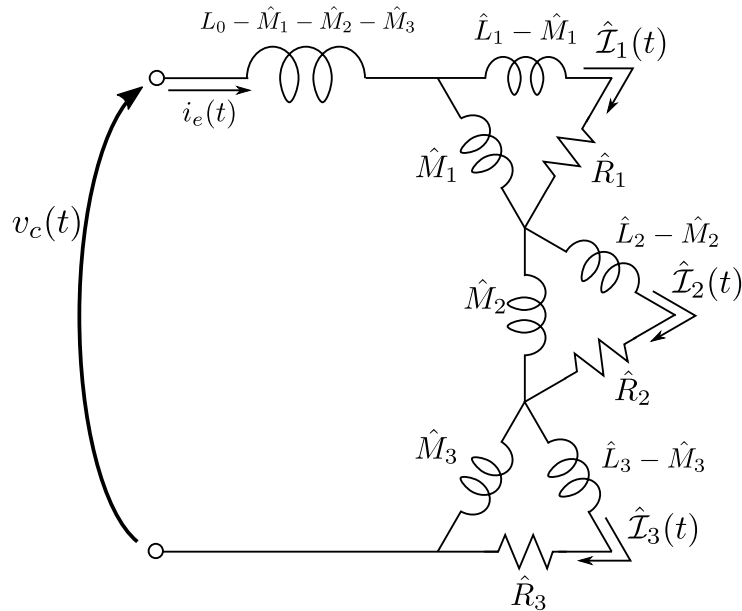


Fig.4.6: Another equivalent circuit diagram obtained from a transformation of Fig. 4.5

数値最適化の収束特性の向上に効果的である。

### 4.3.2 パラメータ推定実験結果

前章の 3.3 節と同様の実験装置を用いる。3.3 節では掃引正弦波とアナログ回路を用いて、アドミタンスの周波数特性計測したが、本節では渦電流による影響を観測するためにより広い周波数帯域でのアドミタンス計測データが必要である。そのため、LCR メータ (3522-50, HIOKI) を使用して、アドミタンス周波数特性を  $10 \sim 10^5$  rad/s の周波数帯域で対数的に 2000 点計測する。

初期値選定に用いるアドミタンス周波数特性は、固有振動数の 50 rad/s を含む、10-300 rad/s の計測データを用いる。この理由は初期値選定において広い周波数帯域の計測データを使用すると、固有角振動数などの機械系パラメータの初期値が適切に選定できないため、狭い周波数帯域を選んでいることに注意する。従来モデル I では、3.2 節で示した手法を用いて、 $\zeta_1, \omega_1, \bar{\phi}, R_0, L_0$  の初期値を推定する。従来モデル II では、式 (E.2) を用いて、 $\zeta_1, \omega_1, \bar{\phi}, R_0, L_0, R_\mu$  の初期値を推定する。従来モデル III では、式 (E.8) を用いて、 $\zeta_1, \omega_1, \bar{\phi}, R_0, L_0, \alpha, \beta$  の初期値を推定する。UD モデルでは、式 (E.13) を用いて、 $\zeta_1, \omega_1, \bar{\phi}, R_0, L_0, L_g, \alpha, \beta$  の初期値を推定する。

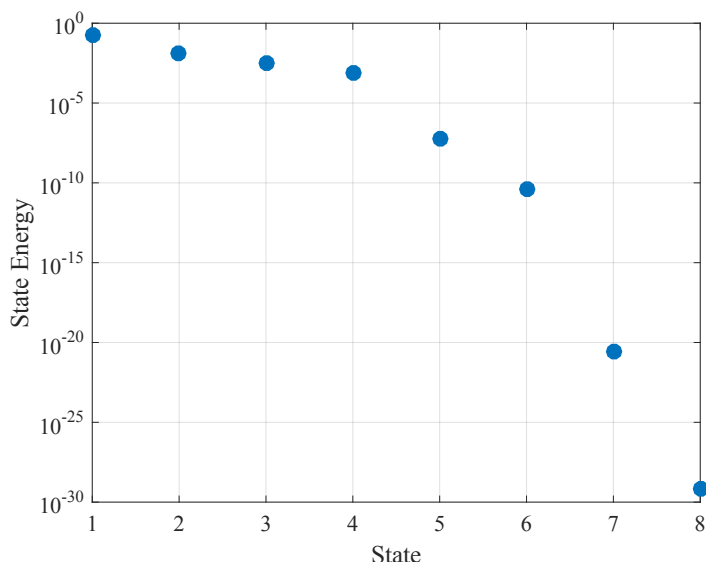


Fig.4.7: Hankel singular values of  $1/(Z_c^{NL}(s) + R_0)$  when the number of state is 8 ( $n = 7$ ). The number of state is selected as state 6 ( $n = 5$ ) because the Hankel singular values drastically drop between state 6 ( $n = 5$ ) and state 7 ( $n = 6$ ).

NL モデルでは、式 (E.13) と式 (4.33), 式 (4.43), 式 (4.44) を用いて、 $\zeta_1, \omega_1, \bar{\phi}, R_0, \mathcal{P}_g, \mathcal{P}_j, R_j$  の初期値を推定する。式 (4.39) の離散化の数  $n$  は、 $Y_e(s)$  における機械系の影響を無視することで得られる  $1/(Z_c^{NL}(s) + R_0)$  のハンケル特異値を用いて決定する。それぞれモデルの最終的な推定値は式 (3.7) の重み付き非線形最小二乗問題を解くことで決定する。それぞれのモデルに対して、4.3.1 項で示したように二段階の推定手順を、MATLAB の Optimization Toolbox [97] のコマンド `lsqnonlin` を用いて数値最適化を行う。

10~10<sup>5</sup> rad/s の周波数帯域で計測したアドミタンス  $Y_e(j\omega)$  を用いて、初めに離散化の数  $n$  を決める。ある程度大きな  $n$  を用いてパラメータを推定し、そのパラメータを用いて  $1/(Z_c^{NL}(s) + R_0)$  のハンケル特異値を計算する。本章では  $n$  を 7 としてパラメータ推定を行った。図 4.7 はハンケル特異値の計算結果を示す。横軸の状態数は  $n + 1$  に対応する。図 4.7 より、ハンケル特異値が状態 6( $n = 5$ ) と状態 7( $n = 6$ ) の間で大きく落ちているため、NL モデルで用いる離散化の数  $n$  は  $n = 5$  に決定する。

表 4.1-4.5 にそれぞれのモデルにおける推定したパラメータ値を示す。 $\zeta_1, \omega_1, \bar{\phi}, R_0$  の推定値はそれぞれのモデルでほぼ同じであることがわかる。図 4.8 に計測データと推定モデルのボード線図を示す。どのモデルにおいても、低周波帯域 ( $\omega < 10^2$ )

Table 4.1: Estimated parameter values of the conventional model I

$\zeta_1$ [-]	$\omega_1$ [rad/s]	$\bar{\phi}$ [N/A/kg $^{\frac{1}{2}}$ ]	$R_0$ [ $\Omega$ ]	$L_0$ [H]
0.00847	50.8	1.66	2.57	$1.65 \times 10^{-3}$

Table 4.2: Estimated parameter values of the conventional model II

$\zeta_1$ [-]	$\omega_1$ [rad/s]	$\bar{\phi}$ [N/A/kg $^{\frac{1}{2}}$ ]	$R_0$ [ $\Omega$ ]	$L_0$ [H]	$R_\mu$ [ $\Omega$ ]
0.00875	50.8	1.69	2.57	$1.97 \times 10^{-3}$	295

Table 4.3: Estimated parameter values of the conventional model III

$\zeta_1$ [-]	$\omega_1$ [rad/s]	$\bar{\phi}$ [N/A/kg $^{\frac{1}{2}}$ ]	$R_0$ [ $\Omega$ ]	$\alpha$ [s]	$\beta$ [H/s $^{\frac{1}{2}}$ ]
0.00896	50.8	1.71	2.57	$7.00 \times 10^{-5}$	$5.29 \times 10^{-1}$

ではよく一致しているが、従来モデル I や II, III は中高周波数帯域 ( $10^2 < \omega$ ) で計測データとずれている。このことから、従来モデルが高周波帯域における渦電流の影響を表現するのに不十分であることがわかる。UD モデルと NL モデルは高周波数帯域 ( $10^4 < \omega$ ) で、とりわけ位相差  $-70$  deg に漸近しているという点で、よく一致しているが、UD モデルは中周波数帯域 ( $10^2 < \omega < 10^4$ ) で計測データとずれている。この物理的理由としては、UD モデルが鉄心の材質が一樣、漏れ磁束がないことを考慮していることに起因する。また、数値的理由としては、UD モデルには 3 個だけの未知パラメータを含むが、NL モデルには 11 個の未知パラメータを含んでいるからである。そのため、渦電流の影響を表現するには従来モデルや UD モデルよりも NL モデルの方が適切である。また、 $\zeta_1$ ,  $\omega_1$ ,  $\bar{\phi}$  だけでなく、 $m$ ,  $c$ ,  $k$ ,  $\phi$  のパラメータを推定することが可能であるが、それについては付録 F にて議論する。

## 4.4 提案モデルの検証のための制振実験

### 4.4.1 RC シャント回路の最適設計

従来モデル I の RC シャント回路の設計は 3.4.1 項で示した手法を用いる。他のモデルにおける最適な RC シャント回路の設計値  $R_s$ ,  $C_s$  は数値最適化によって決定する。この時の初期値は従来モデル I によって得られた値を用いる。図 4.9 は、

Table 4.4: Estimated parameter values of the UD model

$\zeta_1$ [-]	$\omega_1$ [rad/s]	$\bar{\phi}$ [N/A/kg $^{\frac{1}{2}}$ ]	$R_0$ [ $\Omega$ ]
0.0100	50.8	1.83	2.57
$L_g$ [H]	$\alpha$ [s]	$\beta$ [H/s $^{\frac{1}{2}}$ ]	
$7.86 \times 10^{-4}$	$3.74 \times 10^{-4}$	$2.87 \times 10^{-1}$	

Table 4.5: Estimated parameter values of the NL model

$\zeta_1$ [-]	$\omega_1$ [rad/s]	$\bar{\phi}$ [N/A/kg $^{\frac{1}{2}}$ ]	$R_0$ [ $\Omega$ ]	$\mathcal{P}_g$ [H]
0.0109	50.8	1.91	2.56	$3.43 \times 10^{-9}$
$\mathcal{P}_1$ [H]	$\mathcal{P}_2$ [H]	$\mathcal{P}_3$ [H]	$\mathcal{P}_4$ [H]	$\mathcal{P}_5$ [H]
$4.09 \times 10^{-9}$	$3.84 \times 10^{-9}$	$3.73 \times 10^{-9}$	$4.77 \times 10^{-9}$	$4.28 \times 10^{-9}$
$R_1$ [ $\Omega$ ]	$R_2$ [ $\Omega$ ]	$R_3$ [ $\Omega$ ]	$R_4$ [ $\Omega$ ]	$R_5$ [ $\Omega$ ]
$2.91 \times 10^{-6}$	$1.43 \times 10^{-5}$	$5.37 \times 10^{-5}$	$1.90 \times 10^{-4}$	$8.33 \times 10^{-4}$

