フランスの中等数学教育におけるベクトル（続）

木　村　卓　二

昨年度の紀要に引続く部分としてリセーの第一級（高校2年）を紹介する。

第1級（高2）代数

Ⅱ章　函数と導函数

7課　函数に関する一般論，極限の概念，座標とグラフ

63	函数の概念	64	諸定義
65	定義区間	66	函数の変動
67	定　理	68	応　用
69	定　義	70	函数の極限
71	極限に関する演算	72	不定形$\frac{0}{0}$
73	デカルト座標		
74	ベクトルのスカラー成分		
75	対称点	76	グラフ表現
77	定　理	78	動点の軌跡
79	軸Oxに関するOy方向えのアフィン変換		
80	2曲線の交点	81	デカルト座構系の移動

（高1の代数の部分とほぼ同じ内容である。）

Ⅲ章　三角函数

19課　加法定理

220	問題の意味	221	$\cos(a-b)$ の計算
222	系		
223	tg，$(a+b)$，$\mathrm{tg}(a-b)$ の計算		
224	まとめ	225	練習問題
226	問		
227	$\sin^2 x$，$\cos^2 x$，$\mathrm{tg}^2 x$を$\cos 2x$ で表わすこと		
228	練習問題		
229	定理，三角函数をその角の半分の角の tg で表わすこと		
230	他の方法		

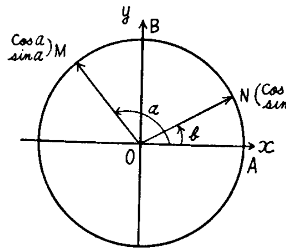
221 $\cos(a-b)$ の計算

中心Oの単位円周上で$\angle a$，$\angle b$ の弧$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AN}$を考える。（xOy なる正規直交系で）単位ベクトル$\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{ON}$はスカラー成分として$(\cos a, \sin a)$ $(\cos b, \sin b)$ をもつ。幾何的角NOMは $2k\pi$ ラヂアンをのぞいて $|a-b|$ に等しい。そしてcosとしては角 $(a-b)$ の cos と等しい。

それ故　$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\cos(a-b)$（スカラー積の定義）

又　$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b$

$$\boxed{\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b}$$

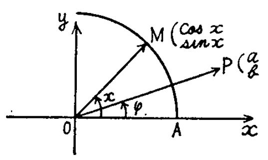


20課　三角函数の変形。他の公式

231	思い出すこと	232	系
233	和を積に	234	応　用
235	練習問題	236	積を和に
237	例		
238	$tg\frac{a}{2}$を$\sin a$，$\cos a$ で計算する		
239	$tgp\pm tgq$，$\cot p\pm\cot q$ の変形		
240	$a\cos x+b\sin x$ の変形		

240. $a\cos x+b\sin x$ の変形

$\overrightarrow{OM}$をその成分がそれぞれ$\cos x$，$\sin x$ である単位ベクトルとする。$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM}=a\cos x+b\sin x$ $=r\cos(x-\phi)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\phi)$



23課　運動学基礎

270	定　義	271	時間の概念
272	直線運動の時間方程式		
273	直線運動のグラフ	274	ベクトル速度
275	ベクトル加速度		
276	速度と加速度のグラフ		
277	非等速運動		
278	同一軸上を動く動点		
279	同一軸上を同一速度で動く動点		

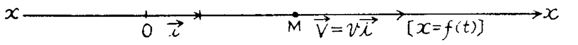
270. 定　義

定点，動点，曲線運動，直線運動

272. 直線運動の時間方程式

Mが直線上を動く時，この直線を座標系Oxの台としてとる。この直線上に原点Oと単位ベクトル$\vec{i}$をとる。

『軸Oxの上を動く点Mの位置は t の関数としての横座標 $x=f(t)$ によって決められる』



〝$x=f(t)$ なる関係は点Mの運動の時間方程式である〟点Mの位置はベクトル$\overrightarrow{OM}=f(t)\vec{i}$ によって時間の函数として決定される。

274. ベクトル速度

軸Ox上の時間方程式 $x=f(t)$ なる動点をMとする。$t=t$, $t=t_1$ の間に動点がMからM_1に来た。

ベクトル$\overrightarrow{OM}$の増加は

$$\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM}=f(t)\vec{i}-f(t)i$$
$$=[f(t_1)-f(t)]\vec{i}$$

