

# 電磁場の形状最適化理論と 電子デバイス設計への応用

佐竹 正義



# 電磁場の形状最適化理論と 電子デバイス設計への応用

佐竹 正義

博士論文  
名古屋大学 情報科学研究科

2019年7月



# 目次

第 1 章	序論	9
1.1	電磁気分野の発展	10
1.2	電気・電子機器の設計	12
1.3	電磁気分野での形状最適化の応用	13
1.4	本論文の目的	15
第 2 章	電磁場の支配方程式	17
2.1	微分形の Maxwell 方程式	17
2.2	静電場における Maxwell 方程式	18
2.3	周波数応答における Maxwell 方程式	20
第 3 章	静電場における形状最適化問題	25
3.1	はじめに	25
3.2	初期領域と領域写像の集合	26
3.3	状態決定問題	28
3.4	形状最適化問題	30
3.5	評価関数の形状微分	30
3.6	$H^1$ 勾配法	33
3.7	形状最適化問題の解法	34
3.8	解析例	36
3.9	まとめ	46
第 4 章	電磁場の周波数応答における形状最適化問題	47
4.1	はじめに	47
4.2	初期領域と領域写像の集合	49
4.3	状態決定問題	50

---

4.4	導波管カットオフフィルタの形状最適化問題 . . . . .	51
4.5	評価関数の形状微分 . . . . .	52
4.6	最適化問題の解法 . . . . .	54
4.7	解析例 . . . . .	54
4.8	まとめ . . . . .	58
第5章 結論		59
記号表		62
付録 A 付録		67
A.1	外積の公式 . . . . .	67
A.2	形状微分に関する公式 . . . . .	69

## 目次

1.1	車載の電気・電子機器製品の推移 [27]	11
3.1	GND 電位基準での静電容量タッチセンサの等価回路モデル	26
3.2	静電場問題における初期領域 $\Omega_0 = D_0 \setminus (\bar{E}_0 \cup \bar{G}_0)$	27
3.3	形状最適化問題の解法フロー	35
3.4	例 1a: 平行な電極と検出対象における 2 次元静電場問題	37
3.5	例 1a: 形状比較	37
3.6	例 1a: 形状更新に対する評価関数の推移	38
3.7	例 1a: 形状更新に対する検出容量値の変化と初期形状に対する検知容量の向上率	38
3.8	例 1b: 平行な電極と検出対象における 2 次元静電場問題	39
3.9	例 1b: 形状比較	39
3.10	例 1b: 形状更新に対する評価関数の推移	40
3.11	例 1b: 形状更新に対する検出容量値の変化と初期形状に対する検知容量の向上率	40
3.12	例 2a: 凸型接地電極における 2 次元静電場問題	41
3.13	例 2a: 形状比較	41
3.14	例 2a: 形状更新に対する評価関数の推移	42
3.15	例 2a: 形状更新に対する検出容量値の変化と初期形状に対する検知容量の向上率	42
3.16	例 2b: 凸型接地電極における 2 次元静電場問題	43
3.17	例 2b: 形状比較	43
3.18	例 2b: 形状更新に対する評価関数の推移	44
3.19	例 2b: 形状更新に対する検出容量値の変化と初期形状に対する検知容量の向上率	44

---

3.20 例 2b: 初期形状と最適化後の電位分布 [V] . . . . .	45
4.1 導波管ハイパスフィルタの概要 . . . . .	48
4.2 円筒型導波管カットオフフィルタモデル . . . . .	49
4.3 例: 円筒導波管ハイパスフィルタの問題設定 . . . . .	54
4.4 最適化前後の導波管形状の比較 (単位: mm) . . . . .	55
4.5 形状更新に対する評価関数の推移 . . . . .	55
4.6 最適化によるフィルタ特性 $s_{11}$ の変化 . . . . .	56
4.7 50.2GHz 入力時の電界強度分布 [dBV/m] . . . . .	56
4.8 式 (4.7.1) を用いた経験的設計による形状 . . . . .	57
4.9 最適化で得た形状と経験的設計の $s_{11}$ 特性の比較 . . . . .	57



# 第 1 章

## 序論

「設計」とは、学术界や産業界といった様々な分野で研究・創出される多様な知識・技術を、この社会に実際の「モノ」として形づくることであると著者は考える。

産業界で設計を担う設計者の役割は、前述の知識・技術を社会で利用可能な「製品」として生み出すことで、経済活動を通じ、利便や発展に貢献することである。当然ながらそれらの知識や技術を最大限に活用し、かつ限られたコストの制約を満たしつつ、製品の機能や性能を最大限に発揮する設計の実現が、設計者の腕の見せ所となる。設計者は新しい設計をしては検証を行い、問題の洗い出しを繰り返すことで、より良い設計を目指している。

しかし、近年になり多くの産業で開発サイクルの短縮が行われている。例えば自動車業界においては、1980年代は新車開発に3~4年を要していたが、近年では1~2年で新車開発を完了することも珍しくない。当然ながら設計にかけることができる時間も大きく減少している。さらには、IoTや自動運転、MEMS技術など、これまでの製品とは異なり、様々な分野間のコラボレーションによって生み出される製品も増えている。このような、例えば電気特性と機械特性を組み合わせたMEMSのような製品では、設計者は機械的制約に加え電氣的制約も含めた膨大な制約を同時に満たす設計をしなくてはならず、製品設計の難易度も増している。著者も業務において、自動車系の各種センサの設計開発に従事した経験を持っている。しかし、要求される限られた開発期間、および製品に課せられる膨大な制約の中において、所望の製品を設計することは非常に困難であることを痛感した。特に、センサ電極パターンの設計などは、パターンの形状が性能に直接性能を及ぼすため、製品設計はより難解である。

このような経験から、著者は電子機器のより良い設計を実現するための技術として形状最適化に着目した。本論文では、2種類の電子デバイスを具体的に選び、形状最適

化問題を構成し、その解法を提示することを目的とする。

本章の以降は、電子機器の発展と設計の歴史、および電磁気分野での形状最適化応用について述べることで、本研究の目的を明確化する。

## 1.1 電磁気分野の発展

近代における電気・電子技術の歴史 [34] は、16世紀頃の William Gilbert の時代から始まったといえよう。彼は電気を計測する検電器の発明や磁石・磁気の研究など電気技術の先駆けとなる業績を残した。

17～18世紀においては主に静電気(静電場)に関する研究がなされた。Stephen Gray による導体と不導体の発見と、Pieter van Musschenbroek による電気を蓄えるライデン瓶の発明は、初期の電磁気学の進展に重要な役割を果たした。また、John Canton による静電誘導の発見、Henry Cavendish と Charles-Augustin de Coulomb の業績とされるクーロンの法則の発見もこの時期である。そして18世紀末に Luigi Galvani により発見された動物電気から、Alessandro Volta は世界で最初の電池(ボルダ電堆, ボルタ電池 [36])を発明した。これにより、ライデン瓶などの静電気放電的な瞬間放電と比べ、持続的に電流を発生することが可能となった。この電池の発明より、電気技術は静電気の研究から動電気の研究へと移行していく。

19世紀に入ってから、様々な電気技術の開発が進んでいく。例えば、Michael Faraday による電磁誘導の法則の発見は、後の変圧器、発電機、電動機(モーター)へと応用された。発電機の登場により家庭への電力供給が始まり、電気が一般の人にも身近なものとなっていった。この電力送電にあたって、フィラメント電球の商用化で有名な Thomas Alva Edison が提唱した直流電流による送電と、Nikola Tesla らが採用した交流電流による送電とで熾烈な電流戦争を繰り広げたことは有名である。また、Morse らによる電信技術の研究開発を通じ、Alexander Graham Bell らにより電話が発明された。これにより、電気による通信の応用が一般に普及していくこととなる。この時代は他にも、電気溶接技術やブラウン管、電気鉄道など今日でも基盤となる技術が確立されていった [9]。また電磁気学の研究においては、André-Marie Ampère によるアンペールの法則、Georg Simon Ohm によるオームの法則、先にも挙げた Michael Faraday によるファラデーの電磁誘導の法則、そして James Clerk Maxwell によりマクスウェル方程式 [25] が定式化されたのもこの頃である。特にマクスウェル方程式は、これまでの電磁気学の知見をまとめ、電磁場の振る舞いを「数学的形式」で整理した。

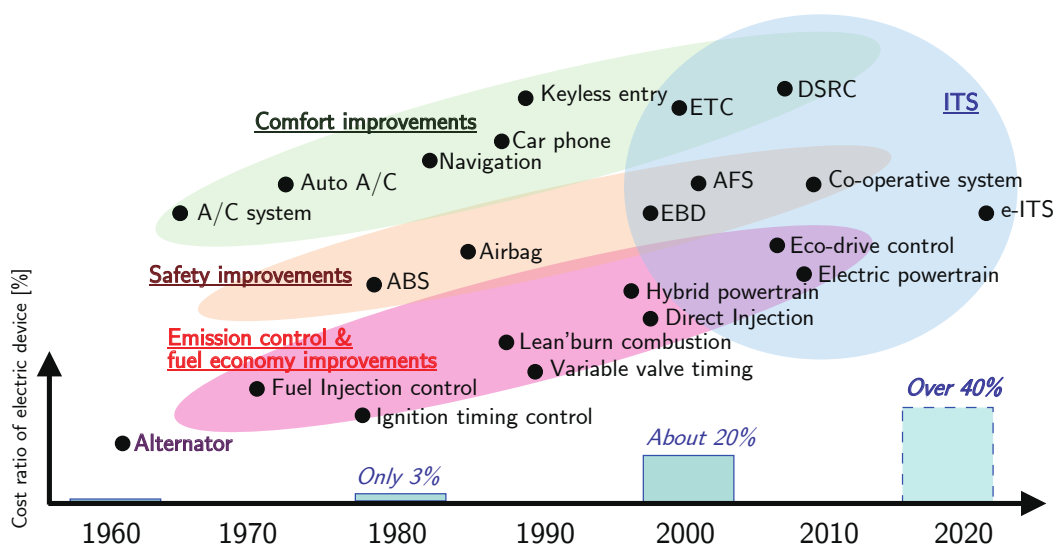


図 1.1: 車載の電気・電子機器製品の推移 [27]

この Maxwell の業績は、後の電気・電子技術の発展、および電気・電子機器の設計技術に大きく寄与していくことになる。

20 世紀に入り、ついに電子技術 (エレクトロニクス) 時代が幕を開ける。Lee De Forest が三極真空管を発明したことにより、検波、増幅、発振といった能動素子・回路を生み出すことが可能となった。これによりラジオやテレビといった無線放送が実現し、1946 年には世界初のコンピュータである ENIAC [8] がアメリカで開発される。またその後、ベル研究所の John Bardeen らによって半導体を用いたトランジスタが発明されたことで、真空管による電子機器と比べ安価・小型に実現出来るようになり、急速に電子機器が社会に普及していくことになる。現在では半導体技術を用いたマイクロプロセッサなどの登場により、真空管で構成された ENIAC と比べ、圧倒的に小型省電力でありながら、膨大な計算能力を有するコンピュータが実現している。

今日においては、電気・電子機器は社会に溢れており、また欠かせないものとなっている。著者が携わる自動車産業においても、車両に搭載される電気・電子機器製品は 1960 年当初はオルタネータ (発電機) 程度であったが、近年では自動車コストの 40% 以上を占めるほどの数が用いられるようになった [27]。このように製品数が増加し、加えて車両開発期間の短縮により設計に求められる要求も変化している。次節では電気・電子機器の設計の歴史を述べる。