$G_{\text{open}}(s)$  から  $G_{\text{RC}}^{\text{NL}}(s)$  のゲインの落差を表す  $20 \log_{10}(\|G_{\text{RC}}^{\text{NL}}\|_{\infty}/\|G_{\text{open}}\|_{\infty})$  の等高線図を表す。赤バツ印は  $R_s$ ,  $C_s$  の最適値を示す。  $\|G_{\text{RC}}^{\text{NL}}\|_{\infty}$  は  $R_s$ ,  $C_s$  に対して感度が高いが、とりわけ  $R_s$  が最適値よりも小さくなる方向に感度が高いことがわかる。このことはどのモデルにおいても同様である。図 4.10 に  $G_{\text{RC}}^{\text{NL}}(s)$  の数値シミュレーションによって得られた周波数応答を示す。  $G_{\text{RC}}^{\text{NL}}(j\omega)$  のピークが動吸振器と同様に二つに分かれており、  $G_{\text{open}}(j\omega)$  のピークゲインと比べて  $G_{\text{RC}}^{\text{NL}}(j\omega)$  のピークゲインが  $-24.7$  dB 低下している。この結果は他のモデルにても同様であるため、本論文では省略する。

表 4.6 にそれぞれのモデルで得られた最適なシャント回路の設計値  $R_s^{\text{opt}}$ ,  $C_s^{\text{opt}}$  である。  $R_s^{\text{opt}}$  の値はほぼ同じ値だが、  $C_s^{\text{opt}}$  は大きく異なっている。4.3.1 項で議論した通り、  $\zeta_1$ ,  $\omega_1$ ,  $\bar{\phi}$ ,  $R_0$  はそれぞれのモデルでほぼ同じであり、図 4.8 で示した  $Y_e(s)$  の推定モデルごとの差異は  $Z_c(s)$  の違いによるものである。そのため、それぞれのモデルの  $C_s^{\text{opt}}$  の設計値は  $Z_c(s)$  に依存する。

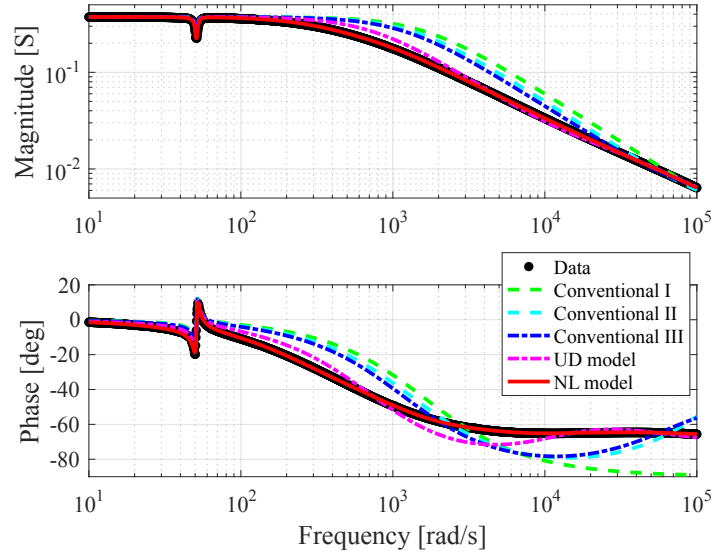


Fig.4.8: Bode admittance diagram of  $Y_e^I(j\omega)$  (green broken line),  $Y_e^{II}(j\omega)$  (cyan broken line),  $Y_e^{III}(j\omega)$  (blue dashed line),  $Y_e^{UD}(j\omega)$  (purple dashed line),  $Y_e^{NL}(j\omega)$  (red solid line), and experimental data (black dots) in the range of  $10^1$ - $10^5$  [rad/s]

Table 4.6: Optimal designed parameters of the RC-shunt circuit from estimated results.

	I	II	III	UD	NL
$R_s^{\text{opt}}$ [ $\Omega$ ]	-2.49	-2.48	-2.47	-2.43	-2.40
$C_s^{\text{opt}}$ [F]	0.345	0.281	0.240	0.135	0.0814

#### 4.4.2 制振実験結果と考察

実験装置には 3.4.2 項で使用した図 3.10 のものを使用し，3.4.3 項と同様の手順で実験を行う．図 4.11 に電磁シャント制振実験結果を示す．従来モデル I，II，III と UD モデル，NL モデルによって推定したモデルを用いて最適化した時のピークゲインはそれぞれ， $-15.5$ ， $-16.3$ ， $-16.8$ ， $-19.3$ ， $-22.0$  dB である．4.4.1 項で議論したように，制振性能は設計パラメータ  $R_s$  と  $C_s$  に敏感である．そのため，制振性能が高いほどそのモデルの精度が高いことになる．よって，NL モデルが最も精度の高いモデルであり，UD モデルも従来モデルと比べて精度の高いモデルであることがわ

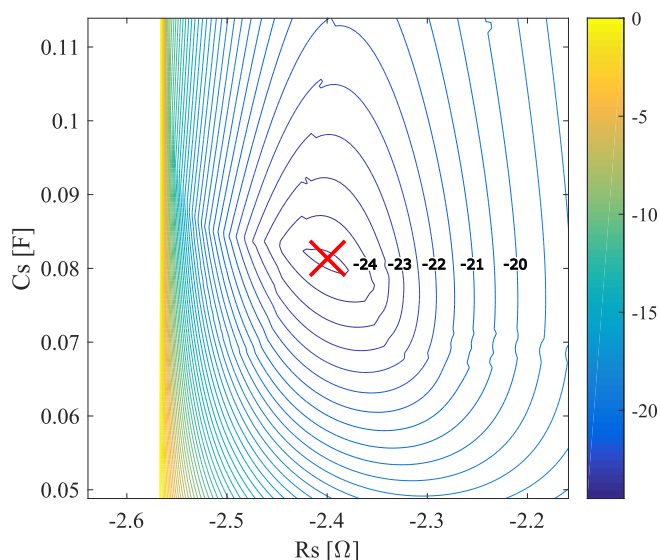


Fig.4.9: Contour map of  $20 \log_{10} (\|G_{RC}^{NL}\|_{\infty} / \|G_{open}\|_{\infty})$  and the optimal solution obtained by the numerical optimization (red cross). The contour interval is 0.5 dB.

かる。

## 4.5 まとめ

本章では電磁トランスデューサのインピーダンスモデリングにおいて、渦電流の影響の重要性について議論した。本章が提案した2つのインピーダンスモデルは、空間的に一様なパラメータと空間的に分布した渦電流を考慮したモデルであるUDモデルと、空間的に非一様なパラメータと空間的に集中した渦電流を考慮したNLモデルがある。この2つのモデルは従来モデルと比べて、中高周波数帯域におけるモデル化精度が向上している。また、UDモデルとNLモデルには、前者はパラメータの数が少ない、後者はより推定精度が高いといったトレードオフが存在する。自己誘導の影響に敏感な電磁シャント制振実験を行うことで、提案モデルによって得られた推定モデルは制振性能を向上させることを示した。アクチュエータのモデリングは制御には非常に重要であり、高周波帯域でも精度の高い電磁トランスデューサのモデリングは、制御帯域の向上や振動やノイズ制御、モーションコントロール、ロボティクス等のアプリケーションの制御系の応答の向上に大きく貢献することが期待される。



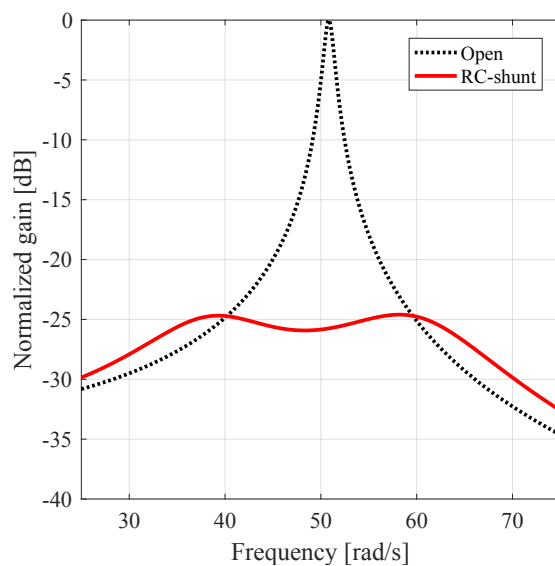


Fig.4.10: Simulated frequency response of the normalized gain from the disturbance force to the displacement, in which the black dotted line represents  $G_{\text{open}}(j\omega)$ , whereas the red solid line represents  $G_{\text{RC}}^{\text{NL}}(j\omega)$

今後の課題として、本章では鉄心内部に渦電流のみが発生すると仮定したが、他にも鉄心には磁気ヒステリシスが発生する。磁気ヒステリシスは変圧器などでは大きな問題となっている。さらなる制振性能向上のためにも、鉄心の磁気ヒステリシスを考慮したモデル化の提案が期待される。

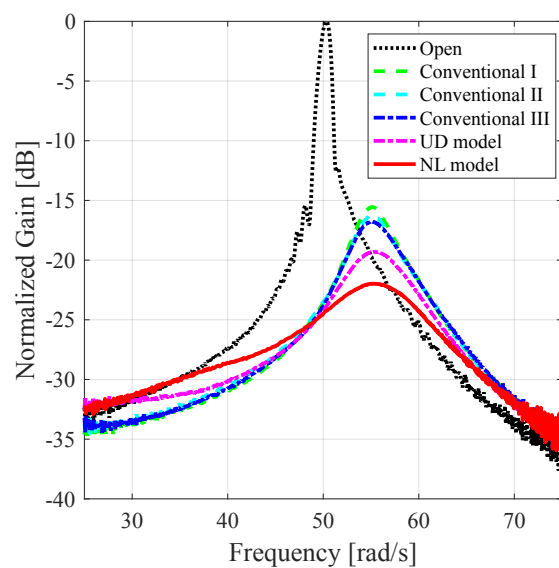


Fig.4.11: Frequency response of the normalized gain from the disturbance force to the displacement in the experiments (open terminals: black dotted line; conventional model I: green broken line; conventional model II: cyan broken line; conventional model III: blue dashed line; UD model: purple dashed line; NL model: red solid line)



## 第 5 章

# 結論

本論文では、電磁トランスデューサを用いたセンサレス振動制御手法である、電磁シャント制振の最適設計方法とその設計に必要なパラメータ値のセンサレス推定手法、ならびに制振性能向上のためのモデリングの提案を目的とした。以下に各章の内容についてまとめる。

第 2 章では、共振型シャント回路を用いた電磁シャント制振の最適なシャント回路の設計パラメータについて議論した。また、電磁トランスデューサに似たような特性を持つ、圧電素子を用いたセンサレス振動制御手法である圧電シャント制振についても、同様の枠組みで議論できることを示した。共振型シャント回路を用いた電磁シャント制振と圧電シャント制振には双対の関係があることを述べ、両シャント制振の最適設計は統一的に考えることができることを明らかにした。また機械アナロジーを行うことで両シャント制振と、これまで振動制御に広く用いられてきた動吸振器との違いを明らかにした。これまで、共振型シャント回路の設計方法には  $H_\infty$  ノルムを小さくするという目的で、定点理論が広く用いられてきた。しかし、定点理論は厳密に  $H_\infty$  ノルムを最小化していないことについて述べ、本論文で扱う共振型シャント回路の最適設計の設計規範には、厳密な  $H_\infty$  ノルムの最小化、 $H_2$  ノルムの最小化、安定度の最大化の 3 つを使用した。それぞれの規範に基づく、共振型シャント回路の厳密な最適パラメータの導出方法とその結果を示し、定点理論による設計結果との違い、それぞれの規範ごとによる違いなどについて議論した。数値事例によって、それぞれの設計規範による制振性能の特徴を議論することで、今後の電磁シャント制振や圧電シャント制振の共振型シャント回路の設計に関する指針を示した。