区間 t_1-t の間の平均増加は

$$\frac{\overrightarrow{MM_1}}{t_1-t}=\frac{f(t_1)-f(t)}{t_1-t}\vec{i}$$

t_1 が t に限りなく近づくと $\dfrac{f(t_1)-f(t)}{f_1-t}$ は極限値として $f'(t)$ をとる。

これより$\overrightarrow{OM}$の平均増加は極限ベクトル$\vec{V}$に向って限りなく近づき

$$\boxed{\vec{V}=f'(t)\vec{i}=\lim_{t_1\to t}\frac{\overrightarrow{MM_1}}{t_1-t}}$$

『$\vec{V}$は時刻 t における動点Mのベクトル速度である』このベクトル速度$\vec{V}$は点Mに附属しMを始点として取ることが出来る。そのOx上の代数的測度では $f'(t)$ に等しく点Mの〝代数的速度〟又は瞬間速度という。

『軸Ox上の動点Mの代数的速度vは，その点の横座標の時間に関する微分係数に等しい』

$$\boxed{v=x'=f'(t) \Longleftrightarrow V=v\vec{i}=f'(t)\vec{i}}$$

比 $v_m=\dfrac{f(t_1)-f(t)}{t_1-t}$ は $t=t$, $t=t_1$ の間の〝平均速度〟と呼ばれる。

$t_1\to t$ の時の v_m の極限が v に外ならない。

v の符号，従って x' の符号は x の変動の向きを与え，従ってM点のOx上の変位の向きを与える。

〝$t=t$ の瞬間に動点はベクトル速度Vの向きの変位をする〟

275. ベクトル加速度

t の各値に対してベクトル$\overrightarrow{OP}=\vec{V}=f'(t)\vec{i}$ を作る。一般に点Pは時間の函数としてOx上で変位する。そして横座標として $v=f'(t)$ をもつ点Pは自分自身ベクトル速度$\vec{\Gamma}$をもつ

『点Pのベクトル速度$\vec{\Gamma}$は点Mのベクトル加速度と呼ばれる』

Mを始点としてとった$\vec{\Gamma}$は動点Mに結びつけられた第2のベクトルである。

$$\boxed{\vec{\Gamma}=v'\vec{i}=f''(t)\vec{i}}$$

ベクトル加速度$\vec{\Gamma}$の代数的測度 r はそれ故 $f(t)$ の第2次導函数 $v'=f''(\mathrm{t})$ に等しい。そして動点Mの代数的加速度を作る。