## 1.2 電気・電子機器の設計

産業において目的とする機能・性能を高めることは製品の価値を高めることと同義であり、より良い『設計』を成し得ることが設計者の役割といえよう。例えば電子製品のセンサ機器であれば、所望の検出感度などが該当する。他にも製品によっては、コストや材料使用量が性能の指標となることもある。この「機能・性能」が産業における製品の差別化要素となり、これを高めることで商品の市場競争力向上や社会への貢献を増加させることに繋がる。しかし、実際の製品設計においては、1つの機能・性能を単に最大にすれば良いというものではない。工学的な製品においては、目的とする機能・性能以外にも様々な制約が存在しており、それらの制約を満たしつつ、機能・性能を高めることが必要となる。このために設計者は、自身の設計の善し悪しを何らかの方法で判断し、より最適な設計に更新したいと考える。

初期の電気・電子機器の設計においては、設計したモノ(製品)の善し悪しを製造前に検討するには、人力の計算(紙とペンと計算尺)を用いるしか無かった。当然ながら人力には限界があり、高精度な設計の検討はできず、結果として量産前に多数の試作品を作り、現物にて設計の妥当性や問題の有無を検証していた。しかしこの方法では試作に費やす時間・コストも多大となるため、納期や予算によっては、設計者が満足いく設計が得られないこともあった。このような状況は当時の他の産業でも同様であった。

その後1950年代に入ると、人力と比べ圧倒的な計算能力を持つコンピュータの登場により、数値解析の可能性が見出された。これより設計者は、コンピュータによる数値解析(シミュレーション)を、試作前の設計検討に活用するようになっていく。

初期の製品設計へのコンピュータシミュレーション応用は、電磁気分野ではなく構造分野から始まった。Turnerら[35]は数値解析手法として有限要素法[12][11]を用い、産業応用の道を開いた。有限要素法は偏微分方程式の境界値問題に対し、有限要素上の基底関数(形状関数)の線形結合により近似関数を構成し、それらを問題の弱形式に代入をすることで未定乗数を決定する方法である。これにより製品の構造や形状、境界条件など含めた数理モデルを構築すれば、有限要素法で離散化し、コンピュータで数値解を得ることが可能となった。

電磁気分野への最初の応用は構造分野から遅れ、1970年頃からと比較的最近であるとされる[10]。文献[18]では、「電磁場応用に時間を要した背景として、電磁場問題に対する適切な数学的定式化に手間取ったこと、及びそれにふさわしい有限要素法の開発にも工夫が必要であったこと」にあると考察している。1980年代当時の電磁場シミュ

レーションの研究文献を調査すると、電磁場問題に対する近似関数の選び方や有限要素メッシュの扱いが不十分であったことが伺える。例えば、それらの不十分な扱いの影響で生じる、スプリアス解 (本来の問題では生じない解であるが、定式化やメッシュの不備で生じてしまう誤った解) への対策・原因解明に時間が割かれていた [28] [22]。1980 年代末以降においては、電磁波問題に対応した定式化や有限要素法の実装法が開発されたことで、産業界での応用が加速していった。

このようなコンピュータシミュレーションの活用により、近代の設計のあり方は変化してきた。従来は研究開発を通じて得たアイデアに基づいて設計を行い、主に試作評価によって設計の問題点を検討し、改善が行われてきた。これに対して、近年は試作評価の一部をコンピュータシミュレーションで代替することにより、短期間かつ低コストに設計の検証が可能となった。このような製品設計の概念は後に CAE (Computer Aided Engineering) と呼ばれることになる [23]。

CAE の登場により、試作前段階で設計の善し悪しを検討することが可能となった。しかし、製品によっては設計候補が多数となり、その中から最良の設計を選ぶには設計検証を数多く実施しなくてはならず、CAE をもってしても時間がかかるようになってきた。例えば、自動車などで多く用いられる静電式センサスイッチは、その電極の形状と周囲の環境により性能が複雑に変化することが知られている。しかし、電極形状の設計は非常に自由度が高いため、考えられる設計候補の数は膨大となる。設計期間が限られる場合は全ての設計候補を検証することは困難なこともあるし、また設計候補の中に必ずしも最適な設計が含まれる保証はない。

そこで設計者は CAE に続き、最適な設計を技術者の勘に頼らずに実現する手法を望んだ。その手法として、最適化技術、特に形状設計において有効な形状最適化に注目が集まるようになってきた。次節では電磁気分野における形状最適化の応用を述べる。

### 1.3 電磁気分野での形状最適化の応用

形状最適化技術の設計応用についても、やはり構造分野から始まり、1960 年頃から多数の研究がなされている (例えば [32])。これらの研究では、形状を表現する寸法を設計変数として扱い、目的関数を最小化 (または最大化) する最適化手法である。本論文ではこれを「パラメトリック最適化」と呼ぶこととする。この方法は、製品のおおよその形状構成が定まっている場合において、非常に強力な設計手法となった。また近年では多くの商用 CAE ソフトがパラメトリック最適化をサポートし始めており、利用

の敷居も下がってきている。

1980年以降、設計変数をパラメータとしてでなく、形状の境界移動(例えば [39], [1]) やトポロジー(例えば [7]) として捉える手法が出現する。これらの手法は、形状を関数(形状関数や材料密度関数など)として扱う事が特徴であり、関数を設計変数として更新することで、形状全体を変更することが可能となった。これにより、パラメータ選択で形状が許容される箇所が決まるパラメトリック最適化と比べ、より自由度の高い最適化が可能となった。本論文ではこれらを「ノンパラメトリック最適化」と呼ぶ。2000年代からは商用アプリケーションにおいても、パラメトリック最適化だけでなくノンパラメトリック最適化もサポートするもの(例えば Altair 社 HyperWorks など)が登場しており、今後応用が進むことが期待される。

次に電磁気分野での形状最適化の先行研究について述べていこう。電磁気分野においても、初期の最適化利用はパラメトリック最適化から始まっている。例えば、静電容量センサの電極サイズの最適化に対する試みが1991年に Voorthuyzen らによってなされている [37]。Voorthuyzen らは二つの電極のサイズの比を設計変数として選択し、目的関数にセンサ感度(信号対雑音比)を用いることでパラメトリック最適化を行った。これにより、センサ電極サイズの最適比を導出している。また電動機(モーター)のコア形状の最適化に関する取り組みが Yoon らによって行われた [38]。設計変数としてコアの寸法を扱い、目的関数には所望の磁束密度と現形状の磁束密度との誤差ノルムを用いた。これにより所望の特性を備えたコア形状を得ている。パラメトリック最適化については他にも文献 [13] や文献 [15] など多くの研究が今日までに成されている。

ノンパラメトリック最適化の例としては、Kiziltas らがパッチアンテナのエレメント形状の最適化を試行している [21]。設計変数にエレメント設計領域における材料密度を扱い、目的関数としてアンテナのSパラメータ  $S_{11}$ (リターンロス特性)を用いた。これにより、初期形状に対しアンテナの受信帯域を拡大するといった有用な知見を得ている。また Kim らは、コンデンサ容量の向上を目的とした誘電体形状の最適化を研究した [19]。この研究では、設計変数として誘電体の境界を定めるレベルセット関数を用い、コンデンサー内部区間の静電エネルギーを目的関数として最適化を行い、最適な誘電体配置形状を導出している。

このように、電磁気分野に関するノンパラメトリック最適化の研究は主に2000年代以降と近年になってからであり、他の構造や流体分野と比べまだ知見が少ない。今後、電気・電子機器産業における設計において最適化技術を活用するためには、より多くの研究知見が必要となると著者は考える。

また、著者の所属する研究室では、境界や領域の変動に対するノンパラメトリック形状最適化問題に対し、数値不安定現象を回避して問題を解くための  $H^1$  勾配法が開発されている [3]. これまでに、構造や流体分野では数値不安定現象を生じさせず、滑らかな形状が得られることが明らかにされてきているが、電磁場領域に対しては未だに試行がされていない。

## 1.4 本論文の目的

以上の背景より、著者が目指すより良い電気・電子機器製品の設計を、形状最適化技術で実現するには下記課題が存在すると考える。

- (i) 電気・電子機器の設計期間は年々短縮される傾向であり、最適な設計を短時間で導出しなければならない。
- (ii) 電磁場領域の形状最適化においては、パラメトリック最適化については研究が進んでいるが、ノンパラメトリック最適化についての研究は少ない。
- (iii) 形状最適化問題に対する一解法として  $H^1$  勾配法が提案され、形状の滑らかさを担保できることが構造・流体分野などで示されているが、電磁場分野での試行は未だなされていない。

(ii) については、電気・電子機器の設計にあたっての性能要求をどのように評価関数で定義し、最適化問題を構築するかについて知見が少ないことを意味する。構造・流体分野の産業では形状最適化に関して多くの事例が報告され、応用に関する知見も増加している。電磁気分野においても最適化の事例を示すことが工学的な応用において重要であると考ええる。

(iii) については、評価関数の形状微分を  $H^1$  勾配法で解く手法が、構造や流体分野だけでなく電磁場分野でも数値不安定現象を生じさせないことを明らかにできれば、形状最適化問題における解法の選択肢を示す意義があると考ええる。

また (i) については上記 (ii), (iii) を解決し、コンピュータシミュレーションを可能とすることで、短時間での最適化設計が実現出来ると考える。

そこで本論文では電気・電子機器の事例に対し、設計目標に対応した評価関数を用いた電磁場領域におけるノンパラメトリック形状最適化問題を数理的に定式化し、コンピュータシミュレーションに実装しその解法を示すことを目的とする。具体的には以下の項目について本論文内で示していく。

- (1) 電子機器の設計指標を考慮した最適化問題を解法可能な評価関数の提示
- (2) 形状最適化問題の定式化とその形状微分の導出
- (3) 数値計算例による有効性の確認

本論文の構成は次の通りである。まず第2章にて、本論文で扱う電磁場領域の支配方程式について整理する。第3章では電子機器の一例として、静電タッチセンサの検出感度向上を狙った検出電極形状の最適化問題を構築する。ここでは検出電極領域を設計変数として扱い、目的関数に検出対象の有無による電位ポテンシャルの誤差ノルムを、制約関数に検出電極の体積制約を設ける。次に最適化問題の形状微分を導出し、シミュレーションソフト COMSOL Multiphysics を用い  $H^1$  勾配法によりその数値計算例を示す。また設計領域に拘束条件を設けることで設計不可能解を回避することも試行する。続く第4章では導波管カットオフフィルタの遮断特性向上を狙った形状最適化の解法を示す。導波管壁の内部領域を設計変数とし、入力ポートにおけるエネルギー消費量を目的関数とした最適化問題を定義する。そしてその形状微分を導出し、数値計算例を示す。最後に第5章にて本論文のまとめを述べる。



## 第 2 章

# 電磁場の支配方程式

本章では、次章以降で述べる電磁場領域の形状最適化理論の構築において必要となる電磁場の支配方程式について述べる。

電磁場の支配方程式は Maxwell 方程式 [25] で構成される。Maxwell 方程式を解くことにより電磁場の振る舞いを解くことが可能であるが、一般的には仮定する条件を設けることでより簡易に解くことが可能となる。以降は本論文で扱う静電場問題、電磁場の周波数応答問題について詳細に述べる。

### 2.1 微分形の Maxwell 方程式

電磁場は時間と空間上で構成される。そこで、時間を  $t \in \mathbb{R}$ 、空間座標を  $\boldsymbol{x} = (x_i)_i \in \mathbb{R}^d$  と表すことにする。このとき、 $\mathbb{R}^{d+1}$  上で Maxwell 方程式

$$\nabla \times \boldsymbol{e}(t) + \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t}(t) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}, \quad (2.1.1)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{h}(t) - \frac{\partial \boldsymbol{d}}{\partial t}(t) = \boldsymbol{i}(t), \quad (2.1.2)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{d}(t) = \rho(t), \quad (2.1.3)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{b}(t) = 0 \quad (2.1.4)$$

が成り立つと仮定する。ここで、 $\boldsymbol{e} : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ 、 $\boldsymbol{d} : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ 、 $\boldsymbol{h} : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ 、 $\boldsymbol{b} : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$  をそれぞれ、電場 (電界) の強度 [V/m]、電束密度 [C/m<sup>2</sup>]、磁場 (磁界) の強度 [A/m]、磁束密度 [Wb/m<sup>2</sup>] を表す。また、 $\boldsymbol{i} : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$  と  $\rho : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$  はそれぞれ電流密度 [A/m<sup>2</sup>]、電荷密度 [C/m<sup>3</sup>] である。本来、 $(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{d+1}$  に対して  $\boldsymbol{e}(t, \boldsymbol{x})$  のように書くべきであるが、 $\boldsymbol{e}(t)$  のように  $\boldsymbol{x}$  を省略して書くことにする。また、時間の微分作用素を  $\partial/\partial t$  で、空間の微分作用素を  $\nabla$  で表す。式 (2.1.1) は電磁誘

導 (磁場の時間変化が存在するところには電場が生じる現象) を表す Faraday-Maxwell の式, 式 (2.1.2) は電場の時間変化 (変位電流) と電流によって磁場が生じる現象を表す Ampère-Maxwell の式とよばれる. また, 式 (2.1.3) と式 (2.1.4) はそれぞれ電場の源が電荷であることを表す電場に対する Gauss の法則と磁場には源がないことを表す磁場に対する Gauss の法則を表す.