第 3 章では、振動系と電磁トランスデューサの位置や速度センサを必要としないパラメータ推定手法を提案した。機械系と電気系、電気機械結合系の支配方程式より、

---

電気アドミタンス伝達関数を導出し、振動系の固有振動数付近では電気アドミタンス周波数特性に大きな変化が現れることを示した。そのため、固有振動数付近の電気アドミタンスの周波数特性を計測することで、電磁トランスデューサの電気系のパラメータのみならず、機械系や電気機械結合系のパラメータも推定が可能であることを示した。パラメータを推定する手法として、重み付き非線形最小二乗問題を用いて数値最適化によってパラメータ推定を行う方法を用いるが、数値最適化でパラメータを推定するためには初期値の選定が必要である。その初期値選定として、重み付き非線形最小二乗問題の評価関数と推定するパラメータを変形することで、重み付き線形最小二乗問題の形式に変換することで、初期値を選定する方法を提案した。パラメータの推定実験と、推定したパラメータを用いてシャント回路を設計し、電磁シャント制振実験を行うことで提案したパラメータ推定手法の有効性を確認した。第3章で提案した手法は、振動系に取り付けた電磁トランスデューサの端子間電気アドミタンス周波数特性の計測データのみを用いるため、位置や速度センサを必要としないパラメータ推定手法である。そのため、位置や速度センサを必要としない電磁シャント制振と相性が良く、外部センサや加振用アクチュエータを用いずにパラメータ推定から電磁シャント制振を行うことができる。

第4章では、高周波帯域におけるモデル化精度改善を目的とし、電磁トランスデューサの渦電流を考慮したモデリングを提案した。第2,3章では、自己誘導が電流の微分に理想的に比例すると仮定し、自己インダクタンスと内部抵抗のみで、電磁トランスデューサの電気系のモデリングを行っていた。しかし、電磁トランスデューサの電気アドミタンス周波数特性を観測すると、中高周波数帯域では自己インダクタンスのみでモデリングするのが不適當であることを示した。そこで、電磁トランスデューサを構成する部分である鉄心の内部に渦電流が発生するため、その渦電流の影響の重要性について議論した。そして、渦電流を考慮した2つの新しいインピーダンスモデルを提案した。一つが、空間的に一様なパラメータと空間的に渦電流が分布していることを考慮したUDモデル、もう一つが空間的に非一様なパラメータと空間的に渦電流が集中していることを考慮したNLモデルである。この2つのモデルは従来のモデルと比べて、中高周波数帯域におけるモデル化精度が向上していることを、第3章で提案したパラメータ推定手法を拡張したものを用いて実験を行い検証した。また、UDモデルとNLモデルの違いとして、前者は未知パラメータの数が少ない(後者は離散化の数に依存する)、後者は推定精度が高いといったトレードオフが存在する。

以上より、本論文は電磁トランスデューサの高精度なモデル化から、センサレスな

パラメータ推定手法，電磁シャント制振の最適設計までの，設計から応用まで一連の流れに関する新しい方法を提案した．そして，実験もしくは数値事例によって定量的な比較を行うことで，提案したモデル化，推定手法，最適設計それぞれの有効性を確認した．

最後に，本論文の今後の展望を述べる．本論文で導出した電磁シャント制振や圧電シャント制振の最適設計結果は，様々な応用先におけるシャント回路の設計指針となりうる．また，本論文で提案した電磁トランスデューサのパラメータ推定手法やモデル化は，アクチュエーションやセンシングだけでなくエネルギー回生といった様々な応用先のコスト低減・性能向上が期待される．回転型モータである DC モータもボイスコイルモータと同様の支配方程式で表すことができるため，DC モータにおいても本論文の設計方法や推定手法が適用できるといえる．最後に，本論文で示した結果は DC モータとは異なる回転型の電磁トランスデューサ，具体的にはブラシレス DC モータなどへの拡張が期待される．



# 謝辞

本論文は、筆者の名古屋大学大学院工学研究科機械理工学専攻の博士課程による研究成果をまとめたものである。本研究を進めるにあたり、終始にわたって懇切なるご指導を賜りました、指導教員の名古屋大学大学院 工学研究科 機械システム工学専攻 准教授 高木賢太郎先生に深く感謝の意を表します。また、本研究に関する有益なご指摘およびご教授を賜りました、金沢大学大学院 理工研究域 電子情報学系 准教授 軸屋一郎先生、名古屋大学大学院 工学研究科 機械システム工学専攻 教授 井上剛志先生に深く感謝の意を表します。

2019年2月

池亀 透





## 参考文献

- [1] Den Hartog, J. P., *Mechanical vibrations*, Dover Publications (1985), ISBN: 9780486647852.
- [2] 長松昭男 (編), *ダイナミクスハンドブック-運動・振動・制御*, 朝倉書店 (2006), ISBN: 425423113X.
- [3] “Tuned Mass Damper of Taipei 101”, <https://www.atlasobscura.com/places/tuned-mass-damper-of-taipei-101>, Accessed 15-Jan-2019.
- [4] Sodano, H. A., Bae, J.-S., Inman, D. J. and Belvin, W. K., “Concept and model of eddy current damper for vibration suppression of a beam”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 288, No. 4-5, pp. 1177–1196 (2005), doi:10.1016/j.jsv.2005.01.016.
- [5] Dyke, S. J., Spencer Jr, B. F., Sain, M. K. and Carlson, J. D., “An experimental study of MR dampers for seismic protection”, *Smart Materials and Structures*, Vol. 7, No. 5, p. 693 (1998), doi:10.1088/0964-1726/7/5/012.
- [6] Makris, N., Burton, S. A., Hill, D. and Jordan, M., “Analysis and design of ER damper for seismic protection of structures”, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 122, No. 10, pp. 1003–1011 (1996), doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(1996)122:10(1003).
- [7] Hagood, N. W. and Flotow, von A., “Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 146, No. 2, pp. 243–268 (1991), doi:10.1016/0022-460X(91)90762-9.
- [8] Behrens, S., Fleming, A. J. and Moheimani, S. O. R., “Passive vibration control via electromagnetic shunt damping”, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 10, No. 1, pp. 118–122 (2005),

---

doi:10.1109/TMECH.2004.835341.

- [9] Boldea, I. and Nasar, S. A., “Linear electric actuators and generators”, *IEEE Transactions on Energy Conversion*, Vol. 14, No. 3, pp. 712–717 (1999), doi:10.1109/60.790940.
- [10] Howe, D., “Magnetic actuators”, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 81, No. 1-3, pp. 268–274 (2000), doi:10.1016/S0924-4247(99)00174-0.
- [11] Hanson, B. and Levesley, M., “Self-sensing applications for electromagnetic actuators”, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 116, No. 2, pp. 345–351 (2004), doi:10.1016/j.sna.2004.05.003.
- [12] Yin, W., Peyton, A. J. and Dickinson, S. J., “Simultaneous measurement of distance and thickness of a thin metal plate with an electromagnetic sensor using a simplified model”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement Instrum Meas*, Vol. 53, No. 4, pp. 1335–1338 (2004), doi:10.1109/TIM.2004.830585.
- [13] Chen, M.-Y., Tzeng, H.-W. and Hung, S.-K., “A new mechanism design of electro-magnetic actuator for a micro-positioner”, *ISA Transactions*, Vol. 46, No. 1, pp. 41–48 (2007), doi:10.1016/j.isatra.2006.06.003.
- [14] Song, S., Li, Z., Yu, H. and Ren, H., “Shape reconstruction for wire-driven flexible robots based on bézier curve and electromagnetic positioning”, *Mechatronics*, Vol. 29, pp. 28–35 (2015), doi:10.1016/j.mechatronics.2015.05.003.
- [15] Rashedin, R., Meydan, T. and Borza, F., “Electromagnetic micro-actuator array for loudspeaker application”, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 129, No. 1-2, pp. 118–120 (2006), doi:10.1016/j.sna.2005.11.050.
- [16] Thiele, N., “Loudspeakers in vented boxes: Part 1”, *Journal of the Audio Engineering Society*, Vol. 19, No. 5, pp. 382–392 (1971).
- [17] Sturtzer, E., Pillonnet, G., Lemarquand, G. and Abouchi, N., “Comparison between voltage and current driving methods of a micro-speaker”, *Applied Acoustics*, Vol. 73, No. 11, pp. 1087–1098 (2012), doi:10.1016/j.apacoust.2012.05.008.
- [18] Lammeraner, J. and Štafl, M., *Eddy currents*, Iliffe, London (1966), ISBN: 0592050165.
- [19] Vanderkooy, J., “A model of loudspeaker driver impedance incorporating

- eddy currents in the pole structure”, *AES: Journal of the Audio Engineering Society*, Vol. 37, No. 3, pp. 119–128 (1989).
- [20] Shaw, J., “Active vibration isolation by adaptive control”, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 7, No. 1, pp. 19–31 (2001), doi:10.1177/107754630100700102.
- [21] Eyabi, P. and Washington, G., “Design and control of an electromagnetic valve actuator”, *Mechatronics*, Vol. 16, No. 3-4, pp. 159–175 (2006), doi:10.1016/j.mechatronics.2005.11.008.
- [22] Rossini, L., Onillon, E., Chételat, O. and Perriard, Y., “Closed-loop magnetic bearing and angular velocity control of a reaction sphere actuator”, *Mechatronics*, Vol. 30, pp. 214–224 (2015), doi:10.1016/j.mechatronics.2015.07.003.
- [23] Choi, C. and Park, K., “Self-sensing magnetic levitation using a lc resonant circuit”, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 72, No. 2, pp. 169–177 (1999), doi:10.1016/S0924-4247(98)00230-1.
- [24] Kawamoto, Y., Suda, Y., Inoue, H. and Kondo, T., “Modeling of electromagnetic damper for automobile suspension”, *Journal of System Design and Dynamics*, Vol. 1, No. 3, pp. 524–535 (2007), doi:10.1299/jsdd.1.524.
- [25] Sande, van der T. P., Gysen, B. L., Besselink, I. J., Paulides, J. J. H., Lomonova, E. A. and Nijmeijer, H., “Robust control of an electromagnetic active suspension system: Simulations and measurements”, *Mechatronics*, Vol. 23, No. 2, pp. 204–212 (2013), doi:10.1016/j.mechatronics.2012.07.002.
- [26] Su, X., Yang, X., Shi, P. and Wu, L., “Fuzzy control of nonlinear electromagnetic suspension systems”, *Mechatronics*, Vol. 24, No. 4, pp. 328–335 (2014), doi:10.1016/j.mechatronics.2013.08.002.
- [27] Wang, D. A., Chiu, C. Y. and Pham, H. T., “Electromagnetic energy harvesting from vibrations induced by kármán vortex street”, *Mechatronics*, Vol. 22, No. 6, pp. 746–756 (2012), doi:10.1016/j.mechatronics.2012.03.005.
- [28] Zuo, L., Scully, B., Shestani, J. and Zhou, Y., “Design and characterization of an electromagnetic energy harvester for vehicle suspensions”, *Smart Materials and Structures*, Vol. 19, No. 4, p. 045003 (2010), doi:10.1088/0964-1726/19/4/045003.
- [29] Dayal, R., Dwari, S. and Parsa, L., “Design and implementation of a di-