『軸 Ox 上を動く点Mの代数的加速度 r はその代数的速度の導函数である。いいかえると $x=f(t)$ の第2次導函数である』

$$\boxed{r=v'=f''(t) \Longleftrightarrow \vec{\Gamma}=r\vec{i}=f''(t)\vec{i}}$$

r の符号か v の変動の向きを与え，従ってグラフの凹性を示す。

例　$x=t^3-3t+2$ では

$v=x'=3(t^2-1) \Longleftrightarrow \vec{V}=3(t^2-1)\vec{i}$

$r=x''=6t \Longleftrightarrow \vec{\Gamma}=6t\vec{i}$

グラフは $t<0$では上に凸，$t>0$では下に凸，$t=0$ では変曲点 I (0, +2) をとる。

277. 非等速運動

その代数的速度か時間の函数として変るとき非等速運動という。

『非等速運動はその代数的速度の絶対値が時間 t の増加又は減少函数であるとき加速運動又は減速運動といわれる』

さて v は v^2 と同じ様に変動する。

$(v^2)'=2vv'=2vr$ である。

1°　もし $vr>0$ の時には『$\vec{V}$と$\vec{\Gamma}$とは同一向きをもつ』

この場合 v^2 は正の導函数を持ち t の増加函数である。それ故 v も t の増加函数であるからこの運動は〝加速運動〟である。

2°　もし $vr<0$ の時には『$\vec{V}$と$\vec{\Gamma}$とは逆向きをもつ』

この場合 v^2 は負の導函数を持ち t の減少函数である。それ故 v も t の減少函数であるかのこの運動は減速である。

vr はスカラー積$\vec{V}\cdot\vec{\Gamma}$に等しいことに注意しよう。

$\vec{V}\cdot\vec{\Gamma}=vr>0 \Longleftrightarrow$ 加速運動

$\vec{V}\cdot\vec{\Gamma}=vr<0 \Longleftrightarrow$ 減速運動

$x=t^3-3t+2$ なる運動に対しては

$vr=18t(t+1)(t-1)$

$-1<t<0$ 又は $1<t$ に対して加速運動

$t<-1$ 又は $0<t<1$ に対して減速運動

278. 同一軸上の同一速度の運動点

『座標が $f(t)$, $g(t)$ の2つの動点が同一瞬間に同じ代数的速度をもつためには $g(t)=f(t)+C$ が必要十分である』

『同一代数的速度をもつ2つの動点によって同じ時間中に之がかれるベクトルは等しい』

24課　等速直線運動，等加速度直線運動

281. 定　理

『動点が等速直線運動をするためには，その加速度が0又はその時間方程式が $x=at+b$ の形であることが必要十分である』 $\boxed{x=x_0+vt}$

282　ベクトル速度とベクトル加速度

$v=$一定で $r=0$ であるから

『ベクトル速度 $\vec{V}=v\vec{i}$ は一定で他方 $\vec{\Gamma}$ は常に0である』

『等速直線運動では動点によって作られるベクトル $\overrightarrow{M_1M_2}$ はこのベクトルが作られる間の時間 t_2-t_1 に比例する』

『ベクトル速度 $\vec{V}$ は単位時間の間に作られるベクトルである』

逆に　$\overrightarrow{M_1M_2}=(t_2-t_1)\vec{V}$ がすべての t_1, t_2 について成り立てば

$\overrightarrow{M_0M}=(t-0)\vec{V}=t\vec{V}$

つまり　$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_0}+\overrightarrow{M_0M} \iff x=x_0+tv$

従ってこの運動は等速直線運動である。

284. 任意の運動のベクトル速度の意味

$\vec{V}$ は $t=t$ の瞬間から出発して等速運動を続けるならば動点Mが単位時間内に作るであろうベクトルのことである。

286. 等加速度直線運動の定義

『直線運動はその代数的加速度が一定のとき等加速度といわれる』

軸 Ox 上を動く動点Mの時間方程式が

$x=at^2+bt+c$ の時にはそうである。

$v=2at+b$,　$r=2a$ だから。

逆にもし $\vec{V}=v\vec{i}$ なる動点Mが $2a$ なる定加速度を持てば $\overrightarrow{OP}=\vec{V}$ なる点Pは速度 $2a$ をもち，したがって横座標として $v=2at+b$。それ故Mは横座標として $x=at^2+bt$ なる動点と同じ速度をもつ。それ故 $x=at^2+bt+c$

287. 定　理

『動点が等加速度直線運動をするためには，その時間方程式が $x=at^2+bt+c$ であることが必要十分である』

$M(x_0)$ と v_0 によって $t=0$ におけるMの位置と初速度を示す。　$x=at^2+bt+c$, $v=2at+b$,

$r=2a$ において $x_0=c$, $v_0=b$, $\dfrac{r}{2}=a$ である。

$$\boxed{x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}rt^2}$$

$$\boxed{v=v_0+rt}$$

288. ベクトル速度とベクトル加速度

『ベクトル加速度 $\vec{\Gamma}=t\vec{i}=$一定である』

$$\boxed{\vec{V}=(v_0+rt)\vec{i}=v_0\vec{i}+rt\vec{i}=\vec{V}_0+\vec{\Gamma}t}$$

もし $\vec{V}_1$ と $\vec{V}_2$ によって $t=t_1$, t_2 におけるベクトル速度をかけば $\vec{V}_2-\vec{V}_1=(t_2-t_1)\vec{\Gamma}$

