別紙４

報告番号	※　　　　　第　　　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目 Combinatorial properties of cluster algebras associated with marked surfaces
（点付き曲面に付随する団代数の組合せ的性質）

氏　　名 百合草　寿哉

論　文　内　容　の　要　旨

団代数は Fomin-Zelevinsky によって導入された、団変数と呼ばれる生成元を持つ可換代数である。団変数の特定の組を団と呼ぶ。団と箙 Q を固定し（初期団と初期箙）、変異と呼ばれる操作により帰納的に団代数 A_Q が定義される。団代数構造は様々な分野（箙の表現論、Poisson 幾何学、結び目理論など）に現れ応用されている。

団代数の重要なクラスとして、Fomin-Shapiro-Thurston によって導入された点付き曲面に付随する団代数が考えられる。これによって Fock-Goncharov によるタイヒミュラー空間の研究が、団代数研究に取り入れられた。具体的に、点付き曲面 S の（タグ付き）三角形分割 T から箙 Q_T が構成され、団代数 A_{Q_T} が定まる。この時、S の（タグ付き）弧 γ、三角形分割、三角形分割のフリップ（1 つの弧を取り換え、新たな三角形分割を得る操作）に対し、A_{Q_T} の団変数 x_γ、団、変異がそれぞれ対応する。当論文は A_{Q_T} に対し、主に以下の 3 つの対象を研究する。

・団変数は初期団/団変数によるローラン多項式である（ローラン現象)。このローラン多項式を明示的に与える公式を団展開公式という。Lee-Schiffler はランク 2 の団代数に対し Dyck 道を用いた団展開公式を与え、重要な予想である正値性予想を解決した。また、Palu をはじめ多くの研究者によって、団代数の圏化による Caldero-Chapoton 団展開公式を用い様々な予想（団単項式の線型独立性など）が示された。このように団展開公式を与えることは、団代数研究に多大な影響を与える。

・団変数は F 多項式と g ベクトルという 2 つの構成要素を持つ。F 多項式の最高次数を f ベクトル、団に含まれる団変数の f ベクトルの組を F 行列と呼ぶ。f ベクトルはある加群の次元ベクトルと対応するなど興味深い対象であり、F 多項式は昨年導入され、今後の発展が期待される対象である。

・団に含まれる団変数の g ベクトルによって張られるユークリッド空間内の錐を g ベクトル錐と呼び、全ての g ベクトル錐は扇（g 扇）を与える。有限型の団代数に関しては、g 扇が完備であることが知られている。

当論文は全 5 部からなる。第 1 部は論文を通して必要な基本的な定義（団代数、点付き曲面とそれに付随する団代数）を準備する。以下、三角形分割 T を固定し、A_{Q_T} に対して概要を述べる。

第 2、3 部では「角の極大独立集合」と「ポテンシャル付き箙の最小切断」という新たな 2 つの概念を導入し、それらを用いた団展開公式を与える。第 2 部は A 型の団代数（多角形に対応する A_{Q_T})、第 3 部は一般の A_{Q_T} を扱う。これは Musiker-Schiffler-Williams による蛇グラフの完全マッチングを用いた団展開公式を、より明快に改良したものである。また、角の極大独立集合はある二部グラフの完全マッチングと一対一対応がある。よって、今回与えた団展開公式の応用として、Carroll-Price によって A 型の団代数に対して与えられた団展開公式を一般化することが可能である。さらに他にも、次のような応用が与えられ、第 4、5 部で用いる。

・弧 γ に対応する団変数 x_γ の f ベクトルが、γ と T との交点数の組(交点ベクトル)と一致する

・弧 γ に対応する団変数 x_γ の g ベクトルが、γ の T に関する Shear 座標の組と一致する

第 4 部では交点ベクトルに関して研究する。三角形分割 T' の各弧には交点ベクトルが定義され、それらのベクトルの組から T' が一意に定まることを示す。さらに交点ベクトルから弧が一意に定まる必要十分条件を与える。上記 f ベクトルと交点ベクトルの対応により、これらの結果を A_{Q_T} に適用する。これにより、F 行列の一意性が常に成り立ち、f ベクトルの一意性が成り立つための必要十分条件が与えられる。

第 5 部では A_{Q_T} における g ベクトル錐が稠密であることを示す。即ち、g 扇の台の閉包がユークリッド空間全体（特定の場合には半空間）となる。証明には曲面上のラミネーション（特別な曲線の集合）とそれらの Shear 座標を用いる。鍵となる補題として、ラミネーションをデーンツイストすることによる Shear 座標の漸近的振る舞いを与える。g ベクトル錐の稠密性は以下のように、多元環の表現論に応用することが可能である。三角形分割 T から次数付き微分多元環 Γ_T が構成され、その導来圏を用い団圏と呼ばれる三角圏 $\mathcal{C}(T) \coloneqq \mathrm{per}\,\Gamma_T = D_{fd}(\Gamma_T)$ が定義できる。$\mathcal{C}(T)$ は団傾対象 Γ_T を持ち、以下の一対一対応が存在する。

$$\{\mathcal{C}(T)\ \text{の到達可能な直既約リジッド対象}\} \longleftrightarrow \{A_{Q_T}\ \text{の団変数}\}$$

$$\{\mathcal{C}(T)\ \text{の到達可能な団傾対象}\} \longleftrightarrow \{A_{Q_T}\ \text{の団}\}$$

ここで「到達可能な」とは、団傾対象 Γ_T から変異の列によって得られるという意味である。この対応は変異と互換性がある。また、$\mathcal{C}(T)$ のリジッド対象にも g ベクトルと呼ばれる不変量が存在し、上記一対一対応は g ベクトルを保存する。よって、$\mathcal{C}(T)$ における団傾対象の g ベクトル錐の稠密性が与えられる。これより、$\mathcal{C}(T)$ の任意の団傾対象が Γ_T か $\Gamma_T[1]$ から変異の列で得られることが従う。これは Qiu-Zhou が境界を持つ曲面の場合に与えた結果の一般化である。