- 
- rect acdc boost converter for low-voltage energy harvesting”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 58, No. 6, pp. 2387–2396 (2011), doi:10.1109/TIE.2010.2069074.
- [30] Preumont, A., *Vibration control of active structures, an introduction*, Springer, 3rd edition (2011), ISBN: 9789400720329.
- [31] Inoue, T., Ishida, Y. and Sumi, M., “Vibration suppression using electromagnetic resonant shunt damper”, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 130, No. 4, p. 041003 (2008), doi:10.1115/1.2889916.
- [32] Zhu, S., Shen, W.-A. and Qian, X., “Dynamic analogy between an electromagnetic shunt damper and a tuned mass damper”, *Smart Materials and Structures*, Vol. 22, No. 11, p. 115018 (2013), doi:10.1088/0964-1726/22/11/115018.
- [33] McDaid, A. J. and Mace, B. R., “A self-tuning electromagnetic vibration absorber with adaptive shunt electronics”, *Smart Materials and Structures*, Vol. 22, No. 10, p. 105013 (2013), doi:10.1088/0964-1726/22/10/105013.
- [34] Paulitsch, C., Gardonio, P. and Elliott, S. J., “Active vibration damping using a reactive, self-sensing, electrodynamic actuator”, *Smart Materials and Structures*, Vol. 15, No. 2, pp. 499–508 (2006), doi:10.1088/0964-1726/15/2/033.
- [35] Niu, H., Zhang, X., Xie, S. and Wang, P., “A new electromagnetic shunt damping treatment and vibration control of beam structures”, *Smart Materials and Structures*, Vol. 18, No. 4, p. 045009 (2009), doi:10.1088/0964-1726/18/4/045009.
- [36] Wang, P. and Zhang, X., “Damper based on electromagnetic shunt damping method”, *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, Vol. 33, No. 3/4, pp. 1425–1430 (2010), doi:10.3233/JAE-2010-1270.
- [37] Zhang, X., Niu, H. and Yan, B., “A novel multimode negative inductance negative resistance shunted electromagnetic damping and its application on a cantilever plate”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, No. 10, pp. 2257–2271 (2012), doi:10.1016/j.jsv.2011.12.028.
- [38] Yan, B., Zhang, X. and Niu, H., “Vibration isolation of a beam via negative resistance electromagnetic shunt dampers”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 23, No. 6, pp. 665–673 (2012),

- doi:10.1177/1045389X12437889.
- [39] Yan, B., Zhang, X. and Niu, H., “Design and test of a novel isolator with negative resistance electromagnetic shunt damping”, *Smart Materials and Structures*, Vol. 21, No. 3, p. 035003 (2012), doi:10.1088/0964-1726/21/3/035003.
- [40] Fleming, A. J., Moheimani, S. O. R. and Behrens, S., “Synthesis and implementation of sensor-less active shunt controllers for electromagnetically actuated systems”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 13, No. 2, pp. 246–261 (2005), doi:10.1109/TCST.2004.839565.
- [41] Fleming, A. J. and Moheimani, S. O. R., “Inertial vibration control using a shunted electromagnetic transducer”, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 11, No. 1, pp. 84–92 (2006), doi:10.1109/TMECH.2005.863364.
- [42] Niederberger, D., Behrens, S., Fleming, A. J., Moheimani, S. O. R. and Morari, M., “Adaptive electromagnetic shunt damping”, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 11, No. 1, pp. 103–108 (2006), doi:10.1109/TMECH.2005.859844.
- [43] Cheng, T.-H. and Oh, I.-K., “Vibration suppression of flexible beam using electromagnetic shunt damper”, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 45, No. 6, pp. 2758–2761 (2009), doi:10.1109/TMAG.2009.2020549.
- [44] Cheng, T.-H. and Oh, I.-K., “A current-flowing electromagnetic shunt damper for multi-mode vibration control of cantilever beams”, *Smart Materials and Structures*, Vol. 18, No. 9, p. 95036 (2009), doi:10.1088/0964-1726/18/9/095036.
- [45] Jung, J.-H., Cheng, T.-H. and Oh, I.-K., “Electromagnetic synchronized switch damping for vibration control of flexible beams”, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 17, No. 6, pp. 1031–1038 (2012), doi:10.1109/TMECH.2011.2157934.
- [46] Zuo, L. and Cui, W., “Dual-functional energy-harvesting and vibration control: electromagnetic resonant shunt series tuned mass dampers”, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 135, No. 5, p. 51018 (2013), doi:10.1115/1.4024095.
- [47] Liu, Y., Lin, C.-C., Parker, J. and Zuo, L., “Exact  $H_2$  optimal tuning

- 
- and experimental verification of energy-harvesting series electromagnetic tuned-mass dampers”, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 138, No. 6, p. 061003 (2016), doi:10.1115/1.4034081.
- [48] Tang, X., Liu, Y., Cui, W. and Zuo, L., “Analytical solutions to  $H_2$  and  $H_\infty$  optimizations of resonant shunted electromagnetic tuned mass damper and vibration energy harvester”, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 138, No. 1, p. 11018 (2016), doi:10.1115/1.4031823.
- [49] 西原修, 松久寛, “動吸振器の最大振幅倍率最小化設計 : 代数的な厳密解の導出”, 日本機械学会論文集C編, Vol. 63, No. 614, pp. 3438–3445 (1997), doi:10.1299/kikaic.63.3438.
- [50] Nishihara, O. and Asami, T., “Closed-form solutions to the exact optimizations of dynamic vibration absorbers (minimizations of the maximum amplitude magnification factors)”, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 124, No. 4, pp. 576–582 (2002), doi:10.1115/1.1500335.
- [51] Asami, T. and Nishihara, O., “Closed-form exact solution to  $H_\infty$  optimization of dynamic vibration absorbers (application to different transfer functions and damping systems)”, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 125, No. 3, pp. 398–405 (2003), doi:10.1115/1.1569514.
- [52] Cheung, Y.-L. and Wong, W.-O., “H-infinity optimization of a variant design of the dynamic vibration absorber—revisited and new results”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 330, No. 16, pp. 3901–3912 (2011), doi:10.1016/j.jsv.2011.03.027.
- [53] Ren, M. Z., “A variant design of the dynamic vibration absorber”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 245, No. 4, pp. 762–770 (2001), doi:10.1006/jsvi.2001.3564.
- [54] Chun, S., Lee, Y. and Kim, T.-H., “ $H_\infty$  optimization of dynamic vibration absorber variant for vibration control of damped linear systems”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 335, pp. 55–65 (2015), doi:10.1016/j.jsv.2014.09.020.
- [55] Anh, N. D., Nguyen, N. X. and Quan, N. H., “Global-local approach to the design of dynamic vibration absorber for damped structures”, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 22, No. 14, pp. 3182–3201 (2016), doi:10.1177/1077546314561282.

- [56] Argentini, T., Belloli, M. and Borghesani, P., “A closed-form optimal tuning of mass dampers for one degree-of-freedom systems under rotating unbalance forcing”, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 137, No. 3, p. 34501 (2015), doi:10.1115/1.4029576.
- [57] Barredo, E., Blanco, A., Colín, J., Penagos, V. M., Abúndez, A., Vela, L. G., Meza, V., Cruz, R. H. and Mayén, J., “Closed-form solutions for the optimal design of inerter-based dynamic vibration absorbers”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 144, pp. 41–53 (2018), doi:10.1016/j.ijmecsci.2018.05.025.
- [58] Sinha, A. and Trikutam, K. T., “Optimal vibration absorber with a friction damper”, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 140, No. 2, p. 21015 (2018), doi:10.1115/1.4038272.
- [59] Hu, Y. and Chen, M. Z. Q., “Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 99, pp. 297–307 (2015), doi:10.1016/j.ijmecsci.2015.06.003.
- [60] Cheung, Y.-L. and Wong, W.-O., “ $H_2$  optimization of a non-traditional dynamic vibration absorber for vibration control of structures under random force excitation”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 330, No. 6, pp. 1039–1044 (2011), doi:10.1016/j.jsv.2010.10.031.
- [61] Asami, T., Wakasono, T., Kameoka, K., Hasegawa, M. and Sekiguchi, H., “Optimum design of dynamic absorbers for a system subjected to random excitation”, *JSME international journal. Ser. 3, Vibration, control engineering, engineering for industry*, Vol. 34, No. 2, pp. 218–226 (1991), doi:10.1299/jsmec1988.34.218.
- [62] Asami, T., Nishihara, O. and Baz, A. M., “Analytical solutions to  $H_\infty$  and  $H_2$  optimization of dynamic vibration absorbers attached to damped linear systems”, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 124, No. 2, pp. 284–295 (2002), doi:10.1115/1.1456458.
- [63] 西原修, 松久寛, “安定度規範による制振装置の設計と調整”, in *Dynamics and Design Conference*, pp. 165–168 (1997), Paper no. 97-10-1.
- [64] Bisegna, P. and Caruso, G., “Closed-form formulas for the optimal pole-based design of tuned mass dampers”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, No. 10, pp. 2291–2314 (2012), doi:10.1016/j.jsv.2012.01.005.



- 
- [65] Xiang, P. and Nishitani, A., “Optimum design and application of non-traditional tuned mass damper toward seismic response control with experimental test verification”, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Vol. 44, No. 13, pp. 2199–2220 (2015), doi:10.1002/eqe.2579.
- [66] Zhou, K. and Doyle, J. C., *Essentials of robust control*, Prentice hall Upper Saddle River, NJ (1997), ISBN: 9780135258330.
- [67] Asami, T. and Nishihara, O., “Analytical and experimental evaluation of an air damped dynamic vibration absorber: design optimizations of the three-element type model”, *Journal of vibration and acoustics*, Vol. 121, No. 3, pp. 334–342 (1999), doi:10.1115/1.2893985.
- [68] 浅見敏彦, 西原修, “三要素型動吸振器の  $H_2$  最適化設計”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 68, No. 665, pp. 76–83 (2002), doi:10.1299/kikaic.68.76.
- [69] Asami, T. and Nishihara, O., “ $H_2$  optimization of the three-element type dynamic vibration absorbers”, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 124, No. 4, pp. 583–592 (2002), doi:10.1115/1.1501286.
- [70] Nishihara, O., “Exact optimization of a three-element dynamic vibration absorber: Minimization of the maximum amplitude magnification factor”, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 141, No. 1, p. 011001 (2018), doi:10.1115/1.4040575.
- [71] 西原修, “二重動吸振器の最大振幅倍率最小化設計 (並列型および直列型における最適性規準法の適用)”, 日本機械学会論文集, Vol. 83, No. 849, pp. 16–00549 (2017), doi:10.1299/transjsme.16-00549.
- [72] Asami, T., “Optimal design of double-mass dynamic vibration absorbers arranged in series or in parallel”, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 139, No. 1, p. 011015 (2017), doi:10.1115/1.4034776.
- [73] Asami, T., Mizukawa, Y. and Ise, T., “Optimal design of double-mass dynamic vibration absorbers minimizing the mobility transfer function”, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 140, No. 6, p. 61012 (2018), doi:10.1115/1.4040229.
- [74] Kim, J., Ryu, Y.-H. and Choi, S.-B., “New shunting parameter tuning method for piezoelectric damping based on measured electrical impedance”, *Smart Materials and Structures*, Vol. 9, No. 6, p. 868 (2000), doi:10.1088/0964-1726/9/6/318.