もし $t_2-t_1=1$　ならば　$\vec{V}_2-\vec{V}_1=\Gamma$

『$\vec{\Gamma}$ は単位時間内のベクトル速度の増加に等しい』

289 注　意

① $vr=v_0r+r^2t=r^2(t+\dfrac{v_0}{r})$

$t<-\dfrac{v_0}{r}$ に対して $vr<0$ それ故等減速。

$t>-\dfrac{v_0}{r}$ に対し $vr>0$ 等加速。

② $v^2-v_0{}^2=2r(x-x_0)$

290. 要　約

1°　$\vec{V}_0$ と $\vec{\Gamma}$ とが同じ向きなら　Mは $\vec{\Gamma}$ の向きに遠ざかる。

2°　$\vec{V}_0$ と $\vec{\Gamma}$ とが反対向きなら先づ $\vec{V}_0$ の向きに等減速し次に $\vec{\Gamma}$ の向きに等加速される。

第1級（高2）幾　何

1課　スカラー積

(14) 円に関する点の巾

1. 2つのベクトルのなす角

『任意の点からこの2つのベクトルに平行にしかも同じ向きの半直線をひいて得られる凸角を2つのベクトルのなす角という』

この角は点Oのえらび方に関係しない。

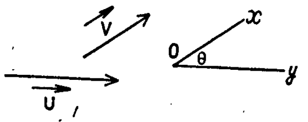
2. 2ベクトルのスカラー積の定義

『2ベクトルのスカラー積は，それらの絶対値とそのなす角の cos の積に等しい所の正負の数である』

$|\vec{\mathrm{U}}|=u$, $|\vec{\mathrm{V}}|=v$ をベクトル $\vec{\mathrm{U}}$ と $\vec{\mathrm{V}}$ の絶対値（長さ）とし，θ を角とする。そのスカラー積は

$\vec{\mathrm{U}}\cdot\vec{\mathrm{V}}$（$\vec{\mathrm{U}}$スカラー$\vec{\mathrm{V}}$と読む）とかき

$$\boxed{\vec{\mathrm{U}}\cdot\vec{\mathrm{V}}=uv\cos\theta}$$



3. 注　意

1° 『$\vec{\mathrm{U}}$ と $\vec{\mathrm{U}}$ のスカラー積はスカラー平方 $\vec{\mathrm{U}}^2$ である』

$\vec{\mathrm{U}}^2=\vec{\mathrm{U}}\cdot\vec{\mathrm{U}}=u^2$ 又 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2=\mathrm{AB}^2$

特に　$\vec{i}^{\,2}=1$

2° 『2つの単位ベクトルのスカラー積はそのなす角の cos に等しい』

$|\vec{i}|=1$, $|\vec{j}|=1 \Rightarrow \vec{i}\cdot\vec{j}=\cos\theta$

3° 『2つの0でないベクトルのスカラー積が0であるためには，この2つのベクトルが直交することが必要十分である』

実際 $uv\cos\theta=0$, $u\neq0$, $v\neq0$ であるためには

$\cos\theta=0$ が必要十分であって

$\cos\theta=0 \Leftrightarrow \theta=\angle\mathrm{R}$

その上 $uv\cos\theta>0 \Leftrightarrow \theta$ 鋭角,

$uv\cos\theta<0$ 鈍角

4. 基本定理

『2つのベクトルのスカラー積は1つのベクトルの代数的測度と他のベクトルの前者えの正射影の代数的測度との積に等しい』

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{\mathrm{U}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{\mathrm{V}}$。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と同じ向きに向きの付けられた台 $x'x$ の上えのBの正射影を B' とする。

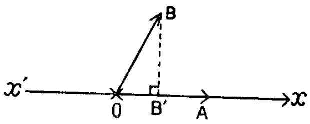
$\vec{\mathrm{V}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ との軸 $x'x$ えの正射影は等しく $\overline{\mathrm{OA}}=u$,

$\overline{\mathrm{OB}'}=\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{AOB}=u\cos\theta$　それ故

$\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{OB}'}=uv\cos\theta=\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{OB}}=\vec{\mathrm{U}}\cdot\vec{\mathrm{V}}$

もし軸 $x'x$ の向きを逆にしても $\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{OB}'}$ は変わらない。それ故軸 $x'x$ の向きがどうであろうと

$\vec{\mathrm{U}}\cdot\vec{\mathrm{V}}=\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{OB}'}=\overline{\mathrm{OB}}\cdot\overline{\mathrm{OA}'}$