また, 式 (2.1.2) と式 (2.1.3) より

$$\nabla \cdot \mathbf{i}(t) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}(t) \quad (2.1.5)$$

を得る. ただし, 恒等式  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}(t)) = 0$  を用いた. 式 (2.1.5) は電荷の総量が不変であることを表す電気量保存則 (連続の方程式) とよばれる.

## 2.2 静電場における Maxwell 方程式

電磁場と電荷密度および電流密度が時間の関数ではないとき, すなわち  $\mathbf{e}, \mathbf{d}, \mathbf{h}, \mathbf{b}$  および  $\rho, \mathbf{i}$  のとき, Maxwell 方程式の式 (2.1.1) から式 (2.1.5) はそれぞれ

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = \rho, \quad (2.2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}, \quad (2.2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (2.2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{i}, \quad (2.2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{i} = 0 \quad (2.2.5)$$

となる. このとき, 電場の方程式 (式 (2.2.1) と式 (2.2.2)) と磁場の方程式 (式 (2.2.3), 式 (2.2.4) と式 (2.2.5)) はそれぞれ独立になる.

### 2.2.1 静電場の構成方程式

原子に比べ十分大きい媒質中において, 時間により電場・磁場が変動しない範囲においては, Maxwell 方程式に現れる物理量である誘電率  $\varepsilon$  および透磁率  $\mu$  の間に

$$\mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{e}, \quad (2.2.6)$$

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{h} \quad (2.2.7)$$

が成り立つとみなされる. 式 (2.2.6) は電場の構成方程式, 式 (2.2.7) は磁場の構成方程式とよばれる.

### 2.2.2 静電場のポアソン方程式

ここで,  $u$  を

$$\mathbf{e}(u) = -\nabla u \quad (2.2.8)$$

が成り立つような電位ポテンシャルであるとおけば, 電場の方程式 (式 (2.2.1) および式 (2.2.2)) は, 式 (2.2.6) が成り立つ下で

$$-\Delta u = \nabla \cdot \mathbf{e}(u) = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (2.2.9)$$

と書くことができる. このように電場が時間的変化を伴わない場を静電場とよび, 式 (2.2.9) を静電場におけるポアソン方程式という.

また, 一定電圧を印加したコンデンサのような場合には, 電荷密度  $\rho$  を 0 とみなしても, 実用上支障がないことが知られている. その場合には,

$$-\Delta u = \nabla \cdot \mathbf{e}(u) = 0 \quad (2.2.10)$$

となる. 式 (2.2.10) は静電場におけるラプラス方程式とよばれる.

### 2.2.3 静電場の境界条件

静電タッチセンサやコンデンサなどを想定した電磁場を対象とした状態決定問題を構成するため, 静電場問題で主に用いられる境界条件を下にまとめる.

- (1) 電位境界条件 (Dirichlet 条件) を

$$u = \alpha \quad (2.2.11)$$

で与える. ここで  $\alpha$  は任意のスカラーポテンシャルである. 特に,  $\alpha = 0$  の場合は, 接地条件として使われる.

- (2) 電場連続境界条件 (Neumann 条件) を

$$\partial_\nu u = 0 \quad (2.2.12)$$

で与える. この条件はその境界上において電場  $\mathbf{e}$  が連続であることを意味し, 有界領域上で定義された解析領域の外部との境界条件に用いられる.

## 2.3 周波数応答における Maxwell 方程式

導波管やアンテナ等を想定した電磁場は、周波数応答現象とみなされる。そこで、式 (2.1.1) から式 (2.1.5) を Fourier 変換し、 $\mathbf{e}(t)$ ,  $\mathbf{d}(t)$ ,  $\mathbf{h}(t)$ ,  $\mathbf{b}(t)$  および  $\mathbf{i}(t)$  の Fourier 変換を、同じ記号を用いて  $\mathbf{e}(\omega)$ ,  $\mathbf{d}(\omega)$ ,  $\mathbf{h}(\omega)$ ,  $\mathbf{b}(\omega)$  および  $\mathbf{i}(\omega)$  のように表すことにする。このとき、式 (2.1.1) から式 (2.1.5) はそれぞれ

$$\nabla \times \mathbf{e}(\omega) = -j\omega \mathbf{b}(\omega), \quad (2.3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{h}(\omega) = j\omega \mathbf{d}(\omega) + \mathbf{i}(\omega), \quad (2.3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{d}(\omega) = \rho(\omega), \quad (2.3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b}(\omega) = 0, \quad (2.3.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{i}(\omega) = -j\omega \rho(\omega) \quad (2.3.5)$$

のようにおきかえられる。ここで、 $j$  は虚数単位、 $\omega \in \mathbb{R}$  は角周波数 [rad/s] を表す。 $\omega$  は周波数  $f$  [Hz] を用いて  $2\pi f$  で与えられる。

### 2.3.1 電磁波の構成方程式

原子に比べ十分大きい媒質中で、通常使われる電磁波の周波数と強度においては、Maxwell 方程式に現れる物理量の間には

$$\mathbf{d}(\omega) = \epsilon \mathbf{e}(\omega), \quad (2.3.6)$$

$$\mathbf{b}(\omega) = \mu \mathbf{h}(\omega), \quad (2.3.7)$$

$$\mathbf{i}(\omega) = \sigma \mathbf{e}(\omega) \quad (2.3.8)$$

が成り立つとみなされる。ここで、 $\epsilon$ ,  $\mu$  および  $\sigma$  はそれぞれ媒質中の誘電率 [F/m], 透磁率 [H/m], 導電率 [S/m] とよばれる定数である。式 (2.3.6) は電場の構成方程式、式 (2.3.7) は磁場の構成方程式、式 (2.3.8) は Ohm の法則とよばれる。これらの方程式は構成方程式とよばれる。

### 2.3.2 電磁場の波動方程式

磁場の構成方程式 (式 (2.3.7)) を式 (2.3.1) に代入し、さらに式 (2.3.2) と式 (2.3.6) を用いると、電場  $\mathbf{e}$  の波動方程式

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{e}(\omega) \right) - \omega^2 \epsilon \mathbf{e}(\omega) = -j\omega \mathbf{i}(\omega) \quad (2.3.9)$$

を得る. 同様に, 電場  $\mathbf{e}$  を消去すれば, 磁場  $\mathbf{h}$  の波動方程式

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{h}(\omega) \right) - \omega^2 \mu \mathbf{h}(\omega) = \nabla \times \left( \frac{1}{\epsilon} \mathbf{i}(\omega) \right) \quad (2.3.10)$$

を得る. これらの方程式は, 電場  $\mathbf{e}(\omega)$  あるいは磁場  $\mathbf{h}(\omega)$  のいずれかを求めれば他方も Maxwell 方程式により決定されることから, 電磁場の波動方程式とよばれる. これ以降では, 電場  $\mathbf{e}(\omega)$  の波動方程式 (式 (2.3.9)) のみに着目することにする.

また, 電磁場の解析においては, 媒質の透磁率  $\mu$  と誘電率  $\epsilon$  の代わりに, 真空の透磁率  $\mu_0$  と誘電率  $\epsilon_0$  を用いて無次元化された媒質の比透磁率  $\mu_R = \mu/\mu_0$  と比誘電率  $\epsilon_R = \epsilon/\epsilon_0$  が用いられる. また, 角周波数  $\omega$  は, 真空における光の速度  $c_0$  [m/s] を用いて,  $k_0 = \omega/c_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$  [m] におきかえられる. このとき, 式 (2.3.9) は

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu_R} \nabla \times \mathbf{e}(\omega) \right) - k_0^2 \epsilon_R \mathbf{e}(\omega) = -jk_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \mathbf{i}(\omega) \quad (2.3.11)$$

となる. さらに, 式 (2.3.8) を用いて電流密度  $\mathbf{i}(\omega)$  を消去すれば

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu_R} \nabla \times \mathbf{e}(\omega) \right) - k_0^2 \left( \epsilon_R - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon_0} \right) \mathbf{e}(\omega) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad (2.3.12)$$

と書ける.

### 2.3.3 電磁場の境界条件

導波管やアンテナを想定した電磁場を対象にした状態決定問題を構成するために, 電場  $\mathbf{e}(\omega)$  の波動方程式から導かれる境界条件についてまとめておく.

ある有界領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  が与えられたとする. 電場  $\mathbf{e}(\omega)$  の波動方程式 (式 (2.3.12)) と任意の随伴電場  $\bar{\mathbf{e}}: \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$  の内積をとり,  $\Omega$  上で積分すれば,

$$\int_{\Omega} \left\{ \nabla \times \left( \frac{1}{\mu_R} \nabla \times \mathbf{e}(\omega) \right) - k_0^2 \left( \epsilon_R - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon_0} \right) \mathbf{e}(\omega) \right\} \cdot \bar{\mathbf{e}}(\omega) \, dx = 0 \quad (2.3.13)$$

となる. ここで, 式 (2.3.13) の左辺被積分項の第 1 項に式 (A.1.8) の公式を適用すれば,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_R} \left[ \int_{\partial\Omega} \{ (\nabla \times \mathbf{e}(\omega)) \times \bar{\mathbf{e}}(\omega) \} \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\gamma - \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{e}(\omega)) \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{e}}(\omega)) \, dx \right] \\ & - k_0^2 \left( \epsilon_R - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon_0} \right) \int_{\Omega} \mathbf{e}(\omega) \cdot \bar{\mathbf{e}}(\omega) \, dx = 0 \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

と書くことができる. 式 (2.3.14) の左辺の  $\partial\Omega$  上の積分は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_{\mathbb{R}}} \int_{\partial\Omega} \{(\nabla \times \mathbf{e}(\omega)) \times \bar{\mathbf{e}}(\omega)\} \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\gamma &= \frac{1}{\mu_{\mathbb{R}}} \int_{\partial\Omega} \{\boldsymbol{\nu} \times (\nabla \times \mathbf{e}(\omega))\} \cdot \bar{\mathbf{e}}(\omega) \, d\gamma \\ &= \frac{1}{\mu_{\mathbb{R}}} \int_{\partial\Omega} (\nabla \times \mathbf{e}(\omega)) \cdot (\bar{\mathbf{e}}(\omega) \times \boldsymbol{\nu}) \, d\gamma \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

のように書くことができる. また, 随伴電場  $\bar{\mathbf{e}}(\omega)$  も電場の波動方程式を満たすと仮定すれば, 式 (2.3.13) から式 (2.3.15) において  $\mathbf{e}(\omega)$  と  $\bar{\mathbf{e}}(\omega)$  を交換した式も成り立つ.