- [75] Park, C.-H., “Dynamics modelling of beams with shunted piezoelectric elements”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 268, No. 1, pp. 115–129 (2003), doi:10.1016/S0022-460X(02)01491-8.
- [76] Moheimani, S. O. R., “A survey of recent innovations in vibration damping and control using shunted piezoelectric transducers”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 11, No. 4, pp. 482–494 (2003), doi:10.1109/TCST.2003.813371.
- [77] Yan, B., Wang, K., Hu, Z., Wu, C. and Zhang, X., “Shunt damping vibration control technology: A review”, *Applied Sciences*, Vol. 7, No. 5, p. 494 (2017), doi:10.3390/app7050494.
- [78] Yamada, K., Matsuhisa, H., Utsuno, H. and Sawada, K., “Optimum tuning of series and parallel LR circuits for passive vibration suppression using piezoelectric elements”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, No. 24, pp. 5036–5057 (2010), doi:10.1016/j.jsv.2010.06.021.
- [79] Yamada, K., Matsuhisa, H. and Utsuno, H., “Enhancement of efficiency of vibration suppression using piezoelectric elements and LR circuit by amplification of electrical resonance”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 333, No. 5, pp. 1281–1301 (2014), doi:10.1016/j.jsv.2013.10.001.
- [80] Soltani, P., Kerschen, G., Tondreau, G. and Deraemaeker, A., “Piezoelectric vibration damping using resonant shunt circuits: an exact solution”, *Smart Materials and Structures*, Vol. 23, No. 12, p. 125014 (2014), doi:10.1088/0964-1726/23/12/125014.
- [81] Caruso, G., “A critical analysis of electric shunt circuits employed in piezoelectric passive vibration damping”, *Smart Materials and Structures*, Vol. 10, No. 5, pp. 1059–1068 (2001), doi:10.1088/0964-1726/10/5/322.
- [82] Ikegame, T., Takagi, K. and Inoue, T., “Exact solutions to  $H_\infty$  and  $H_2$  optimizations of passive resonant shunt circuit for electromagnetic or piezoelectric shunt damper” (2018), Accepted.
- [83] 高木賢太郎, 大嶋和彦, 稲垣大雄, “インピーダンス計測のみに基づく圧電素子のパラメータ推定と受動制振への応用 (機械力学, 計測, 自動制御)”, 日本機械学会論文集C編, Vol. 76, No. 772, pp. 3495–3503 (2010), doi:10.1299/kikaic.76.3495.
- [84] 高木賢太郎, 山田靖高, 井上剛志, “内部抵抗を考慮した圧電素子のインピーダ

- 
- ンス計測のみに基づくセンサレスパラメータ推定”, 日本機械学会論文集C編, Vol. 78, No. 792, pp. 2808–2823 (2012), doi:10.1299/kikaic.78.2808.
- [85] 池亀透, 高木賢太郎, 井上剛志, 軸屋一郎, “電磁アクチュエータのセンサレスパラメータ推定”, in *Dynamics and Design Conference*, p. 511, 東京 (2014).
- [86] Ikegame, T., Takagi, K., Inoue, T. and Jikuya, I., “Sensor-less parameter estimation of electromagnetic transducer and experimental verification”, in *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, Vol. 9431 (2015), doi:10.1117/12.2085115.
- [87] 池亀透, 高木賢太郎, 井上剛志, 軸屋一郎, “シャント制振のための電磁アクチュエータのセンサレスパラメータ推定”, 日本機械学会論文集, Vol. 81, No. 825, pp. 15–00006 (2015), doi:10.1299/transjsme.15-00006.
- [88] Ishizaki, T., Kashima, K., Imura, J.-i., Katoh, A., Morita, H. and Aihara, K., “Distributed parameter modeling and finite-frequency loop-shaping of electromagnetic molding machine”, *Control Engineering Practice*, Vol. 21, No. 12, pp. 1735–1743 (2013), doi:10.1016/j.conengprac.2013.08.003.
- [89] 池亀透, 高木賢太郎, 井上剛志, 軸屋一郎, “電磁トランスデューサのインピーダンスのモデル化に関する一考察: 渦電流の考慮による非有理伝達関数の導出”, in *Dynamics and Design Conference*, p. 542, 山口 (2016), doi:10.1299/jsmedmc.2016.542.
- [90] 池亀透, 高木賢太郎, 井上剛志, 軸屋一郎, “電磁トランスデューサのインピーダンスのモデル化に関する一考察: 離散化された渦電流を考慮した集中定数モデルの導出”, 日本機械学会 2016 年度年次大会, p. J0440201, 福岡 (2016), doi:10.1299/jsmemecj.2016.J0440201.
- [91] Ikegame, T., Takagi, K., Inoue, T. and Jikuya, I., “Sensor-less parameter estimation of electromagnetic transducer considering eddy currents”, *Mechatronics*, Vol. 45, pp. 130–142 (2017), doi:10.1016/j.mechatronics.2017.06.001.
- [92] Ikegame, T. and Takagi, K., “Equivalent circuit and frequency response of the distributed eddy current in an electromagnetic transducer”, in *2018 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, pp. 114–119, Auckland, New Zealand (2018), doi:10.1109/AIM.2018.8452289.

- 
- [93] Hagood, N. W., Chung, W. H. and Von Flotow, A., “Modelling of piezoelectric actuator dynamics for active structural control”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 1, No. 3, pp. 327–354 (1990), doi:10.1177/1045389X9000100305.
- [94] Kozlowski, M. V., Cole, D. G. and Clark, R. L., “A comprehensive study of the RL series resonant shunted piezoelectric: a feedback controls perspective”, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 133, No. 1, p. 11012 (2011), doi:10.1115/1.4000966.
- [95] 山田啓介, 松久寛, 宇津野秀夫, “圧電素子を用いた制振システムの等価機械モデルと等価電気モデル”, 日本機械学会論文集C編, Vol. 73, No. 730, pp. 1625–1632 (2007), doi:10.1299/kikaic.73.1625.
- [96] 高木賢太郎, 井上剛志, 宮地智也, “デジタル仮想インピーダンス回路を用いた電磁シャント制振”, 日本機械学会論文集C編, Vol. 78, No. 789, pp. 474–488 (2012), doi:10.1299/kikaic.78.474.
- [97] The MathWorks Inc., , *Matlab Optimization Toolbox User’s Guide, Version 7.4*, Natick, MA (2016).
- [98] Smythe, W. R., *Static and Dynamic Electricity*, McGraw-Hill, New York, third edition (1968), ISBN: 9780070594203.
- [99] Hayt, W. H. and Buck, J. A., *Engineering Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, eighth edition (2011), ISBN: 0073380660.
- [100] Cheng, D. K., *Field and Wave electromagnetics*, Wesley, London (1983), ISBN: 9780201012392.
- [101] Rohrer, R. A., *Circuit Theory: An Introduction to the State Variable Approach*, McGraw-Hill, New York (1970), ISBN: 9780070535572.
- [102] Horn, R. A. and Johnson, C. R., *Matrix analysis*, Cambridge university press, New York, second edition (2012), ISBN: 9780521839402.
- [103] Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M., *Table of integrals, series, and products*, Academic press (2007), ISBN: 9780123849335.
- [104] Abramowitz, M. and Stegun, I. A., *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover Publications, New York (1965), ISBN: 0486612724.



## 付録 A

# $H_\infty$ ノルム最小化規範に使用する $F_1$ と $F_2$

本付録では、2.2.2 項で議論した、 $H_\infty$  ノルム最小化規範による最適解の導出に必要な条件式  $F_1$ ,  $F_2$  を示す。それぞれの  $F_1$ ,  $F_2$  が共に零となるような解が  $H_\infty$  ノルム最小化規範に基づく厳密な最適解である。

### ■ $G_a$ のコンプライアンス

$$\begin{cases} F_1 = (\nu^2 - r)(1 - r + 2r\zeta^2) + \psi(1 - r) \\ F_2 = (1 - r + 2\zeta^2\nu^2)(1 + r - 2\nu^2(1 - \zeta^2)) - 4\zeta^2\nu^2\psi \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

### ■ $G_b$ のコンプライアンス

$$\begin{cases} F_1 = (\nu^2 - r)(1 - r + 2r\zeta^2) + \psi(1 - r - 2\zeta^2(2 + \psi)) \\ F_2 = (1 - r + 2\zeta^2\nu^2)(1 + r - 2\nu^2(1 - \zeta^2)) + 4\zeta^2\nu^2\psi \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

### ■ $G_a$ のモビリティ ( $\hat{s}G_a$ )

$$\begin{cases} F_1 = (\nu^2 - 1)(1 - r^2 + 4\zeta^2) \\ F_2 = (1 - r^2 + 4\zeta^2\nu^2)(5 - r^2 - 4\nu^2(1 - \zeta^2)) + 4\psi(1 - r^2 - 4\zeta^2\nu^2) \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

### ■ $G_b$ のモビリティ ( $\hat{s}G_b$ )

$$\begin{cases} F_1 = (\nu^2 - 1)(1 - r^2 + 4\zeta^2) - 4\zeta^2\psi(2 + \psi) \\ F_2 = (1 - r^2 + 4\zeta^2\nu^2)(5 - r^2 - 4\nu^2(1 - \zeta^2)) + 4\psi(1 - r^2 + 4\zeta^2\nu^2) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

---

■  $G_a$  のアクセラランス ( $\hat{s}^2 G_a$ )

$$\begin{cases} F_1 = (r\nu^2 - 1)(1 - r + 2r\zeta^2) - \psi(1 - r) \\ F_2 = (1 + r - 2r^2\nu^2(1 - \zeta^2))(1 - r + 2r^2\zeta^2\nu^2) \\ \quad + \psi(2 + \psi - r^2(2 + 4\zeta^2\nu^2 + \psi)) \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

■  $G_b$  のアクセラランス ( $\hat{s}^2 G_b$ )

$$\begin{cases} F_1 = (r\nu^2 - 1)(1 - r + 2r\zeta^2) - \psi(1 - r + 2r\zeta^2(2 + \psi)) \\ F_2 = (1 + r - 2r^2\nu^2(1 - \zeta^2))(1 - r + 2r^2\zeta^2\nu^2) \\ \quad + \psi(2 + \psi - r^2(2 - 4\zeta^2\nu^2 + \psi)) \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

## 付録 B

# 有理関数で表された $H_2$ ノルムの導出方法

### B.1 解析的な導出方法

式 (2.59) で示されるように，通常  $H_2$  ノルムは積分を用いた形で表される．そこで本付録では，文献 [103] の公式に基づいて， $H_2$  ノルムの 2 乗を有理関数で表すための導出手順を示す．初めに多項式  $g_n(\lambda)$  と  $h_n(\lambda)$  を以下のように導入する．

$$|G(j\lambda)|^2 = \frac{g_n(\lambda)}{h_n(\lambda)h_n(-\lambda)} \quad (\text{B.1})$$

$$g_n(\lambda) = b_0\lambda^{2n-2} + b_1\lambda^{2n-4} + \cdots + b_{n-1} \quad (\text{B.2})$$

$$h_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n \quad (\text{B.3})$$

留数定理によって，式 (B.1) の積分は次のように求められる [103]．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n(\lambda)}{h_n(\lambda)h_n(-\lambda)} d\lambda = \frac{\pi j M_n}{a_0 \Delta_n} \quad (\text{B.4})$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (\text{B.5})$$



$$M_n = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (\text{B.6})$$

式 (2.59) と式 (B.4) より,  $H_2$  ノルムの 2 乗は以下のように書き換えられる.

$$\|G\|_2^2 = \frac{j}{2a_0} \frac{M_n}{\Delta_n} \quad (\text{B.7})$$

## B.2 解析的に導出した $H_2$ ノルム, $F_3$ , $F_4$

解析的に求めた  $H_2$  ノルムの 2 乗とその最適解を求めるのに必要な  $F_3$  と  $F_4$  を以下に示す.