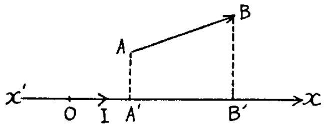


5. 系

1° 『2つのベクトルの中1つを，他のベクトルの台の上えの正射影によってとりかえてもスカラー積は変わらない』

かくして $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OI}}$

$=\overline{\mathrm{A'B'}}\cdot\overline{\mathrm{OI}}$

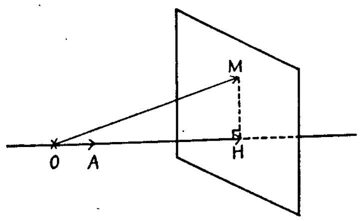


A点又はB点を $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ に垂直な平面上で動かしても $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ は変わらない。何故なら A' と B' とは固定されたままだから。

2° 『1つのベクトルの軸えの正射影の代数的測度はこのベクトルと軸の単位ベクトルとのスカラー積に等しい』

3° $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を固定ベクトル，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=k$（$k$ 定数）であるような変ベクトルとする。

Hを Mの直線 OA えの正射影とすれば $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k$ それ故Hは定点となり，点Mの軌跡は直線OAにHにおいて垂直な平面である。

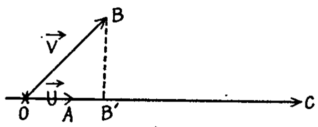


6. 可換性

$\vec{\mathrm{U}}\cdot\vec{\mathrm{V}}=\vec{\mathrm{V}}\cdot\vec{\mathrm{U}}=uv\cos\theta$

7. 正負の数をかける

『スカラー積において2つのベクトルのうち1つを m 倍するとスカラー積も m 倍になる。』



$$\boxed{(m\vec{\mathrm{U}})\cdot\vec{\mathrm{V}}=m(\vec{\mathrm{U}}\cdot\vec{\mathrm{V}})}$$

同様に

$$\boxed{(m\vec{\mathrm{U}})\cdot(n\vec{\mathrm{V}})=mn(\vec{\mathrm{U}}\cdot\vec{\mathrm{V}})}$$

8. 分配性

『スカラー積はベクトルの加法に関して分配律を満す』

$\overrightarrow{OA}=\vec{U}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{V_1}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{V_2}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{V_3}$ とする。$\overrightarrow{OD}=\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3}$ B，C，DのOA直線えの正射影をB′，C′，D′とする。

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD'}$ 又 $\overrightarrow{OD'}=\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'D'}$ （シャールの関係）

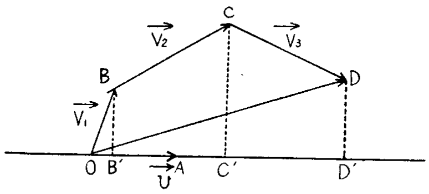
それ故 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'D'})=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{OA}\cdot\overline{C'D'}=\overline{OA}\cdot\overline{OB}+\overline{OA}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{CD}$

つまり

$$\boxed{\vec{U}(\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3})=\vec{U}\cdot\vec{V_1}+\vec{U}\cdot\vec{V_2}+\vec{U}\cdot\vec{V_3}}$$

これより

$$(\vec{U_1}+\vec{U_2})\cdot(\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3})$$
$$=\vec{U_1}(\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3})+\vec{U_2}(\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3})$$
$$=\vec{U_1}\cdot\vec{V_1}+\vec{U_1}\cdot\vec{V_2}+\vec{U_1}\cdot\vec{V_3}+\vec{U_2}\cdot\vec{V_1}+\vec{U_2}\cdot\vec{V_2}+\vec{U_2}\cdot\vec{V_3}$$