したがって, 電場の波動方程式が許容する同次境界条件は次のような組み合わせになる.

- (1) 同次基本境界条件 (同次 Dirichlet 条件) を

$$\mathbf{e}(\omega) = \bar{\mathbf{e}}(\omega) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad (2.3.16)$$

で与え, 同次自然境界条件 (同次 Neumann 条件) を

$$\boldsymbol{\nu} \times (\nabla \times \mathbf{e}(\omega)) = \boldsymbol{\nu} \times (\nabla \times \bar{\mathbf{e}}(\omega)) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad (2.3.17)$$

で与える.

- (2) 同次基本境界条件 (同次 Dirichlet 条件) を

$$\mathbf{e}(\omega) \times \boldsymbol{\nu} = \bar{\mathbf{e}}(\omega) \times \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad (2.3.18)$$

で与え, 同次自然境界条件 (同次 Neumann 条件) を

$$\nabla \times \mathbf{e}(\omega) = \nabla \times \bar{\mathbf{e}}(\omega) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad (2.3.19)$$

で与える.

完全導体 (電気壁, PEC: Perfect Electrical Conductor) の境界では領域内の電場が一定となるために

$$\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{e}(\omega) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad (2.3.20)$$

となる. 一方, 完全磁性体 (磁気壁, PMC: Perfect Magnetic Conductor) の境界では領域内の磁場が一定となるために

$$\boldsymbol{\nu} \times \nabla \times \mathbf{e}(\omega) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad (2.3.21)$$

となる.

導波管やアンテナを想定した電磁場では，給電ポートに電力が供給される．本研究では，この供給電力が給電ポートと媒質の境界において第3種境界条件 (Robin 条件) の非同次項を生むと仮定する．すなわち， $\mathbf{i}_R : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$  を給電ポートに発生する電流密度の Fourier 変換とする．このとき，非同次 Robin 条件を

$$\frac{1}{\mu_R} (\mathbf{e}(\omega) \times \boldsymbol{\nu} + \gamma_R \nabla \times \mathbf{e}(\omega)) = \mathbf{i}_R(\omega) \quad (2.3.22)$$

で与える．ここで， $\gamma_R$  は給電回路によって与えられる定数とする．





## 第 3 章

# 静電場における形状最適化問題

### 3.1 はじめに

はじめに、本章で扱う人の指を検知するための静電容量式タッチセンサの原理について述べる (例えば, [14]). 図 3.1 に GND 電位に基づいた静電タッチセンサの等価回路を示す. タッチセンサは静電容量  $c_{\text{detect}}$  の容量変化を計測することにより, 電極上に指が有る状態 ( $c_{\text{detect}}$  が大) か, 指が無い状態 ( $c_{\text{detect}}$  が小) かを区別する. この等価回路において,  $c_{\text{detect}}$  は

$$\begin{aligned} c_{\text{detect}} &= \frac{1}{\frac{1}{c_{\text{finger}}} + \frac{1}{c_{\text{body}}} + \frac{1}{c_{\text{foot}}}} + c_{\text{error}} \\ &= c_{\text{finger}} \frac{1}{1 + \frac{c_{\text{finger}}}{c_{\text{body}}} + \frac{c_{\text{finger}}}{c_{\text{foot}}}} + c_{\text{error}}, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

で与えられる. ここで,  $c_{\text{finger}}$ ,  $c_{\text{body}}$ ,  $c_{\text{foot}}$ ,  $c_{\text{error}}$  はそれぞれ, 電極と人の指との間で形成される静電容量, 人の体内構造により生じる静電容量成分, 人の身体 (主に足) と GND 間で形成される静電容量, および電極と GND 間で直接形成される静電容量である. 実環境での計測においては, それぞれ  $c_{\text{finger}} < 1$  [pF],  $c_{\text{body}} > 100 \sim 1000$  [pF], and  $c_{\text{foot}} > 200$  [pF] 程度の静電容量値を持つ. これより,  $c_{\text{finger}} \ll c_{\text{body}}$  および  $c_{\text{finger}} \ll c_{\text{foot}}$  であることを仮定すれば, 式 (3.1.1) は

$$c_{\text{detect}} \approx c_{\text{finger}} + c_{\text{error}}. \quad (3.1.2)$$

と近似することができる. この近似は, 指が GND と同電位とみなせることを意味する. さらに,  $c_{\text{error}}$  は電極周囲の環境によって変動する. 例えば, 静電タッチセンサを

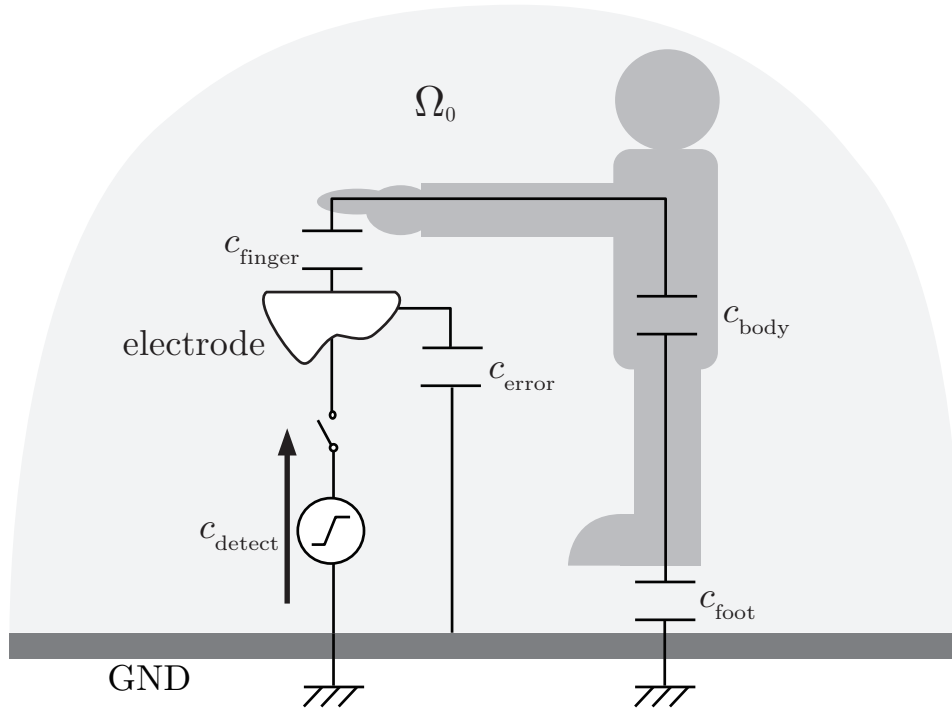


図 3.1: GND 電位基準での静電容量タッチセンサの等価回路モデル

車両に実装する場合，製造時の組み付け位置のばらつきによる変動，経時変化に伴う材料特性（特に誘電率）の変化や位置の変化に伴う変動により  $c_{\text{error}}$  の大きさは変化するため，常に一定の値とはならない．このため，静電タッチセンサの指の検出性能を向上させるためには，指がある場合とない場合での  $c_{\text{finger}}$  の値を最大化することが必要となる． $c_{\text{finger}}$  を最大化するため，静電容量タッチセンサの数理モデルを構築し，3.4にて評価関数を用いた形状最適化問題を定式化する．なお，本章の内容の一部は，文献 [31] を引用している．

## 3.2 初期領域と領域写像の集合

静電容量タッチセンサの原理に基づき，以下の方法でセンサの数理モデルを定式化する．

図 3.2 は静電場の初期領域である． $D_0$  は静電場における  $d (\in \{2, 3\})$  次元の設計領域とする．本論文での表記法として， $\partial D_0$  を  $D_0$  の境界， $\bar{D}_0$  は  $D_0 \cup \partial D_0$  として扱う．さらに， $\bar{E}_0$ ， $\bar{G}_0$  および  $\bar{F}_0$  はそれぞれ，ある正電位ポテンシャル（後に  $u_D$  とおく）を

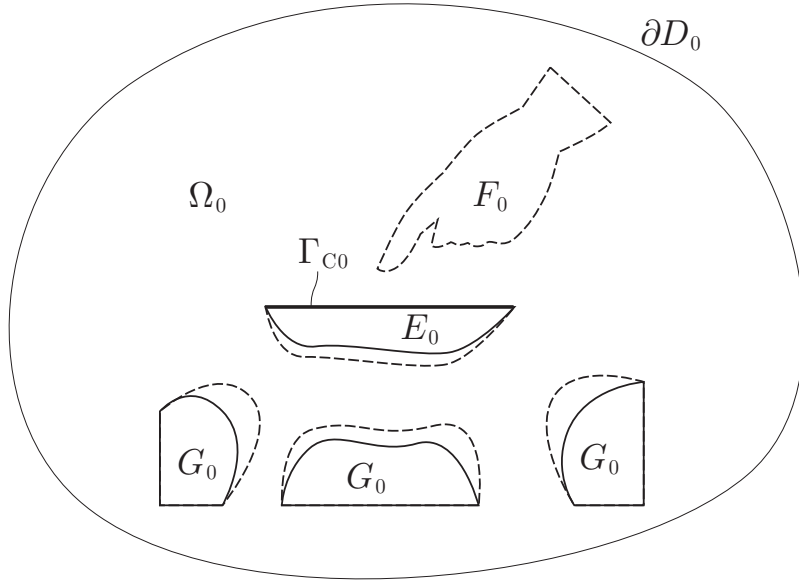


図 3.2: 静電場問題における初期領域  $\Omega_0 = D_0 \setminus (\bar{E}_0 \cup \bar{G}_0)$

もつ電極（検出電極），電位ポテンシャルが零におかれた電極（接地電極），電位ポテンシャルが零におかれた導体（検出体，例えば指）の領域を表し，相互の重なりはないものとする．これらの定義に基づき，静電場の初期領域を  $\Omega_0 = D_0 \setminus (\bar{E}_0 \cup \bar{G}_0)$  と仮定する． $\Omega_0$  の形状最適化問題を定義するためには，その境界  $\partial\Omega_0$  は Lipschitz 境界であることが要求される．

$\Omega_0$  の形状最適化において設計変数は次の方法で定義する．初期領域  $D_0$  から変動した領域を写像  $\phi$  によって与えられると仮定する． $i$  が恒等写像を表すこととすれば，変動後の領域は連続な 1 対 1 写像  $i + \phi : D_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$  によって

$$\Omega(\phi) = \{(i + \phi)(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \Omega_0\},$$

のようにつくられると仮定される．同様に，領域や境界に対して

$$(\cdot)(\phi) = \{(i + \phi)(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in (\cdot)_0\}$$

を意味するものとする．また，のちに評価関数の Fréchet 微分を定義するため，設計変数  $\phi$  の関数空間を

$$X = \{\phi \in H^1(D_0; \mathbb{R}^d) \mid \phi = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \partial D_0 \cup \partial F_0 \cup \partial G_0 \cup \Gamma_{C0} \cup \bar{\Omega}_{C0}\} \quad (3.2.1)$$

と定義する．式 (3.2.1) において， $\Gamma_{C0}$  と  $\bar{\Omega}_{C0}$  はそれぞれ，設計上の制約により変動を拘束する領域あるいは境界を表す． $\Gamma_{C0}$  は図 3.2 のタッチパネルを平坦に保つための

制約として用いられており,  $\bar{\Omega}_{C_0}$  は変動させたくない領域に対して指定される. さらに,  $\phi$  の 1 対 1 写像が確実に満たされるようにするため, 設計変数  $\phi$  の許容集合は以下のように定義される必要がある.

$$\mathcal{D} = \{ \phi \in X \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \mid \|\phi\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)} < \sigma \}, \quad (3.2.2)$$

ただし,  $\sigma$  は  $i + \phi$  の逆写像が 1 対 1 写像となるように選んだ正定数とする ([20] p. 23 Proposition 1.41).

