論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※　　　　第　　　号

氏　　　名　　李　峰

論　文　題　目

On Asymptotics of Nonlocal p-Laplacian Operators and Related Eigenvalues
（非局所的な p ラプラシアン作用素とその固有値の漸近挙動について）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
菱　田　俊　明

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
杉　本　　充

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
加　藤　　淳

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
寺　澤　祐　高

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本学位申請論文の主題は, Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ あるいは $\mathbb{R}^N$ の領域 Ω において定義された p-Laplace 作用素の分数冪に関わる諸問題の漸近解析である. $p \in (1,\infty)$ として, 非線型拡散の代表例である p-Laplacian $\Delta_p u = \mathrm{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ の研究の歴史は長く, この拡散による時間発展を記述する非線型放物型方程式およびその定常状態を司る非線型楕円型方程式が詳しく調べられてきた. 一方, $s \in (0,1)$ として, $(-\Delta)^s$ をはじめとする非負線型作用素の分数冪については, 境界条件を伴う場合であっても, resolvent を通して関数解析的に定義され, 補間空間の理論と併せて幅広い応用がある. 本論文が扱う p-Laplacian の分数冪は, Cauchy の主値積分

$$(-\Delta_p)^s u(x) = 2\,\mathrm{pv}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}}\,dy \qquad (1)$$

により定義され, 各点 x での値が関数の全域での情報によって定められる非局所性を特徴とするが, 散在していた関連研究が今世紀になって体系的となるに至り, 方程式 $(-\Delta_p)^s u = 0$ の解の正則性, 比較原理や Harnack 評価等, 近年の研究の進展は著しく, 申請者の研究もその流れの中にある. また, この作用素 (1) は変分構造を有する. 実際, 汎関数

$$E_{s,p}(u) = \int_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dx\,dy \qquad (2)$$

を (例えば $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ での附帯条件を伴う) 適当な許容集合上で最小化する関数 (minimizer) のみたす Euler-Lagrange 方程式は, $(-\Delta_p)^s u = 0$ である. したがって, この方程式の解の諸性質を汎関数に対する知見から引き出す変分解析が可能である. 以下で, 2 章から成る本論文で得られた成果のうちの主要な定理の概要とその価値を述べよう.

上記の背景のもと, 1 章では, (2) の汎関数の $p \to \infty$ での漸近挙動を考察している. 汎関数の漸近挙動は, DeGiorgi により導入された Γ-収束によって記述される. 方程式のレベルでは, $p \to \infty$ において Hölder ∞-Laplace 方程式が対応するが, 正当化を要することである. Chambolle-Lindgren-Monneau (2012) は, Lipschitz 境界をもつ有界領域 Ω において, 非同次 Dirichlet 境界条件のもとでの (2) の汎関数の minimizer $u_{s,p}$ の一意存在を十分大きい p に対して示すとともに, $p \to \infty$ において Hölder ∞-Laplace 方程式の境界値問題の粘性解に $\overline{\Omega}$ 上で一様収束することを証明した. 本論文の 1 章の主結果は, この考察を汎関数のレベルで捉えようとした試みであり, 適当な L^q 空間において (2) の汎関数 $E_{s,p}$ が汎関数 $E_{s,\infty}(u) = \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}$ に Γ-収束することをまず確立し, 次に

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

それを用いて, 汎関数 $E_{s,p}$ の minimizer $u_{s,p}$ がある $u_s \in L^q(\Omega)$ に $p \to \infty$ で L^q-強収束するという仮定のもと, u_s は汎関数 $E_{s,\infty}$ の minimizer の一つであることを示した. 証明は変分法において知られた局所化の技法による. 汎関数 $E_{s,\infty}$ の minimizer 全体からなる集合の構造と併せて, 申請者が捕えた minimizer のその集合の中での特徴付け等, 興味深い課題が残り, 本研究によって今後の展開の可能性が示唆されたと言える.

2 章では, 有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ における非線型固有値問題

$$(-\Delta_p)^s u = \lambda |u|^{p-2}u \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \tag{3}$$

の第 1 固有値 $\lambda^1_{s,p} > 0$ の $s \to s_0 \in (0,1)$ での漸近挙動が論じられている. 第 1 固有関数は対応する Rayleigh 商の minimizer であるが, (3) の弱解としての正則性 $W^{s,p}$ の観点では, 特に s が増加しながら s_0 に近づく場合が非自明である. 申請者はまず $\lim_{s \to s_0 - 0} \lambda^1_{s,p} \le \lambda^1_{s_0,p} = \lim_{s \to s_0 + 0} \lambda^1_{s,p}$ を示し, さらに左辺の極限も $\lambda^1_{s_0,p}$ に等しいための必要十分条件を導出した. Ω の境界の滑らかさの条件を一切課さないので, (3) の附帯条件にも関わる Sobolev 空間の選択において繊細な考察を要するが, p-Laplacian の第 1 固有値の p に関する漸近挙動を研究した Degiovanni-Marzocchi (2015) による関数空間の設定のアイデアを踏襲しながら, その方法に工夫を加えて非局所的な作用素 (1) へ射程をひろげたことは注目に値する.

以上のように, 本論文では, p-Laplacian の分数冪 (1) と関わる汎関数および変分固有値の p あるいは s に関する漸近挙動について, 申請者の視点で問題をたてて一定の成果をあげ, 得られた諸定理は当分野の発展に寄与している. 本論文に関する公開審査会を 2019 年 8 月 21 日に行い, 申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することを確認した.

以上により, 学位審査委員会は, 申請者には博士 (数理学) の学位が授与される資格があるものと判断する.