それ故２つの和の乗法に関する代数計算はスカラー積に応用される。

〝ベクトルの和のスカラー平方〟

$$(\vec{U}+\vec{V})^2=\vec{U}^2+2\vec{U}\cdot\vec{V}+\vec{V}^2$$

〝ベクトルの差のスカラー平方〟

$$(\vec{U}-\vec{V})^2=\vec{U}^2-2\vec{U}\cdot\vec{V}+\vec{V}^2$$

〝２つのベクトルの和と差の積〟

$$(\vec{U}+\vec{V})(\vec{U}-\vec{V})=\vec{U}^2-\vec{V}^2$$

9. 同一平面上の２ベクトルのスカラー積の解析的表現

正規直交系 xOy を考えよう。軸 $\overrightarrow{Ox}$ と $\overrightarrow{Oy}$ の単位ベクトル $\vec{i}$ と $\vec{j}$ は絶対値１で互に直交する。

それ故　$\vec{i}^2=1$, $\vec{j}^2=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$

平面 xOy のベクトル $\overrightarrow{OM}=\vec{U}$ と $\overrightarrow{OM'}=\vec{V}$ の成分をX，YとX′，Y′とせよ。

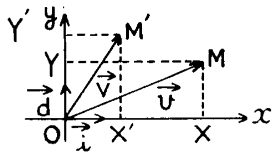
$\vec{U}=X\vec{i}+Y\vec{j}$,　$\vec{V}=X'\vec{i}+Y\vec{j}$

それ故　$\vec{U}\cdot\vec{V}=XX'\vec{i}^2+(XY'+XY')(\vec{i}\cdot\vec{j})+YY'\vec{j}^2$

つまり　$\boxed{\vec{U}\cdot\vec{V}=XX'+YY'}$

〝２つのベクトルのスカラー積は，この２つのベクトルの同一名の成分の積の和に等しい〟

特に　$\vec{U}^2=X^2+Y^2=u^2$



11. 平面上の２ベクトルのなす角の cos

『正規直交系で $\overrightarrow{OM}=\vec{U}$, $\overrightarrow{OM'}=\vec{V}$ の成分を(X，Y)(X′Y′)とする。θ でこの２つのベクトルのなす角を示せば

$\vec{U}\cdot\vec{V}=uv\cos\theta$ より　$\cos\theta=\dfrac{\vec{U}\cdot\vec{V}}{uv}$

$$\boxed{\cos\theta=\frac{XX'+YY'}{\sqrt{(X^2+Y^2)(X'^2+Y'^2)}}}$$

12. 平面上の２ベクトルの直交条件

Oでない２つのベクトル $\vec{U}(X, Y)$ と $\vec{V}(X', Y')$ とが直交するためには $\cos\theta=0$ であることが必要十分である。それ故そのスカラー積がOであることが必要十分である。

$$\boxed{XX'+YY'=0}$$

13. 直角三角形内の計量的関係

∠A＝∠R，高さAHの直角三角形△ABCがある。

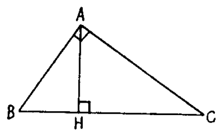
1°　$\overrightarrow{BA}^2=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}$

つまり　$\overline{BA}^2=\overline{BH}\cdot\overline{BC}$　　(1)

同様に　$\overline{AC}^2=\overline{HC}\cdot\overline{BC}$　　(2)

2°　(1)と(2)を辺々加えれば

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$　　(3)



これはピタゴラスの定理であって

$\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2=\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AC}^2$ からも出る。

3°　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB})(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})$
$=\overrightarrow{AH}^2+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=0$

つまり　$\overline{AH}^2=-\overline{HB}\cdot\overline{HC}$　　(4)

(1)(2)(4)より

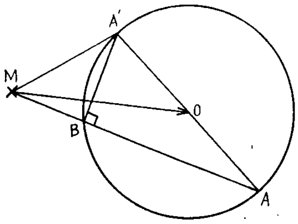
$AB\cdot AC=BC\cdot AH$

14. 円に関する１点の巾

中心O，半径R，又この円の平面上に定点Mがあり，OM＝d，又動直径をAA′とする。MAが円と再び交わる点をBとすると ∠A′BA＝∠Rで

$\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA'})=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{MO}^2-\overrightarrow{OA}^2=d^2-R^2$

それ故 $\overline{MA}\cdot\overline{MB}$ は円の割線MＡＢに無関係である。



これは与えられた円に関する点Mの巾である。

Mが円の外にあればＡとＢがＴで一致した時（Ｔを接線ＭＴの接点とする）$\overline{MT}^2=\overline{MA}\cdot\overline{MB}$