### 3.3 状態決定問題

上記の定義を用い, 静電容量タッチセンサの状態決定問題を定義する.

静電タッチセンサの問題は, 2.2 節で示した静電場の支配方程式により定義される. 静電タッチセンサの使われる環境は, 周囲に電荷密度が与えられることを考慮する必要がないため, 静電場のラプラス方程式 (2.2.10) が用いられる.

これより, 第 1 の状態決定問題を以下のように定義する.

**問題 3.3.1 (基準静電場問題)**  $\phi \in \mathcal{D}$  に対して  $u_D : D_0 \rightarrow \mathbb{R}$  が与えられたとき,

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \mathbf{e}(u) &= 0 \quad \text{in } \Omega(\phi) = D_0 \setminus (\bar{E}(\phi) \cup \bar{G}(\phi)), \\ \partial_\nu u &= 0 \quad \text{on } \partial D_0, \\ u &= u_D \quad \text{on } \partial E(\phi), \\ u &= 0 \quad \text{on } \partial G(\phi) \end{aligned}$$

を満たす  $u : \Omega(\phi) \rightarrow \mathbb{R}$  を求めよ. □

問題 3.3.1 において,  $\partial D_0$  は Neumann 条件を仮定する. この仮定は, 設計領域  $D_0$  以降において電場  $\mathbf{e}$  が連続であることを意味し, 実測と有限要素法解析の解の比較により妥当性を確認されたものである. Lax–Milgram の定理により, Dirichlet 条件を与える既知関数  $u_D$  に対して  $\tilde{u} = u - u_D$  で与えられる実 Hilbert 空間を

$$U = \{ u \in H^1(D_0; \mathbb{R}) \mid u = 0 \text{ on } \partial E(\phi) \cup \partial G(\phi) \}, \quad (3.3.1)$$

とおく. 領域  $\Omega(\phi)$  は Calderón の拡張定理によって  $D_0$  へ拡張される. また,  $\tilde{u}$  が入る状態変数の許容集合を

$$\mathcal{S} = U \cap W^{1,\infty}(D_0; \mathbb{R}) \quad (3.3.2)$$

とおく.  $H^1$  勾配法により特異点を持たない領域変動を得るため  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$  であると仮定する.

問題 3.3.1 はのちに示される形状最適化において等式制約として扱われる. のちの議論において等式制約は Lagrange 関数の停留条件におきかえられるため, ここではその準備として, 問題 3.3.1 の Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}_N(\phi, u, v) = - \int_{\Omega(\phi)} \mathbf{e}(u) \cdot \mathbf{e}(v) \, dx, \quad (3.3.3)$$

と定義しておく. ここで  $\tilde{u} \in \mathcal{S}$  とし,  $v \in U$  は Lagrange 乗数として導入された要素とする.  $v$  が問題 3.3.1 の解であるとき, 任意の  $v \in U$  に対して

$$\mathcal{L}_N(\phi, u, v) = 0$$

が成り立つ.

次に, 第2の状態決定問題として, 検出対象  $F_0$  が有る場合の静電場問題を定義する.

問題 3.3.2 (検出対象を含む静電場問題)  $\phi \in \mathcal{D}$  に対して問題 3.3.1 で用いられた  $u_D : D_0 \rightarrow \mathbb{R}$  が与えられるとき,

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \mathbf{e}(u_F) &= 0 \\ \text{in } \Omega(\phi) \setminus \bar{F}_0 &= D_0 \setminus (\bar{E}(\phi) \cup \bar{G}(\phi) \cup \bar{F}_0), \\ \partial_\nu u_F &= 0 \quad \text{on } \partial D_0, \\ u_F &= u_D \quad \text{on } \partial E(\phi), \\ u_F &= 0 \quad \text{on } \partial G(\phi) \cup \partial F_0 \end{aligned}$$

を満たす  $u_F : \Omega(\phi) \setminus \bar{F}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  を求めよ. □

問題 3.3.1 に関して  $\tilde{u}_F = u_F - u_D$  における関数空間を

$$U_F = \{u \in H^1(D_0; \mathbb{R}) \mid u = 0 \text{ on } \partial E(\phi) \cup \partial G(\phi) \cup \partial F_0\}, \quad (3.3.4)$$

$$\mathcal{S}_F = U_F \cap W^{1,\infty}(D_0; \mathbb{R}) \quad (3.3.5)$$

と定義する. 問題 3.3.2 の Lagrange 乗数を  $v_F \in U_F$  として導入すれば, Lagrange 関数は

$$\mathcal{L}_F(\phi, u_F, v_F) = - \int_{\Omega(\phi) \setminus \bar{F}_0} \mathbf{e}(u_F) \cdot \mathbf{e}(v_F) \, dx \quad (3.3.6)$$

と定義される.  $u_F$  が問題 3.3.2 の解であるとき, 任意の  $v_F \in U_F$  に対して,

$$\mathcal{L}_F(\phi, u_F, v_F) = 0$$

が成り立つ.

### 3.4 形状最適化問題

ここでは状態決定問題の解を用いて、静電容量タッチセンサの形状最適化問題を定義する。

3.1節で述べられたように、センサの検知性能は検出対象がある場合と無い場合の静電容量  $c_{\text{finger}}$  の差によって決定される。この容量差は電場  $\mathbf{e}(u)$  と  $\mathbf{e}(u_F)$  の強度差に基づいて定まる。ここで電場が電位の微分であることから、電位  $u$  と  $u_F$  間の誤差ノルムによって評価される。これは数学的には  $H^1(\Omega(\phi) \setminus \bar{F}_0; \mathbb{R})$  における誤差ノルムを意味する。これより目的関数は以下のように定義される。

$$\begin{aligned} f_0(\phi, u, u_F) \\ = - \int_{\Omega(\phi) \setminus \bar{F}_0} \{c_0(u - u_F)^2 + (\mathbf{e}(u) - \mathbf{e}(u_F)) \cdot (\mathbf{e}(u) - \mathbf{e}(u_F))\} dx \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

ここで  $c_0$  は単位系  $[1/\text{m}^2]$  を備える正定数である。本論文においては、 $H^1(\Omega(\phi) \setminus \bar{F}_0; \mathbb{R})$  が誤差ノルムと一致させるために  $c_0 = 1$  を仮定する ( $c_0 = 0$  では目的関数がうまく機能しないことを確認している)。

一方、電極  $E(\phi)$  の大きさに制限を設けることを想定し、制約関数を

$$f_1(\phi) = \int_{E(\phi)} dx - s_1, \quad (3.4.2)$$

とおく。ただし、 $s_1$  は  $f_1(\phi) \leq 0$  が成り立つような  $\phi \in \mathcal{D}$  が存在する正定数とする。

これらの評価関数を用いて、静電容量タッチセンサに対する最適化問題を以下のように定義する。

**問題 3.4.1** (静電タッチセンサの形状最適化問題)  $\mathcal{D}$  と  $\mathcal{S}$  をそれぞれ式 (3.2.2), 式 (3.3.2) のように定義する。  $\phi \in \mathcal{D}$  に対して、  $\tilde{u} = u - u_D \in \mathcal{S}$  と  $\tilde{u}_F = u_F - u_D \in \mathcal{S}$  が問題 3.3.1 と問題 3.3.2 の解であるとする。  $f_0$  と  $f_1$  をそれぞれ式 (3.4.1), 式 (3.4.2) で定義する。このとき、

$$\min_{\phi \in \mathcal{D}} \{f_0(\phi, u, u_F) \mid f_1(\phi) \leq 0, \tilde{u} \in \mathcal{S}, \text{問題 3.3.1}, \tilde{u}_F \in \mathcal{S}, \text{問題 3.3.2}\}$$

を満たす  $\Omega(\phi)$  を求めよ。 □

### 3.5 評価関数の形状微分

形状最適化問題 3.4.1 を解くために、 $H^1$  勾配法の形状変更アルゴリズムを用いる。

$H^1$  勾配法を使うためには、評価関数の形状微分が必要となる。目的関数  $f_0(\phi, u, u_F)$  は状態決定問題の解  $u$  と  $u_F$  が使われているので、2つの状態決定問題を等式制約とみなしたときの  $f_0(\phi, u, u_F)$  の Lagrange 関数を

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_0(\phi, u, v_0, u_F, v_{F0}) \\ &= f_0(\phi, u, u_F) + \mathcal{L}_N(\phi, u, v_0) - \mathcal{L}_F(\phi, u_F, v_{F0}) \\ &= \int_{\Omega(\phi) \setminus \bar{F}_0} \left\{ -c_0(u - u_F)^2 - (\mathbf{e}(u) - \mathbf{e}(u_F)) \cdot (\mathbf{e}(u) - \mathbf{e}(u_F)) \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{e}(u_F) \cdot \mathbf{e}(v_{F0}) \right\} dx - \int_{\Omega(\phi)} \mathbf{e}(u) \cdot \mathbf{e}(v_0) dx \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

とおく。ここで、 $\varphi$  は  $\mathcal{D}$  における  $\phi \in \mathcal{D}$  の任意の変形を意味する。定義に基づき、任意の変形  $(\varphi, u', v'_0, u'_F, v'_{F0}) \in \mathcal{D} \times U^2 \times U_F^2$  に対する  $\mathcal{L}_0$  の形状微分は

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}'_0(\phi, u, v_0, u_F, v_{F0})[\varphi, u', v'_0, u'_F, v'_{F0}] \\ &= \mathcal{L}_{0\phi}(\phi, u, v_0, u_F, v_{F0})[\varphi] + \mathcal{L}_{0u}(\phi, u, v_0, u_F, v_{F0})[u'] \\ & \quad + \mathcal{L}_{0v_0}(\phi, u, v_0, u_F, v_{F0})[v'_0] + \mathcal{L}_{0u_F}(\phi, u, v_0, u_F, v_{F0})[u'_F] \\ & \quad + \mathcal{L}_{0v_{F0}}(\phi, u, v_0, u_F, v_{F0})[v'_{F0}] \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

とかける。ここで式 (3.5.2) の右辺の第3項と第6項は、 $u$  と  $u_F$  がそれぞれ問題 3.3.1 と問題 3.3.2 の解のとき0となる。さらに、式 (3.5.2) の右辺の第2項は、 $v_0$  が以下の問題の解のとき0となる。

**問題 3.5.1** (問題 3.3.1 の随伴問題)  $\phi \in \mathcal{D}$  に対して、問題 3.3.1 の解  $u$  が与えられたとき、

$$\begin{aligned} & -\nabla \cdot \mathbf{e}(v_0) = 2\nabla \cdot (\mathbf{e}(u) - \mathbf{e}(u_F)) - 2c_0(u - u_F) \\ & \quad \text{in } \Omega(\phi) \setminus \bar{F}_0 = D_0 \setminus (\bar{E}(\phi) \cup \bar{G}(\phi) \cup \bar{F}_0), \\ & -\nabla \cdot \mathbf{e}(v_0) = 0 \quad \text{in } F_0, \\ & \partial_\nu v_0 = 0 \quad \text{on } \partial D_0, \\ & v_0 = 0 \quad \text{on } \partial E(\phi) \cup \partial G(\phi) \end{aligned}$$

