

## 論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

氏 名 百合草 寿哉

論 文 題 目

Combinatorial properties of cluster algebras associated with marked surfaces (点付き曲面に付随する団代数の組合せ的性質)

論文審査担当者

主 査 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士  
中 西 知 樹

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (理学)  
伊 山 修

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (理学)  
石 井 亮

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学)  
糸 健 太 郎

## 論文審査の結果の要旨

団代数は今世紀初頭に Fomin と Zelevinsky によって導入された可換環であり、与えられた籐から変異と呼ばれる規則によって帰納的に定められる団変数によって生成される。団代数はリー群、籐や量子群の表現論、可積分系、双曲幾何学、ドナルドソン・トマス理論など多くの分野と関わりを持ち、様々な数学に現れる代数的組み合わせ論的な普遍的構造を抽出したものであり、またルート系のある種の変形ともとらえることができる。団代数の重要なクラスとして Fomin-Shapiro-Thurston が導入した、向きづけられた点付き曲面の三角形分割に対して、自然な方法で描かれる籐から定まる団代数（以下、簡単に曲面団代数と呼ぶ）があり、タイヒミュラー理論や双曲幾何学に応用されている。

百合草氏の学位申請論文は、曲面団代数の諸性質を調べるものである。論文は5部構成であり、1部は準備だが、それ以降は1つの部が1つの公表論文に対応している。

### ● 第2部と第3部の内容

団変数は帰納的に定義されるため、その全体を理解することは容易ではないのだが、団変数を何らかの方法で直接的に明示する団展開公式がいくつか知られており、団代数の研究で重要な役割を果たしている。曲面団代数では、団変数が曲面上の弧と一対一に対応し、団は三角形分割と対応する。Musiker-Schiffler-Williams は、曲面上の弧から特別なグラフ（蛇グラフ）を構成し、対応する団変数を蛇グラフの完全マッチングによって記述する団展開公式を与えた。百合草氏はこの公式を応用して、三角形分割に対して「角の極大独立集合（＝角の完全マッチング）」の概念を導入し、それを用いた新しい団展開公式を与えた。これは三角形分割の言葉で直接記述されているため、蛇グラフによる公式を大幅に改良したものであり、曲面団代数における基本的かつ重要な結果と位置付けられる。第2部でA型の場合、第3部で一般の場合を扱っており、それぞれ *Algebr. Represent. Theory* 誌と *Electron. J. Combin* 誌から出版されている。

### ● 第4部の内容

これは行田康晃氏との共同研究であり、arXiv で公表されている。団代数においては、各団変数に対して定まる整数ベクトルが重要な数値的不変量となる。 $g$  ベクトル、 $c$  ベクトル、 $d$  ベクトルなどがその例である。最近、藤原-行田によって団変数の  $f$  ベクトルと、それを並べた団の  $F$  行列が導入され、体系的に研究された。特に、 $F$  行列によって団が一意的に決定されるという予想が与えられた。百合草氏は、第3部で、曲面団代数に対して  $f$  ベクトルが曲面上の弧の交点数と一致することを示した。この応用として第4部で、曲面団代数においては  $F$  行列によって団が一意的に決定されることを示した。また、一般には  $f$  ベクトルからは団変数が一意的には定まらない。そこで、そのための必要十分条件を三角形分割に関する簡潔な条件で与え、さらに、そのような三角形分割が存在する点付き曲面を、境界の有無と点の個数で完全に特徴付けた。

### ● 第5部の内容

ランク  $n$  の団代数に対して、団の  $G$  行列から  $\mathbb{R}^n$  内の錐が定まり、その全体は扇の構造を持つことが知られている。百合草氏は第5部で、曲面団代数の場合にこの扇が  $\mathbb{R}^n$  で稠密であることを示した。この結果を団代数の圏化と結びつけることにより、点付き曲面から定まるポテンシャル付き籐のヤコビ代数に対して、傾理論から定まる実 Grothendieck 群内の扇が稠密であることが直ちに導かれる。証明は、W.Thurston, Fomin-D.Thurston による、曲面上のラミネーションと  $\mathbb{Z}^n$  の間の全単射に基づいたものであり、弧のデーンツイストの繰り返しによって閉曲線が近似されることを、 $g$  ベクトルのレベルで正当化する部分に申請者の工夫が現れている。第5部の内容も arXiv で公表されている。

## 論文審査の結果の要旨

以上の諸結果には、団代数に関する代数的な性質と、点付き曲面に関する幾何的性質の間の対応を追求する、百合草氏の研究方針がはっきりと現れている。これらは団代数の研究において様々な新しい知見を与えるものであり、学位論文として十分な内容を持つものである。2019年8月6日に行われた学位審査セミナーも、百合草氏の結果が非専門家にもよく伝わるように工夫されたものであり、質問に対する応答も的確なものであった。以上によって、学位審査委員会は学位を授与するべきであると判断する。