練　習　問　題

1. $\overrightarrow{U}$ と $\overrightarrow{V}$ の絶対値が u と v で角 θ の時，次の場合にスカラー積を求めよ。
   ① $u=5$, $v=7$, $\theta=30°$
   ② $u=12$, $v=18$, $\theta=60°$
   ③ $u=17$, $v=7\sqrt{2}$, $\theta=135°$
2. 正規直交系で $\overrightarrow{U}(X, Y)$, $\overrightarrow{V}(X', Y')$ が与えられているとすると，スカラー積となす角を次の各場合に計算せよ。
   ① $\overrightarrow{U}(-5, 3)$, $\overrightarrow{V}(6, 10)$
   ② $\overrightarrow{U}(0, 2)$, $\overrightarrow{V}(-\sqrt{3}, 1)$
   ③ $\overrightarrow{U}(2, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{V}(-\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
   ④ $\overrightarrow{U}(a, b)$, $\overrightarrow{V}(-mb, ma)$
3. 角 xOy を与え，軸 Ox と Oy の単位ベクトルを $\overrightarrow{i}$ と $\overrightarrow{j}$ とする。
   ① $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}$ を作れ。
   $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ を計算せよ。
   ② 角の２等分線はいかなる性質をもつことがわかるか？
4. 平面上に２定点Ａ，Ｂと動点Ｍがある。ＡＢの中点をＯとし，$AB=2a$ とする。
   ① $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overline{OM}^2-a^2$ を示せ。
   ② $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k$（$k$ 定数）なる点Ｍの軌跡を求めよ？ 特に $k=0$ の時は？
5. 平面上に２定点Ａ，Ｂと動点Ｍがある。
   ① $\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}=0$, $\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{DB}=0$ なる２点ＣとＤを作る。
   $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$ を示せ。
   ② k が定数の時，点Ｍの軌跡を求めよ。
   $(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB})=k$
6. 正規直交系 xOy において A(2,5)，B(4,−7)，ＡＢの中点をＩとすれば，
   ① ＡＢの垂直２等分線上の点 $M(x, y)$ に対して $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ が必要十分である。
   ② これよりＡＢの垂直２等分線上の任意の点Ｍの座標 x と y の関係を導け。
7. 正規直交系 xOy において A(3, 8)，B(2, −3) を与える。
   ① 直径ＡＢの円周上の点Ｍに対して $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$
   ② これより直径ＡＢなる円周上のすべての点Ｍの座標を結ぶ関係を導け。
8. 正規直交系 xOy において A(0, 3)，B(5, 2) C(−3, 7) の時
   ① △ＡＢＣのＡを通る高さの上にＭがあるためには $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$
   ② これよりこの高さ上の点Ｍの座標の間に成り立つ関係を求めよ。
9. ２直線 $x'x$ と $y'y$ とがＯで交わる。$x'x$ 上に２点ＡとＣ，$y'y$ 上に２点ＢとＤを考える。
   ① $\dfrac{\overline{OA}}{\overrightarrow{OC}}=\dfrac{\overline{OB}}{\overrightarrow{OD}} \iff \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$
   ② yy' 上えのＡとＣの正射影Ａ′，Ｃ′，xx' 上えのＢとＤの正射影をＢ′，Ｄ′とする。
   ①の関係が成り立つとき，直線ＡＢとＣＤと四辺形Ａ′Ｂ′ＣＤ，四辺形ＡＢＣ′Ｄ′について何がいえるか。
10. ∠Ａが鋭角の△ＡＢＣがある。この平面でＡＢに垂直で，ＡＢに等しい線分ＡＤを作る。（ＤとＢはＡＣの同側）それからＡＥをＡＣに垂直でＡＣに等しく（ＥとＣはＡＢに関して同側）とる。
    ① $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$ を比べよ。
    ② $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BE}$ の値を求め，ＢＥとＣＤが等しく垂直であることを導け。
    ③ ＭをＤＥの中点とする。
    $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$
    ④ $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}$ を計算せよ。ＡＭとＢＣの方向について何がいえるか。
11. 平面上又はねじれの四辺形ＡＢＣＤを考える。
    ① $\overline{AB}^2-\overline{BC}^2+\overline{CD}^2-\overline{AD}^2=2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$
    ② これよりＡＣとＤＢが直交するための必要十分条件を導け。
12. 四面体ＡＢＣＤにおいて
    ① $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$
    ② これより２組の対辺が直交すれば，第３の組も直交することを示せ。
    ③ さような四面体の高さは一点で交わることを示せ。
13. 平面ＰとこのＰ上に点Ｏ，ベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を考える。Ａ，ＢのＰ上えの正射影をＡ′，Ｂ′とする。
    ① $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'}$ であるためには $\overrightarrow{OA}$