を満たす  $v_0 : \Omega(\phi) \rightarrow \mathbb{R}$  を求めよ。 □

同様に、式 (3.5.2) の右辺の第4項は、 $v_{F0}$  が以下の問題の解のとき0となる。

**問題 3.5.2** (問題 3.3.2 の随伴問題)  $\phi \in \mathcal{D}$  に対して、問題 3.3.2 の解  $u_F$  が与えられたとき、

$$-\nabla \cdot \mathbf{e}(v_{F0}) = 2\nabla \cdot (\mathbf{e}(u) - \mathbf{e}(u_F)) - 2c_0(u - u_F)$$

$$\begin{aligned} & \text{in } \Omega(\phi) \setminus \bar{F}_0 = D_0 \setminus (\bar{E}(\phi) \cup \bar{G}(\phi) \cup \bar{F}_0), \\ & \partial_\nu v_{F_0} = 0 \quad \text{on } \partial D_0, \\ & v_{F_0} = 0 \quad \text{on } \partial E(\phi) \cup \partial G(\phi) \cup \partial F_0 \end{aligned}$$

を満たす  $v_{F_0} : \Omega(\phi) \setminus \bar{F}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  を求めよ. □

式 (3.5.2) の右辺の第1項は

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{0\phi}(\phi, u, v_0, u_F, v_{F_0})[\varphi] \\ &= \int_{\Omega(\phi) \setminus \bar{F}_0} \left[ 2(\mathbf{e}(u) - \mathbf{e}(u_F)) \cdot \{\nabla \varphi^T (\mathbf{e}(u) - \mathbf{e}(u_F))\} \right. \\ & \quad - \mathbf{e}(u_F) \cdot (\nabla \varphi^T \mathbf{e}(v_{F_0})) - \mathbf{e}(v_{F_0}) \cdot (\nabla \varphi^T \mathbf{e}(u_F)) \\ & \quad + \left\{ -c_0(u - u_F)^2 - (\mathbf{e}(u) - \mathbf{e}(u_F)) \cdot (\mathbf{e}(u) - \mathbf{e}(u_F)) \right. \\ & \quad \left. \left. + \mathbf{e}(u_F) \cdot \mathbf{e}(v_{F_0}) \right\} \nabla \cdot \varphi \right] dx \\ & \quad + \int_{\Omega(\phi)} \left\{ \mathbf{e}(u) \cdot (\nabla \varphi^T \mathbf{e}(v_0)) + \mathbf{e}(v_0) \cdot (\nabla \varphi^T \mathbf{e}(u)) \right. \\ & \quad \left. - \mathbf{e}(u) \cdot \mathbf{e}(v_0) \nabla \cdot \varphi \right\} dx \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

となる. ここで, 付録 A.2 節の命題 A.2.1 と, 問題 3.3.1, 問題 3.3.2, 問題 3.5.1, 問題 3.5.2 の Dirichlet 条件を用いている.

上述の結果より,  $u, u_F, v_0$  および  $v_{F_0}$  がそれぞれ問題 3.3.1, 問題 3.3.2, 問題 3.5.1, 問題 3.5.2 の解であり, また  $f_0(\phi, u(\phi), u_F(\phi))$  を  $\tilde{f}_0(\phi)$  と表記すれば

$$\begin{aligned} \tilde{f}'_0(\phi)[\varphi] &= \mathcal{L}_{0\phi}(\phi, u, v_0, u_F, v_{F_0})[\varphi] = \langle \mathbf{g}_0, \varphi \rangle \\ &= \int_{\Omega(\phi) \setminus \bar{F}_0} (\mathbf{G}_{0\Omega(\phi) \setminus \bar{F}_0} \cdot \nabla \varphi^T + g_{0\Omega(\phi) \setminus \bar{F}_0} \nabla \cdot \varphi) dx \\ & \quad + \int_{\Omega(\phi)} (\mathbf{G}_{0\Omega(\phi)} \cdot \nabla \varphi^T + g_{0\Omega(\phi)} \nabla \cdot \varphi) dx \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

とかける. ここで,

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{0\Omega(\phi) \setminus \bar{F}_0} &= 2(\mathbf{e}(u) - \mathbf{e}(u_F))(\mathbf{e}(u) - \mathbf{e}(u_F))^T \\ & \quad - \mathbf{e}(u_F) \cdot \mathbf{e}^T(v_{F_0}) - \mathbf{e}(v_{F_0}) \cdot \mathbf{e}^T(u_F), \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

$$\begin{aligned} g_{0\Omega(\phi) \setminus \bar{F}_0} &= -c_0(u - u_F)^2 - (\mathbf{e}(u) - \mathbf{e}(u_F)) \cdot (\mathbf{e}(u) - \mathbf{e}(u_F)) \\ & \quad + \mathbf{e}(u_F) \cdot \mathbf{e}(v_{F_0}), \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

$$\mathbf{G}_{0\Omega(\phi)} = \mathbf{e}(u) \cdot \mathbf{e}^T(v_0) + \mathbf{e}(v_0) \cdot \mathbf{e}^T(u), \tag{3.5.7}$$

$$g_{0\Omega(\phi)} = -\mathbf{e}(u) \cdot \mathbf{e}(v_0) \tag{3.5.8}$$



である. ここで, 式 (3.5.3) から式 (3.5.4) を得る際に,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d \times d}$  および  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$  に対する恒等式  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{B}\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\mathbf{c}^T) \cdot \mathbf{B}$  を用いた. ここで,  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$  と  $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$  は  $\sum_{(i,j) \in \{1, \dots, d\}^2} a_{ij} b_{ij}$  を意味する.

$f_1(\phi)$  については

$$f_1'(\phi)[\varphi] = \int_{E(\phi)} \nabla \cdot \varphi \, dx = \langle \mathbf{g}_1, \varphi \rangle \quad (3.5.9)$$

となる.

$\mathbf{g}_0$  と  $\mathbf{g}_1$  をそれぞれ  $f_0$  と  $f_1$  の形状微分と呼ぶ.

## 3.6 $H^1$ 勾配法

$H^1$  勾配法は楕円の偏微分方程式の境界値問題の解として, 評価関数  $f_i$  を減少させる方向ベクトルを与える [2, 4–6].  $i \in \{0, 1\}$  における評価関数  $f_i(\phi)$  の形状微分  $\mathbf{g}_i$  は以下のように定義される.

**問題 3.6.1** (問題 3.4.1 に対する  $H^1$  勾配法)  $X$  を式 (3.2.1) の実 Hilbert 空間と定義する.  $X$  上の有界かつ強圧的な双 1 次形式  $a: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  を選ぶ. すなわち, ある正定数  $\alpha$  と  $\beta$  が存在して, 任意の  $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in X$  に対して,

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \leq \alpha \|\mathbf{w}\|_X \|\mathbf{z}\|_X, \quad a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \geq \beta \|\mathbf{w}\|_X^2$$

が成り立つとする.  $\mathbf{g}_i \in X'$  が与えられたとき, 任意の  $\mathbf{w} \in X$  に対して,

$$c_a a(\varphi_{\mathbf{g}_i}, \mathbf{w}) = -\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{w} \rangle \quad (3.6.1)$$

を満たす  $\varphi_{\mathbf{g}_i} \in X$  を求めよ. ただし,  $c_a$  はステップサイズを調整するために使われる正の定数とする.  $\square$

式 (3.6.1) は楕円型偏微分方程式の境界値問題に対する弱形式になっている. そこで, 問題 3.6.1 の解は, 通常 of 有限要素法により数値的に求めることができる. 本章では, 双 1 次形式  $a$  を  $\varphi \in X$  と  $\psi \in X$  に対して

$$a(\varphi, \psi) = \int_{\Omega(\phi)} (\mathbf{E}(\varphi) \cdot \mathbf{E}(\psi) + c_b \varphi \cdot \psi) \, dx \quad (3.6.2)$$

のように定義する. ここで

$$\mathbf{E}(\varphi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right)_{(i,j) \in \{1, \dots, d\}^2},$$

であり,  $c_b$  は正定数である.

$\tilde{u}$  と  $\tilde{u}_F$  が  $\mathcal{S}$  に含まれるとき,  $\mathbf{g}_0$  に対する問題 3.6.1 の解  $\varphi_{g_0}$  が特異点近傍を除いて  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$  に属することは, 関数の正則性を調べることによって確認される [3, 定理 9.8.6].

### 3.7 形状最適化問題の解法

問題 3.4.1 を解くため,  $H^1$  勾配法を用いた反復法を適用する. 本節では  $f_0(\phi, u, u_F)$  を  $f_0(\phi)$  と表記し, その形状微分を  $\mathbf{g}_0$  と表記することにする. そのとき,  $H^1$  勾配法を用いた反復法は, 繰り返し数を  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$  とし,  $\Omega(\phi_k)$  のときの  $f_0$  と  $f_1$  の形状微分  $\mathbf{g}_0$  と  $\mathbf{g}_1$  が計算されたと仮定して,  $f_1(\phi_{k+1}) \leq 0$  を満たしつつ  $f_0(\phi_{k+1})$  が  $f_0(\phi_k)$  よりも低下するような領域変動  $\varphi_g$  を次の問題の解として求めて,

$$\phi_{k+1} = \phi_k + \varphi_g$$

によって新しい領域  $\Omega(\phi_{k+1})$  に更新していく方法である.

問題 3.7.1 (逐次2次近似問題)  $f_1(\phi) \leq 0$  を満たす  $\phi \in \mathcal{D}$  に対して,  $\mathbf{g}_0$  と  $\mathbf{g}_1$  が与えられ, 式 (3.6.2) より  $a(\cdot, \cdot)$  が与えられたと仮定する. また  $c_a$  をステップサイズを調整する正定数とする. このとき,

$$\min_{\varphi_g \in X} \left\{ q(\varphi_g) = \frac{c_a}{2} a(\varphi_g, \varphi_g) + \langle \mathbf{g}_0, \varphi_g \rangle \mid f_1(\phi) + \langle \mathbf{g}_1, \varphi_g \rangle \leq 0 \right\}$$

を満たす  $\varphi_g$  を求めよ. □

問題 3.7.1 の解  $\varphi_g$  は, 次のようにして求められる. 問題 3.7.1 の Lagrange 関数は,

$$\mathcal{L}_{\text{SQ}}(\varphi_g, \lambda_1) = q(\varphi_g) + \lambda_1 (f_1(\phi) + \langle \mathbf{g}_1, \varphi_g \rangle)$$

で与えられる. ここで,  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  は  $f_1(\phi) \leq 0$  に対する Lagrange 乗数である. 問題 3.7.1 に対する Karush–Kuhn–Tucker 条件は, 任意の  $\psi \in X$  に対して以下が成り立つ.

$$c_a a(\varphi_g, \psi) + \langle \mathbf{g}_0 + \lambda_1 \mathbf{g}_1, \psi \rangle = 0, \tag{3.7.1}$$

$$f_1(\phi) + \langle \mathbf{g}_1, \psi \rangle \leq 0, \tag{3.7.2}$$

$$\lambda_1 (f_1(\phi) + \langle \mathbf{g}_1, \psi \rangle) = 0, \tag{3.7.3}$$

$$\lambda_1 \geq 0 \tag{3.7.4}$$

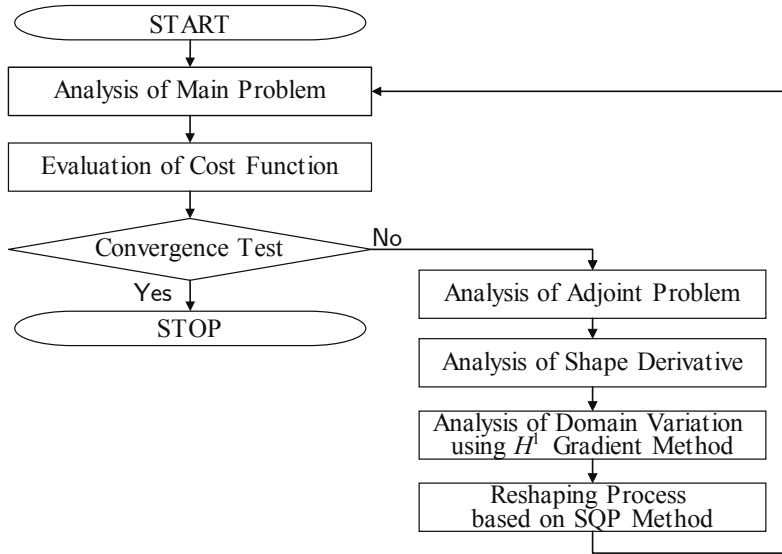


図 3.3: 形状最適化問題の解法フロー

ここで,  $i \in \{0, 1\}$  に対して,  $\varphi_{g_i}$  は  $g_i$  に対する問題 3.6.1 の解として,  $\lambda_1$  は未知数であるとして,

$$\varphi_g = \varphi_{g_0} + \lambda_1 \varphi_{g_1} \quad (3.7.5)$$

の形を仮定する. この  $\varphi_g$  は式 (3.7.1) を満たすことが確認される.  $\lambda_1$  は式 (3.7.2) から決定される. 式 (3.7.2) の制約がアクティブ (すなわち等式) のとき,

$$\langle g_1, \varphi_{g_1} \rangle \lambda_1 = -f_1(\phi) + \langle g_1, \varphi_{g_0} \rangle \quad (3.7.6)$$