### ■ $G_a$ のコンプライアンス

$$\|G_a\|_2^2 = \frac{1}{4} \frac{A_1 + A_2}{\zeta_1 A_1 + A_3} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{cases} F_3 = \zeta (\zeta_1^2 (8\nu^2 + 4) + \nu^4 - 1) + 4\zeta^3 \nu^2 \\ \quad + 2\zeta_1 \nu (2\zeta_1^2 + \nu^2 - 1) + 4\zeta_1 \zeta^2 \nu (\nu^2 + 2) \\ F_4 = 2\zeta \nu (2\zeta_1^2 + 2\zeta_1 \zeta \nu + \nu^2 - 1) + \psi(\zeta_1 + \zeta \nu) \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

### ■ $G_b$ のコンプライアンス

$$\|G_b\|_2^2 = \frac{1}{4} \frac{A_1}{\zeta_1 (A_1 + A_4) + A_5} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{cases} F_3 = 4\zeta_1^4 + (4\zeta_1^2 - 1) (4\zeta^2 + 1) \nu^2 \\ \quad + 2 (8\zeta_1^2 - 3) \zeta_1 \zeta \nu - 2\zeta_1^2 + 8\zeta_1 \zeta \nu^3 + \nu^4 \\ F_4 = 2\zeta_1^2 + 2\zeta_1 \zeta \nu + \nu^2 - \psi - 1 \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

### ■ $G_a$ のモビリティ ( $\hat{s}G_a$ )

$$\|\hat{s}G_a\|_2^2 = \frac{1}{4} \frac{A_1}{\zeta_1 A_1 + A_3} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{cases} F_3 = \zeta (4\zeta_1 \zeta \nu^3 + 4\zeta^2 \nu^2 + \nu^4 - 1) - \psi(\zeta_1 \nu + \zeta) \\ F_4 = \nu^2 - 1 \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

■  $G_b$  のモビリティ ( $\hat{s}G_b$ )

$$\|\hat{s}G_b\|_2^2 = \frac{1}{4} \frac{A_1 - A_2 + A_4}{\zeta_1 (A_1 + A_4) + A_5} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{cases} F_3 = \zeta_1 \zeta (\nu^4 - 2\nu^2 \psi - (\psi + 1)^2) - \zeta_1^2 \nu \psi \\ \quad + \zeta^2 \nu (\nu^2 (\psi + 2) - 2(\psi + 1)^2) \\ F_4 = \nu^4 - (\psi + 1)(4\zeta \nu (\zeta_1 + \zeta \nu) + \psi + 1) \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

それぞれの  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  は以下に示す.

$$\begin{cases} A_1 = 4\zeta^3 \nu^2 + 4\zeta_1 \zeta^2 \nu (\nu^2 + 1) + \zeta_1 \nu \psi \\ \quad + \zeta (\nu^4 + 2(2\zeta_1^2 - 1)\nu^2 + 1 + \psi) \\ A_2 = \zeta \psi (\nu^2 - 1) \\ A_3 = \zeta \nu \psi (\zeta + \zeta_1 \nu) \\ A_4 = \zeta \psi (4\zeta \nu (\zeta_1 + \zeta \nu) + \psi) \\ A_5 = \zeta (\zeta_1 + \zeta \nu^3) \psi \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

## B.3 最適化された評価関数

表 2.1 と表 2.4 より,  $\zeta_1 = 0$  の場合では  $H_2$  規範の最適パラメータは非常に簡単になる. 導出した最適パラメータを用いたときの  $H_2$  ノルムの二乗は以下のようになる.

$$\|G_a\|_2^2 \Big|_{\zeta_1=0, \nu=\nu_{\text{opt}}, \zeta=\zeta_{\text{opt}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4-\psi}{\psi}} \quad (\text{B.17})$$

$$\|G_b\|_2^2 \Big|_{\zeta_1=0, \nu=\nu_{\text{opt}}, \zeta=\zeta_{\text{opt}}} = \frac{1}{\sqrt{\psi(1+\psi)}} \quad (\text{B.18})$$

$$\|\hat{s}G_a\|_2^2 \Big|_{\zeta_1=0, \nu=\nu_{\text{opt}}, \zeta=\zeta_{\text{opt}}} = \frac{3}{2\sqrt{2\psi}} \quad (\text{B.19})$$

$$\|\hat{s}G_b\|_2^2 \Big|_{\zeta_1=0, \nu=\nu_{\text{opt}}, \zeta=\zeta_{\text{opt}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4+3\psi}{\psi+\psi^2}} \quad (\text{B.20})$$

図 2.7(a),(b) に上記の最適値を用いたグラフを示している.



## 付録 C

### $D(\hat{s})$ の多重度

特性方程式  $D(\hat{s})$  には 2 つの共役な複素根を持つと仮定する。もし主系の減衰比  $\zeta_1$  や無次元化電気機械結合係数  $\psi$  が大きい場合は、文献 [64] で示されるように  $D(\hat{s})$  には実根を持つ場合があるかもしれない。しかし、2.3 節で議論したように、本論文では小さい  $\zeta_1$  や  $\psi$  を扱うため、実根を持つ場合は考慮しない。以下に、文献 [63] で提案された方法を用いて、安定度最大化問題の解が  $D(\hat{s})$  が重根の複素根を持つことと解釈できることを示す。

$D(\hat{s})$  は 2 つの複素根を持つため、 $D(\hat{s})$  は以下のように因数分解される。

$$D(\hat{s}) = (\hat{s}^2 - 2\alpha_1\hat{s} + \alpha_1^2 + \beta_1^2)(\hat{s}^2 - 2\alpha_2\hat{s} + \alpha_2^2 + \beta_2^2) \quad (\text{C.1})$$

ここで、 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  は実数である。

■  $G_a$  の場合 式 (2.23) より、 $G_a$  の  $D(\hat{s})$  は以下のように表される。

$$D(\hat{s}) = (\hat{s}^2 + 2\zeta_1\hat{s} + 1)(\hat{s}^2 + 2\zeta\nu\hat{s} + \nu^2) + \psi\hat{s}^2 \quad (\text{C.2})$$

式 (C.1) の係数と式 (C.2) の係数を比較すると、次の式が得られる。

$$2(\zeta_1 + \zeta\nu) = -2(\alpha_1 + \alpha_2) \quad (\text{C.3})$$

$$1 + 4\zeta_1\zeta\nu + \nu^2 + \psi = 4\alpha_1\alpha_2 + r_1^2 + r_2^2 \quad (\text{C.4})$$

$$2(\zeta + \zeta_1\nu)\nu = -2(\alpha_1r_2^2 + \alpha_2r_1^2) \quad (\text{C.5})$$

$$\nu^2 = r_1^2r_2^2 \quad (\text{C.6})$$

ここで  $r_1 := \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}$ ,  $r_2 := \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}$  とする。式 (C.3) より、 $\zeta\nu$  を定数だとすると、極の実部の和は一定となることがわかる。 $\zeta\nu$  が与えられた条件化では、 $\alpha_1$  と

$\alpha_2$  が同じになる  $\nu$  が最適となる。そのため、 $\alpha_1 = \alpha_2 = -\lambda$  を式 (C.3)-(C.6) に代入し、 $\zeta$  と  $\nu$  を消去すると以下の式が得られる。

$$(r_1^2 + r_2^2 - 2)\lambda + (1 - r_1^2 r_2^2)\zeta_1 = 0 \quad (\text{C.7})$$

$$r_1^2 + r_2^2 - r_1^2 r_2^2 + 4(\zeta_1 - \lambda)^2 - \psi - 1 = 0 \quad (\text{C.8})$$

式 (C.7) と式 (C.8) を解くことで、 $r_1$  と  $r_2$  が以下のように得られる。

$$r_1 = \sqrt{1 + \zeta_1 \left( \frac{\psi}{2(\zeta_1 - \lambda)} - 2(\zeta_1 - \lambda) \right)} \mp A \quad (\text{C.9})$$

$$r_2 = \sqrt{1 + \zeta_1 \left( \frac{\psi}{2(\zeta_1 - \lambda)} - 2(\zeta_1 - \lambda) \right)} \pm A \quad (\text{C.10})$$

$$A := \sqrt{\frac{\zeta_1^2 \psi^2}{4(\zeta_1 - \lambda)^2} - 4(1 - \zeta_1^2)(\zeta_1 - \lambda)^2 + (1 - 2\zeta_1^2)\psi} \quad (\text{C.11})$$

$r_1$  と  $r_2$  は実数であるためには、 $\lambda$  の条件は以下ようになる。

$$\lambda \leq \zeta_1 + \frac{\sqrt{\psi}}{2} \quad (\text{C.12})$$

$\lambda$  が最も大きいときが最適解であるため、 $\lambda = \zeta_1 + \frac{\sqrt{\psi}}{2}$  となり、 $r_1$  と  $r_2$  は

$$r_1 = r_2 = 1 \quad (\text{C.13})$$

となる。これらのことから、2つの共役な複素根は重根となることが証明される。

■ $G_b$  の場合 同様に  $G_b$  についても証明する。式 (2.24) より、 $G_a$  の  $D(\hat{s})$  は以下のように表される。

$$D(\hat{s}) = (\hat{s}^2 + 2\zeta_1 \hat{s} + 1)(\hat{s}^2 + 2\zeta \nu \hat{s} + \nu^2) + \psi(\hat{s}^2 + 2\zeta \nu \hat{s}) \quad (\text{C.14})$$

式 (C.1) の係数と式 (C.14) の係数を比較すると、次の式が得られる。

$$2(\zeta_1 + \zeta \nu) = -2(\alpha_1 + \alpha_2) \quad (\text{C.15})$$

$$1 + 4\zeta_1 \zeta \nu + \nu^2 + \psi = 4\alpha_1 \alpha_2 + r_1^2 + r_2^2 \quad (\text{C.16})$$

$$2(\zeta + \zeta_1 \nu) \nu + 2\zeta \nu \psi = -2(\alpha_1 r_2^2 + \alpha_2 r_1^2) \quad (\text{C.17})$$

$$\nu^2 = r_1^2 r_2^2 \quad (\text{C.18})$$

式 (C.15) より、 $\zeta \nu$  を定数だとすると、極の実部の和は一定となることがわかる。 $\zeta \nu$  が与えられた条件化では、 $\alpha_1$  と  $\alpha_2$  が同じになる  $\nu$  が最適となる。そのため、