又は$\overrightarrow{OB}$の少なくとも1つがPに属することが必要十分である。

② これより平面えの直角の正射影が直角であるための必要十分条件を求めよ。

14. 軸△，この軸上の一点Oと2ベクトル$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$を与える。A，Bの△えの正射影をA′，B′とする時，

① $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'A}\cdot\overrightarrow{B'B}=0$

② これより直角2面体が与えられた時，平面がこの直角2面体を直角に切るためには，この2面角の辺に垂直に切ることが必要十分であることを示せ。

15. 2つづつ互に垂直な半直線Ox，Oy，Ozと各々の単位ベクトル$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$を考える。yOz，zOx，xOyの2等分線をOX，OY，OZ又OX，OY，OZ上の単位ベクトルを$\vec{u}$，$\vec{v}$，$\vec{w}$とする時

① $u=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{j}+\vec{k})$，$v=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{k}+\vec{i})$，

$\vec{w}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j})$

② $\vec{u}\cdot\vec{v}$，$\vec{v}\cdot\vec{w}$，$\vec{w}\cdot\vec{u}$を計算せよ。

OX，OY，OZが2つづつなす角に対して何が導けるか？

平　面　幾　何

2課　三角形内の諸関係

(15) 定理　1°　パップスの定理

2°　三角形の2辺の平方の差

16　応　用

17　定理　2定点えの距離の平方の和が一定の点の軌跡

18　定理　〃　〃　差　〃

〃

19　直角三角形における三角比の関係

(20) 定理　余弦法則

21　cosA，sinA，tgA を辺の函数として表わすこと

22　高さを辺の函数として表わすこと

23　系　　24　定理　正弦法則

25　外接円の半径の計算

26　三角形の解法

15. 定　理

1°　パップスの定理

△MABにおいてABの中点をO，MのABえの正射影をHとする。

$\overline{MA}^2=\overrightarrow{MA}^2=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})^2$

つまり

$\overline{MA}^2=\overrightarrow{MO}^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}^2$……(1)

又

$\overline{MB}^2=\overrightarrow{MO}^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OB}+\overline{OB}^2$……(2)

(1)+(2)

$$\boxed{\overline{MA}^2+\overline{MB}^2=2\overline{OM}^2+\frac{\overline{AB}^2}{2}}$$

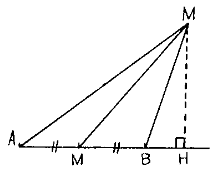
2°　(1)−(2)

$\overline{MA}^2-\overline{MB}^2=2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$

$=2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OM}$

つまり

$$\boxed{\overline{MA}^2-\overline{MB}^2=2\overline{OH}\cdot\overline{AB}}$$



20. 定理　余弦法則

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

$\overline{BC}^2=\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2$

$=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$BC=a$，$AC=b$，$\angle BAC=A$ とおくと

$$\boxed{a^2=b^2+c^2-2bc\cos A}$$

練　習　問　題

1. △ABCの3辺を a, b, c とする。
$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$軸上の単位ベクトル$\vec{i}$，$\vec{j}$とする。
$\overrightarrow{AI}=\vec{i}+\vec{j}$，$\overrightarrow{AP}=c\vec{i}+b\vec{j}$，$\overrightarrow{AQ}=b\vec{i}+c\vec{j}$
を作る。

① これらのベクトルの絶対値を a, b, c の函数として表わせ。又，これらのベクトルのうち2つづつのスカラー積を計算せよ。

② これらのベクトルの2つの角のcosを計算せよ
これは何を表わすか？

平面解析幾何

9課　直　線（任意の座標系）

10課　直　線（応用）