が成り立つ. 式 (3.7.6) より  $\lambda_1$  を求めることができる. また,  $f_1(\phi) = 0$  ならば,

$$\langle g_1, \varphi_{g_1} \rangle \lambda_1 = -\langle g_1, \varphi_{g_0} \rangle \quad (3.7.7)$$

となる. 式 (3.7.7) は, ステップサイズ  $\|\varphi_g\|_X$  の大きさに依存しないため, ステップサイズを調整するパラメータ  $c_a$  が適切に決められていなくても  $\lambda_1$  を決定することができることを示している. そこで, 初期領域  $\Omega_0$  のときに,  $f_1(\phi_0) = 0$  を満たすように  $\Omega_0$  が与えられていれば, 式 (3.7.7) を用いて  $\lambda_1$  を決定することができる. その  $\lambda_1$  を用いれば, 式 (3.7.5) によって領域変動の方向を決めることができ, その大きさが適切になるように  $c_a$  を決定すれば,  $k > 0$  のときには, 式 (3.7.6) を使って  $\lambda_1$  を求めることができる. さらに, 得られた  $\lambda_1$  が負になったとき, 式 (3.7.3) と式 (3.7.4) より,  $\lambda_1 = 0$  に置き換えることで, 式 (3.7.1) から式 (3.7.4) を満たすことができる.

これらを用いた数値解析手順のフローを図 3.3 に示す. 本フローをシミュレーションソフトなどに実装することで形状最適化問題の解を得ることができる.

## 3.8 解析例

本論文において、境界値問題の解を得るため、商用有限要素法解析ソフト COMSOL Multiphysics の JAVA API 環境を用い、形状最適化用の計算プログラムを構築した。このプログラムを用い、2種類の問題を解析した。1つ目の問題は、平らな接地電極  $G_0$  と検出対象  $F_0$  から構成される。2つめの問題は突起を備えた接地電極  $G_0$  と、指を想定した棒状の検出対象  $F_0$  から構成される。それぞれの問題を「例 1」および「例 2」と呼ぶことにして、さらに「例 1a」、「例 1b」のように場合分けする。

### 3.8.1 平行な電極と検出対象の例

例 1a の有限要素メッシュの設定を図 3.4 に示す。本例においては、 $\Gamma_{C_0}$  の中心は完全拘束、および  $\Gamma_{C_0}$  の法線方向への領域変動は拘束されることを仮定する。図 3.5 に初期状態と最適化後の静電場を示す。本例題の設定から、著者は最適化の対象である電極  $E_0$  が、目的関数の減少に伴い、薄い平らな形状に変化すると予測した。実際に図 3.5 に示す最適化後の形状 (b) は初期形状 (a) と比べ薄く平たい形状となっている。図 3.6 と 3.7 は、目的関数と設計の狙いである静電容量  $c_{\text{detect}}$  の更新の履歴を示す。制約関数  $f_1$  を変化させずに目的関数  $f_0$  が減少しており、それに伴い検出対象 (指) がある場合と無い場合の静電容量の差が拡大している。しかし、13 回目の反復更新の後、電極がより薄い形状となったことにより、有限要素メッシュにつぶれが生じ、シミュレーションアルゴリズムは解析エラーで停止した。