$\alpha_1 = \alpha_2 = -\lambda$  を式 (C.15)-(C.18) に代入し,  $\zeta$  と  $\nu$  を消去すると以下の式が得られる.

$$(\zeta_1 - \lambda) (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1^2 r_2^2 + 4(\zeta_1^2 - 3\zeta_1 \lambda + 2\lambda^2)) = 0 \quad (\text{C.19})$$

$$r_1^2 + r_2^2 - r_1^2 r_2^2 + 4(\zeta_1 - \lambda)^2 - \psi - 1 = 0 \quad (\text{C.20})$$

式 (C.19) と式 (C.20) を解くことで,  $r_1$  と  $r_2$  が以下のように得られる.

$$r_1 = \sqrt{1 - 2\zeta_1(\zeta_1 - \lambda) + \psi \mp B} \quad (\text{C.21})$$

$$r_2 = \sqrt{1 - 2\zeta_1(\zeta_1 - \lambda) + \psi \pm B} \quad (\text{C.22})$$

$$B := \sqrt{\psi^2 + (1 - 4\zeta_1(\zeta_1 - \lambda))\psi - 4(1 - \zeta_1^2)(\zeta_1 - \lambda)^2} \quad (\text{C.23})$$

$r_1$  と  $r_2$  は実数であるためには,  $\lambda$  の条件は以下のようになる.

$$\lambda \leq \frac{\zeta_1(2 + \psi) - 2\zeta_1^3 + \sqrt{\psi(1 - \zeta_1^2 + \psi)}}{2(1 - \zeta_1^2)} \quad (\text{C.24})$$

$\lambda$  が最も大きいときが最適解であるため,  $\lambda = \frac{\zeta_1(2 + \psi) - 2\zeta_1^3 + \sqrt{\psi(1 - \zeta_1^2 + \psi)}}{2(1 - \zeta_1^2)}$  となり,  $r_1$  と  $r_2$  は

$$r_1 = r_2 = \frac{1 + \psi + \zeta_1 \left( \sqrt{\psi(1 - \zeta_1^2 + \psi)} - \zeta_1 \right)}{1 - \zeta_1^2} \quad (\text{C.25})$$

となる. これらのことから, 2つの共役な複素根は重根となることが証明される.



## 付録 D

# 表 2.2 で示された $G_a$ における $r_{\text{opt}}$ の近似解

Tang ら [48] は表 2.2 で示した  $r_{\text{opt}}$  の数式がとても長く，実用的ではないと指摘し，以下の近似解を提案した．

$$r_{\text{app}} \approx \frac{1}{2} + \frac{\psi}{8} + \frac{\sqrt{\psi^2 - 24\psi + 16}}{8} \quad (\text{D.1})$$

この近似解は，文献 [48] 中の式 (39) において， $\psi^2$  と  $\psi^3$  を無視することで求められる．しかし図 D.1 に示すように，この近似解では大きな  $\psi$  では十分な精度が得られない．本章ではマクローリン展開を用いて， $r_{\text{opt}}$  の別の近似解を示す．その近似解は以下のように得られる．

$$r_{\text{app}} = 1 - \frac{\psi}{4} - \frac{3\psi^2}{128} - \frac{7\psi^3}{1024} - \frac{77\psi^4}{32768} + \mathcal{O}(\psi^5) \quad (\text{D.2})$$

図 D.1 に最適解と近似解を用いたときの  $\|G_a\|_{\infty}$  の相対誤差を示す．文献 [48] で提案した式 (D.1) では，定点理論と比較しても共振ピークの大きさが劣化していることがわかる．一方，式 (D.2) を用いると，3 次以上の近似解ならば，定点理論よりも性能が高くなることが確認できる．



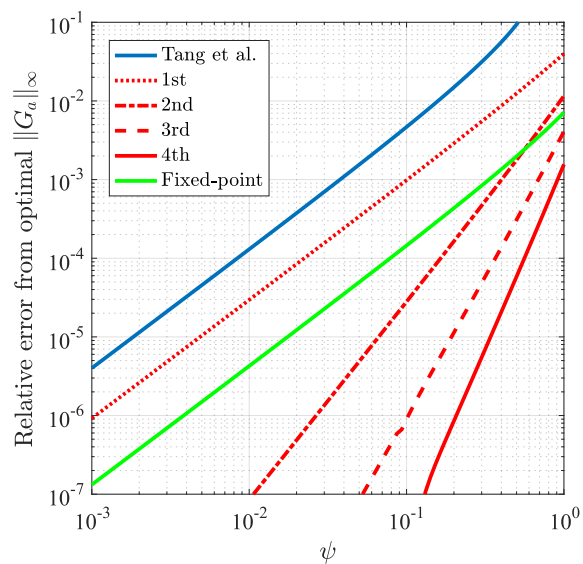


Fig.D.1: Relative error between  $\|G_a\|_\infty$  when  $r_{\text{app}}$  is used and  $\|G_a\|_\infty$  when  $r_{\text{opt}}$  is used versus  $\psi$ . The blue line is proposed by Tang et al. [48].

## 付録 E

# 初期値選定方法

### E.1 従来モデル II

式 (4.4) の従来モデル II の場合において議論する。従来モデル II におけるアドミタンス  $Y_e^{\text{II}}(s)$  を式 (3.9) のように有理関数で表すことで、パラメータベクトルを  $\boldsymbol{\theta}_{\text{ini}}^{\text{II}}$  を次のように決める。

$$\boldsymbol{\theta}_{\text{ini}}^{\text{II}} := \left[ \frac{L_0}{R_\mu \omega_1^2}, \frac{1}{\omega_1^2} \left( 1 + \frac{2L_0 \zeta_1 \omega_1}{R_\mu} \right), \frac{L_0}{R_\mu} + \frac{2\zeta_1}{\omega_1}, \frac{L_0}{\omega_1^2} \left( \frac{R_0}{R_\mu} + 1 \right), \right. \\ \left. \frac{R_0}{\omega_1^2} + \frac{L_0 \bar{\phi}^2}{R_\mu \omega_1^2} + \frac{2L_0 \zeta_1}{\omega_1} \left( \frac{R_0}{R_\mu} + 1 \right), L_0 \left( \frac{R_0}{R_\mu} + 1 \right) + \frac{\bar{\phi}^2}{\omega_1^2} + \frac{2R_0 \zeta_1}{\omega_1}, R_0 \right]^{\text{T}} \quad (\text{E.1})$$

数値的なオーダーを評価すると、実際は  $L_0 \ll 1$ ,  $\zeta_1 \ll 1$ ,  $R_\mu \gg 1$ ,  $\omega_1 > 1$  であるため、式 (E.1) 中の第 2 成分の第 2 項にある  $2L_0 \zeta_1 \omega_1 / R_\mu \ll 1$  と見ることができるので、これを無視する。 $\boldsymbol{\theta}_{\text{ini}}^{\text{II}}$  の各成分を  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$  とすると、式 (E.1) より  $\zeta_1$ ,  $\omega_1$ ,  $\bar{\phi}$ ,  $R_0$ ,  $L_0$ ,  $R_\mu$  は以下のように求めることができる。

$$\zeta_1 = \frac{1}{2\sqrt{\theta_2}} \left( \theta_3 - \frac{\theta_1}{\theta_2} \right), \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\theta_2}}, \quad \bar{\phi} = \sqrt{\frac{\theta_6 - \theta_3 \theta_7}{\theta_2} + \frac{\theta_1 \theta_7 - \theta_4}{\theta_2^2}}, \\ R_0 = \theta_7, \quad L_0 = \frac{\theta_4 - \theta_1 \theta_7}{\theta_2}, \quad R_\mu = \frac{\theta_4 - \theta_1 \theta_7}{\theta_1}. \quad (\text{E.2})$$

$A^{\text{II}}$  と  $b^{\text{II}}$  の  $k$  番目の成分を  $A_k^{\text{II}}$  と  $b_k^{\text{II}}$ ,  $k = 1, \dots, N_s$  で表すと, 次のようになる.

$$A_k^{\text{II}} := \left[ \frac{(j\omega_s[k])^2}{Y_s(j\omega_s[k])}, \frac{j\omega_s[k]}{Y_s(j\omega_s[k])}, \frac{1}{Y_s(j\omega_s[k])}, -(j\omega_s[k])^2, -j\omega_s[k], -1, -\frac{1}{j\omega_s[k]} \right] \quad (\text{E.3})$$

$$b_k^{\text{II}} := -\frac{1}{j\omega_s[k]Y_s(j\omega_s[k])} \quad (\text{E.4})$$

式 (E.3) と式 (E.4) を式 (3.18) に代入して求めた  $\theta_{\text{iniopt}}^{\text{II}}$  を式 (E.2) に代入することで数値最適化の初期値を決定する.

## E.2 従来モデル III

式 (4.5) の従来モデル III の場合において議論するが,  $Y_e^{\text{III}}(s)$  は式 (3.9) のように有理関数で表すことができない. そこで第 1 種ベッセル関数  $J_\nu(z)$  のマクローリン展開することで以下の式を得る.

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \quad (\text{E.5})$$

ここで  $\Gamma(z)$  はガンマ関数である [104]. 式 (E.5) を式 (4.5) の  $Z_c^{\text{III}}(s)$  に代入し,  $Z_c^{\text{III}}(s)$  の分母分子の 1 次成分のみを取り出すと以下のようなになる.

$$Z_c^{\text{III}}(s) \approx \sqrt{\alpha}\beta s \frac{\alpha s + 8}{4\alpha s + 16} \quad (\text{E.6})$$

式 (E.6) を式 (4.57) に代入することで,  $Y_e^{\text{III}}(s)$  の近似解が得られる.  $Y_e^{\text{III}}(s)$  の近似解を式 (3.9) の形に書き換えると, パラメータベクトル  $\theta_{\text{ini}}^{\text{III}}$  は以下のようなになる.

$$\theta_{\text{ini}}^{\text{III}} := \left[ \frac{\alpha}{4\omega_1^2}, \frac{1}{\omega_1^2} \left(1 + \frac{\alpha\zeta_1\omega_1}{2}\right), \frac{2\zeta_1}{\omega_1} + \frac{\alpha}{4}, \frac{\alpha^{3/2}\beta}{16\omega_1^2}, \right. \\ \left. \alpha \left( \frac{R_0}{4\omega_1^2} + \frac{\sqrt{\alpha}\beta}{8\omega_1} \zeta_1 \right) + \frac{\sqrt{\alpha}\beta}{2\omega_1^2}, \alpha \left( \frac{\bar{\phi}^2}{4\omega_1^2} + \frac{R_0\zeta_1}{2\omega_1} \right) + \sqrt{\alpha}\beta \left( \frac{\zeta_1}{\omega_1} + \frac{\alpha}{16} \right) + \frac{R_0}{\omega_1^2}, \right. \\ \left. \frac{\sqrt{\alpha}\beta}{2} + \frac{R_0}{4} \left( \alpha + \frac{8\zeta_1}{\omega_1} \right) + \frac{\bar{\phi}^2}{\omega_1^2}, R_0 \right]^{\text{T}} \quad (\text{E.7})$$

数値的なオーダーを評価すると, 実際は  $\alpha \ll 1$ ,  $\zeta_1 \ll 1$ ,  $\omega_1 > 1$  であるため, 式 (E.7) 中の第 2 成分の第 2 項にある  $\alpha\zeta_1\omega_1/2 \ll 1$  と見ることができるので, これを無視する.  $\theta_{\text{ini}}^{\text{III}}$  の各成分を  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$  とすると, 式 (E.7) より  $\zeta_1$ ,  $\omega_1$ ,  $\bar{\phi}$ ,  $R_0$ ,

$\alpha, \beta$  は以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\theta_2}} \left( \theta_3 - \frac{\theta_1}{\theta_2} \right), \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\theta_2}}, \\ \bar{\phi} &= \sqrt{\frac{1}{\theta_1} \left( \theta_6 + \frac{\theta_4}{\theta_2} - \theta_2\theta_8 \right) + \frac{\theta_1\theta_8}{\theta_2^2} - 2\frac{\theta_3\theta_4}{\theta_1^2} - \frac{\theta_3\theta_8}{\theta_2}}, \quad R_0 = \theta_8, \\ \alpha &= \frac{4\theta_1}{\theta_2}, \quad \beta = 2\frac{\theta_4}{\theta_1} \sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}.\end{aligned}\tag{E.8}$$

$\mathbf{A}^{\text{III}}$  と  $\mathbf{b}^{\text{III}}$  の  $k$  番目の成分を  $A_k^{\text{III}}$  と  $b_k^{\text{III}}$ ,  $k = 1, \dots, N_s$  で表すと、次のようになる。

$$\begin{aligned}A_k^{\text{III}} := & \left[ \frac{(j\omega_s[k])^2}{Y_s(j\omega_s[k])}, \frac{j\omega_s[k]}{Y_s(j\omega_s[k])}, \frac{1}{Y_s(j\omega_s[k])}, -(j\omega_s[k])^3, \right. \\ & \left. -(j\omega_s[k])^2, -j\omega_s[k], -1, -\frac{1}{j\omega_s[k]} \right]\end{aligned}\tag{E.9}$$

$$b_k^{\text{III}} := -\frac{1}{j\omega_s[k]Y_s(j\omega_s[k])}\tag{E.10}$$

式 (E.9) と式 (E.10) を式 (3.18) に代入して求めた  $\boldsymbol{\theta}_{\text{iniopt}}^{\text{III}}$  を式 (E.8) に代入することで数値最適化の初期値を決定する。

### E.3 UD モデル

式 (4.20) の UD モデルの場合において議論するが、 $Y_e^{\text{UD}}(s)$  は式 (3.9) のように有理関数で表すことができないため、近似を用いる。式 (E.5) を式 (4.20) の  $Z_c^{\text{UD}}(s)$  に代入し、 $Z_c^{\text{UD}}(s)$  の分母分子の 1 次成分のみを取り出すと以下のようなになる。

$$Z_c^{\text{UD}}(s) \approx L_g s + \sqrt{\alpha}\beta s \frac{\alpha s + 8}{4\alpha s + 16}\tag{E.11}$$

式 (E.11) を式 (4.57) に代入することで、 $Y_e^{\text{UD}}(s)$  の近似解を式 (3.9) の形に書き換えると、パラメータベクトル  $\boldsymbol{\theta}_{\text{ini}}^{\text{UD}}$  は以下のようなになる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}_{\text{ini}}^{\text{UD}} := & \left[ \frac{\alpha}{4\omega_1^2}, \frac{1}{\omega_1^2} \left( 1 + \frac{\alpha\zeta_1\omega_1}{2} \right), \frac{2\zeta_1}{\omega_1} + \frac{\alpha}{4}, \frac{4L_g\alpha + \alpha^{3/2}\beta}{16\omega_1^2}, \right. \\ & \alpha \left( \frac{R_0}{4\omega_1^2} + \frac{4L_g + \sqrt{\alpha}\beta}{8\omega_1} \zeta_1 \right) + \frac{2L_g + \sqrt{\alpha}\beta}{2\omega_1^2}, \\ & \alpha \left( \frac{\bar{\phi}^2}{\omega_1^2} + \frac{R_0\zeta_1}{2\omega_1} + \frac{L_g}{4} \right) + \sqrt{\alpha}\beta \left( \frac{\zeta_1}{\omega_1} + \frac{\alpha}{16} \right) + \frac{R_0}{\omega_1^2} + \frac{2L_g\zeta_1}{\omega_1}, \\ & \left. L_g + \frac{\sqrt{\alpha}\beta}{2} + \frac{R_0}{4} \left( \alpha + \frac{8\zeta_1}{\omega_1} \right) + \frac{\bar{\phi}^2}{\omega_1^2}, R_0 \right]^{\text{T}}\end{aligned}\tag{E.12}$$

数値的なオーダーを評価すると、実際は  $\alpha \ll 1$ ,  $\zeta_1 \ll 1$ ,  $\omega_1 > 1$  であるため、式 (E.12) 中の第 2 成分の第 2 項にある  $\alpha\zeta_1\omega_1/2 \ll 1$  と見ることができるので、これを無視する。  $\boldsymbol{\theta}_{\text{ini}}^{\text{UD}}$  の各成分を  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$  とすると、式 (E.12) より  $\zeta_1$ ,  $\omega_1$ ,  $\bar{\phi}$ ,  $R_0$ ,  $L_g$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  は以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\theta_2}} \left( \theta_3 - \frac{\theta_1}{\theta_2} \right), \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\theta_2}}, \\ \bar{\phi} &= \sqrt{\frac{\theta_7 - \theta_3\theta_8}{\theta_2} + \frac{\theta_1\theta_8 - \theta_5}{\theta_2^2} + \frac{\theta_4}{\theta_2^3} \left( \theta_3 - \frac{\theta_1}{\theta_2} \right)}, \quad R_0 = \theta_8, \\ L_g &= \theta_1 \left( \frac{\theta_8}{\theta_2} - \frac{\theta_4}{\theta_2^3} \right) + \left( \frac{2}{\theta_1} + \frac{\theta_3}{\theta_2^2} \right) \theta_4 - \frac{\theta_5}{\theta_2}, \quad \alpha = \frac{4\theta_1}{\theta_2} \\ \beta &= 2\sqrt{\frac{\theta_1}{\theta_2}} \left\{ \frac{\theta_5}{\theta_1} + \frac{\theta_4}{\theta_2^2} - \theta_8 - \frac{\theta_4}{\theta_1} \left( \frac{\theta_3}{\theta_2} + \frac{\theta_2}{\theta_1} \right) \right\}.\end{aligned}\tag{E.13}$$

$\mathbf{A}^{\text{UD}}$  と  $\mathbf{b}^{\text{UD}}$  の  $k$  番目の成分を  $A_k^{\text{UD}}$  と  $b_k^{\text{UD}}$ ,  $k = 1, \dots, N_s$  で表すと、次のようになる。

$$\begin{aligned}A_k^{\text{UD}} &:= \left[ \frac{(j\omega_s[k])^2}{Y_s(j\omega_s[k])}, \frac{j\omega_s[k]}{Y_s(j\omega_s[k])}, \frac{1}{Y_s(j\omega_s[k])}, -(j\omega_s[k])^3, \right. \\ &\quad \left. -(j\omega_s[k])^2, -j\omega_s[k], -1, -\frac{1}{j\omega_s[k]} \right]\end{aligned}\tag{E.14}$$

$$b_k^{\text{UD}} := -\frac{1}{j\omega_s[k]Y_s(j\omega_s[k])}\tag{E.15}$$

式 (E.14) と式 (E.15) を式 (3.18) に代入して求めた  $\boldsymbol{\theta}_{\text{iniopt}}^{\text{UD}}$  を式 (E.13) に代入することで数値最適化の初期値を決定する。

## E.4 NL モデル

式 (4.39) の NL モデルの場合において、NL モデルの非線形最小二乗問題の推定初期値は UD モデルの初期値を利用する。詳しく説明すると、パラメータ  $\zeta_1$ ,  $\omega_1$ ,  $\bar{\phi}$ ,  $R_0$  は式 (E.13) と同様のものを使用し、パラメータ  $\mathcal{P}_g$ ,  $\mathcal{P}_j$ ,  $R_j$  は式 (E.13) 中のパラメータ  $L_g$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  を式 (4.33), 式 (4.43), 式 (4.44) を代入することで決定する。

## 付録 F

# 付加質量を利用した機械パラメータ推定

本付録では  $\zeta_1, \omega_1, \bar{\phi}$  だけでなく機械系のパラメータ  $m_1, c_1, k_1$  や電気機械結合係数  $\phi$  の値を推定する手法を提案する．質量  $m_1$  に既知の付加質量  $\Delta m$  を加え，アドミタンスの周波数特性を再度計測し，パラメータを推定する．付加質量を取り付けることで， $\zeta_1, \omega_1, \bar{\phi}$  はそれぞれ  $\zeta'_1 := c_1/\sqrt{4(m_1 + \Delta m)k_1}$ ,  $\omega'_1 := \sqrt{k_1/(m_1 + \Delta m)}$ ,  $\bar{\phi}' := \phi/\sqrt{m_1 + \Delta m}$  のように変化する．推定した  $\zeta_1, \omega_1, \bar{\phi}, \omega'_1, \Delta m$  を用いることで， $m_1, c_1, k_1, \phi$  の値が計算できる．

付加質量  $\Delta m = -0.645$  kg を加えて，つまり 0.645 kg の質量を取り除いた時の，計測したアドミタンスの周波数特性を計測する．表 F.1 に  $\zeta'_1, \omega'_1, \bar{\phi}'$  等のパラメータを含んだ NL モデルの推定したパラメータ値を示す．表 F.2 に計算した  $m_1, c_1, k_1, \phi$  の値を示す． $R_0, \mathcal{P}_g, \mathcal{P}_j, R_j$  の推定値は質量  $m_1$  の変動に影響を及ぼさないため，表 4.5 と表 F.1 のそれらの値はほぼ同じとなる．

Table F.1: Estimated parameter values when  $\Delta m (=0.645\text{kg})$  is removed.

$\zeta'_1$ [-]	$\omega'_1$ [rad/s]	$\bar{\phi}'$ [N/A/kg $^{\frac{1}{2}}$ ]	$R_0$ [ $\Omega$ ]	$\mathcal{P}_g$ [H]
0.00927	64.2	2.26	2.58	$3.43 \times 10^{-9}$
$\mathcal{P}_1$ [H]	$\mathcal{P}_2$ [H]	$\mathcal{P}_3$ [H]	$\mathcal{P}_4$ [H]	$\mathcal{P}_5$ [H]
$4.16 \times 10^{-9}$	$3.84 \times 10^{-9}$	$3.73 \times 10^{-9}$	$4.78 \times 10^{-9}$	$4.28 \times 10^{-9}$
$R_1$ [ $\Omega$ ]	$R_2$ [ $\Omega$ ]	$R_3$ [ $\Omega$ ]	$R_4$ [ $\Omega$ ]	$R_5$ [ $\Omega$ ]
$2.90 \times 10^{-6}$	$1.43 \times 10^{-5}$	$5.34 \times 10^{-5}$	$1.89 \times 10^{-4}$	$8.30 \times 10^{-4}$

Table F.2: Estimated parameter values of the mechanical model and electromechanical coupling coefficient.

$m_1$ [kg]	$c_1$ [Ns/m]	$k_1$ [N/m]	$\phi$ [N/A]
1.73	1.92	$4.47 \times 10^3$	2.51