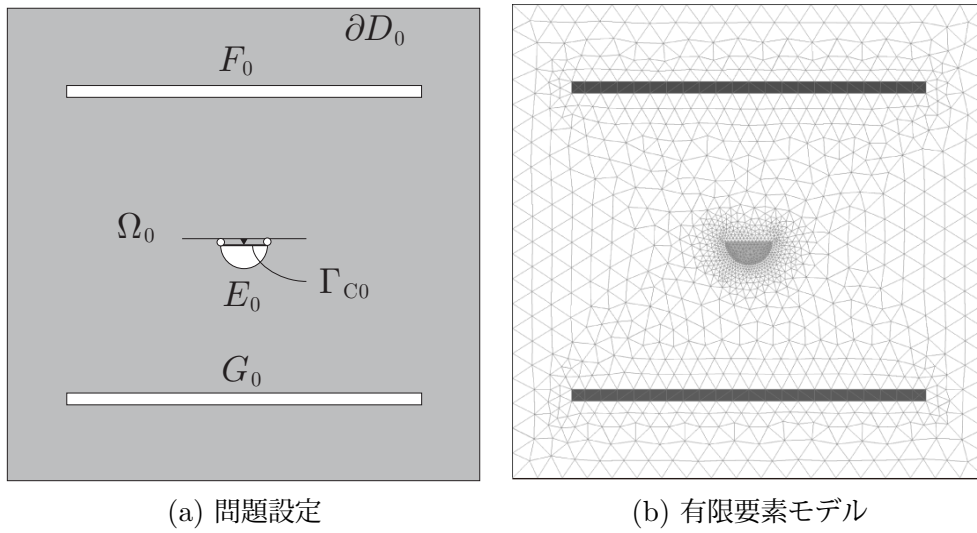


図 3.4: 例 1a: 平行な電極と検出対象における 2 次元静電場問題

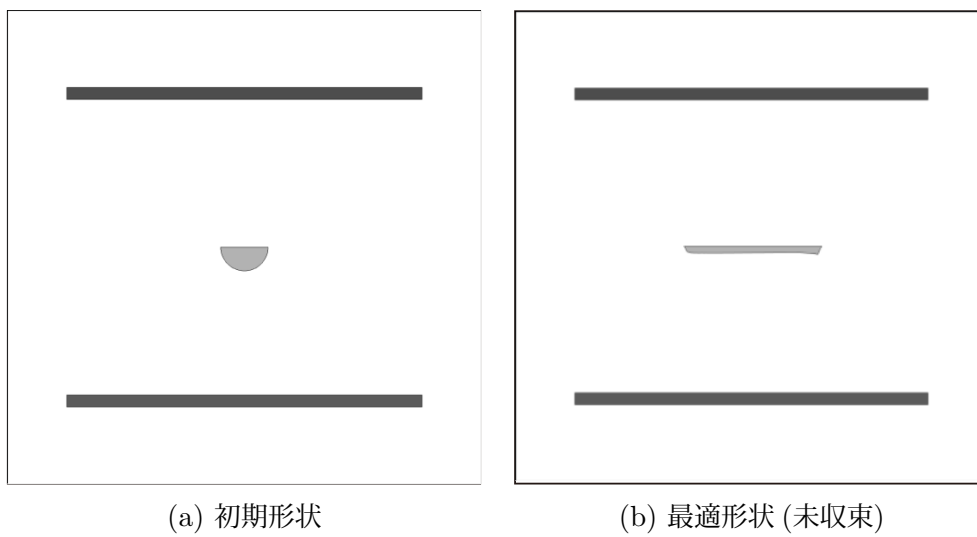


図 3.5: 例 1a: 形状比較

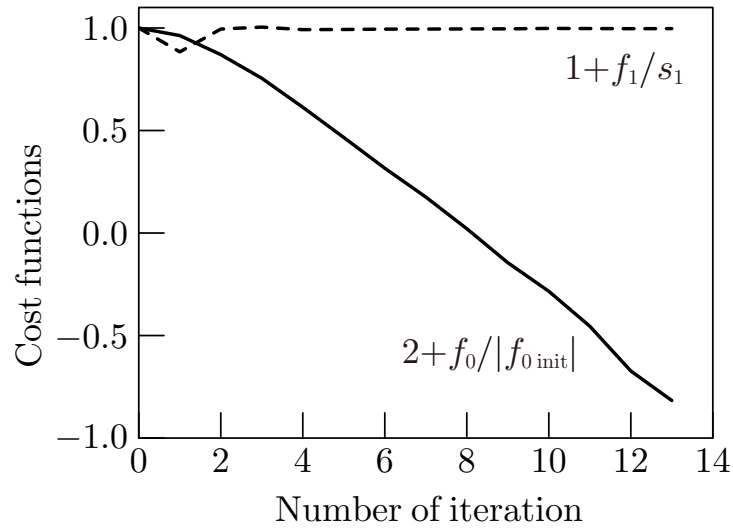


図 3.6: 例 1a: 形状更新に対する評価関数の推移

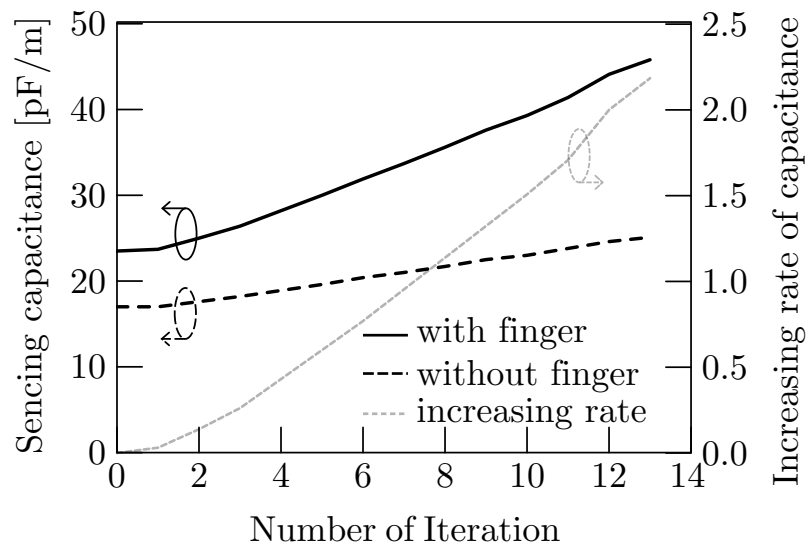


図 3.7: 例 1a: 形状更新に対する検出容量値の変化と初期形状に対する検知容量の向上率

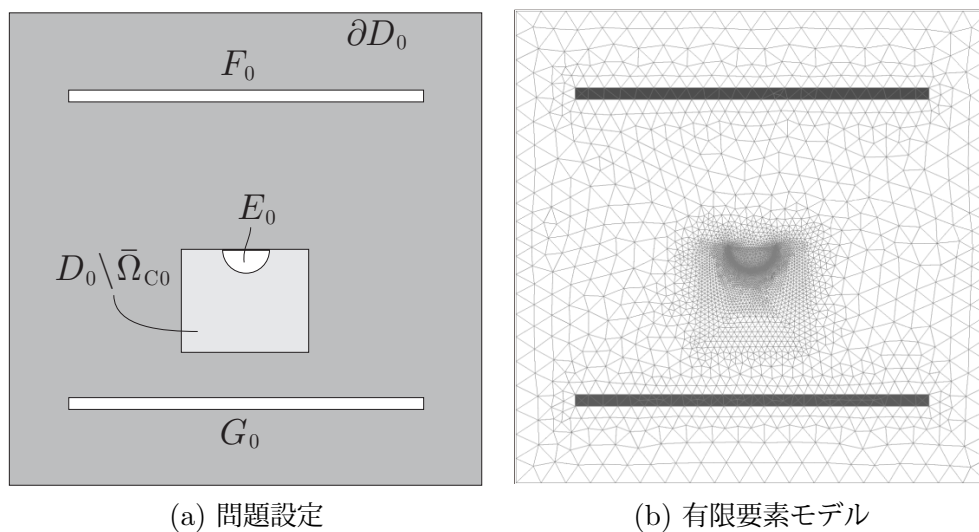


図 3.8: 例 1b: 平行な電極と検出対象における 2 次元静電場問題

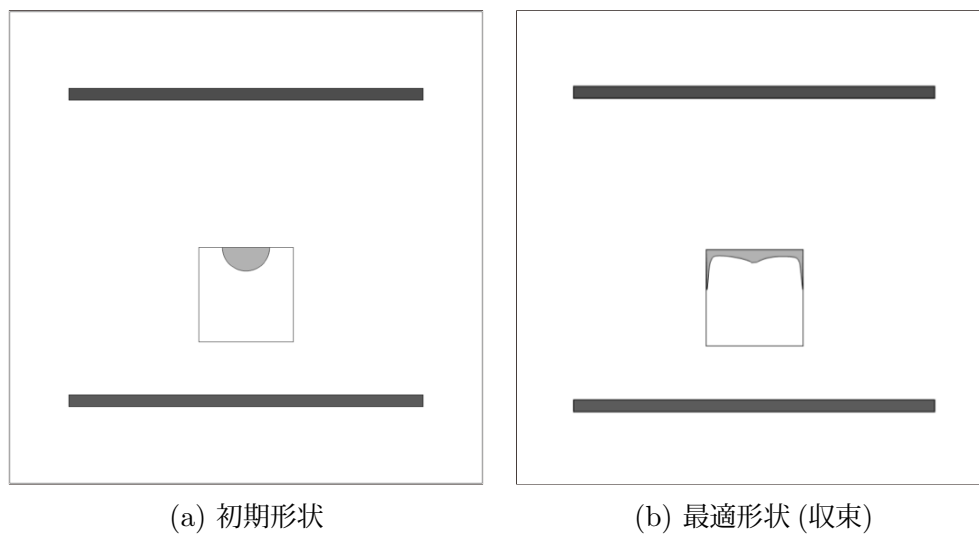


図 3.9: 例 1b: 形状比較

エラーで停止せずに収束形状を得るため、問題設定を変更した。図 3.8 に例 1b の有限要素メッシュの設定を示す。この問題は例 1a に対し電極  $E_0$  の設計領域を  $D_0 \setminus \bar{\Omega}_{C0}$  に制限した。図 3.9 に形状更新前後の形状を示す。また図 3.10 と 3.11 に評価関数と静電容量の更新に伴う変化を示す。予測通り、電極の設計領域の制限によりメッシュのつぶれが発生せず、目的関数  $f_0$  は制約関数  $f_1$  が一定の下で減少し、25 回の反復更新の後に収束した。

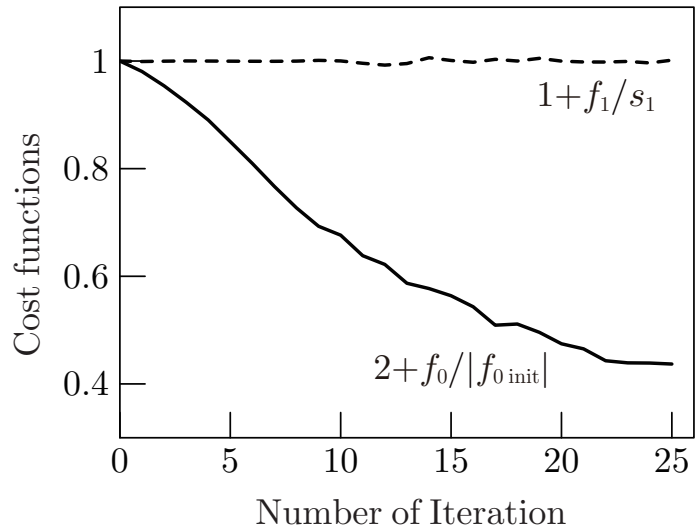


図 3.10: 例 1b: 形状更新に対する評価関数の推移

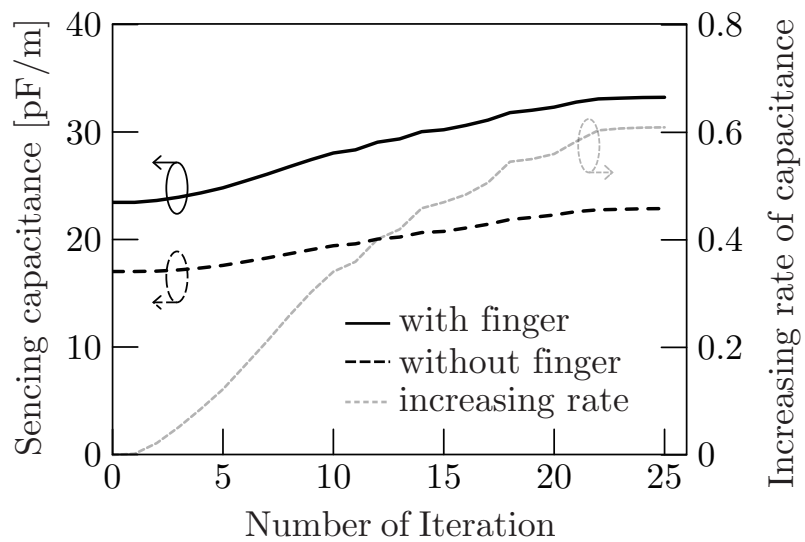


図 3.11: 例 1b: 形状更新に対する検出容量値の変化と初期形状に対する検出容量の向上率



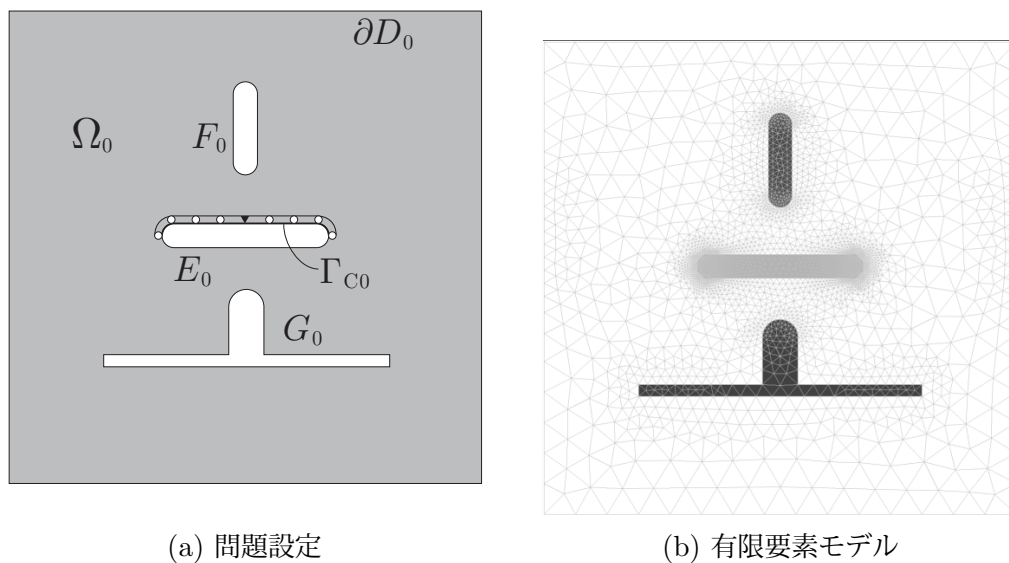


図 3.12: 例 2a: 凸型接地電極における 2 次元静電場問題

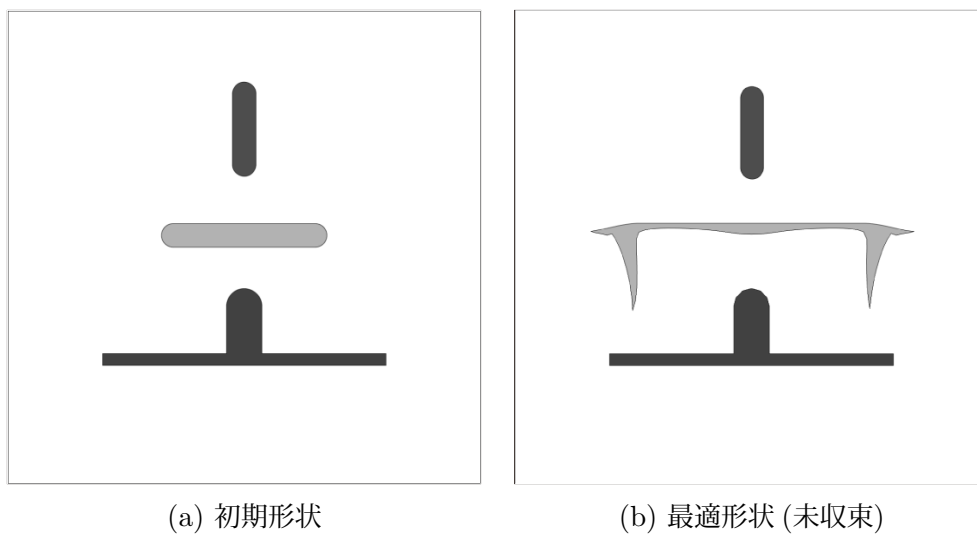


図 3.13: 例 2a: 形状比較

### 3.8.2 凸型電極の例

例 2a においてはより複雑な形状 (図 3.12) を取り扱う. ここで図 3.12 における  $\Gamma_{C0}$  上の上面方向の変動を拘束, および  $\Gamma_{C0}$  の中心は完全拘束されることを仮定する. 図 3.13 に初期状態と最適化後の静電場を示す. また図 3.14 と 3.15 は目的関数と静電容量の更新履歴を示す. 図 3.14 と 3.15 より,  $f_1 \leq 0$  の条件を満たしつつ目的関数  $f_0$  が

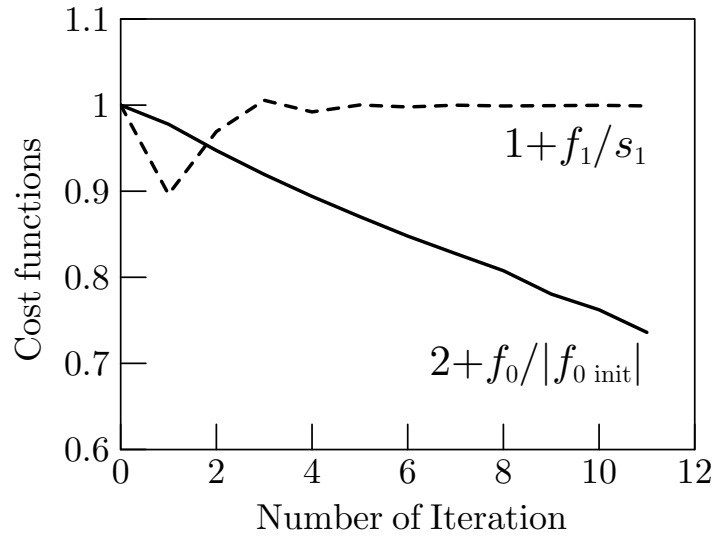


図 3.14: 例 2a: 形状更新に対する評価関数の推移

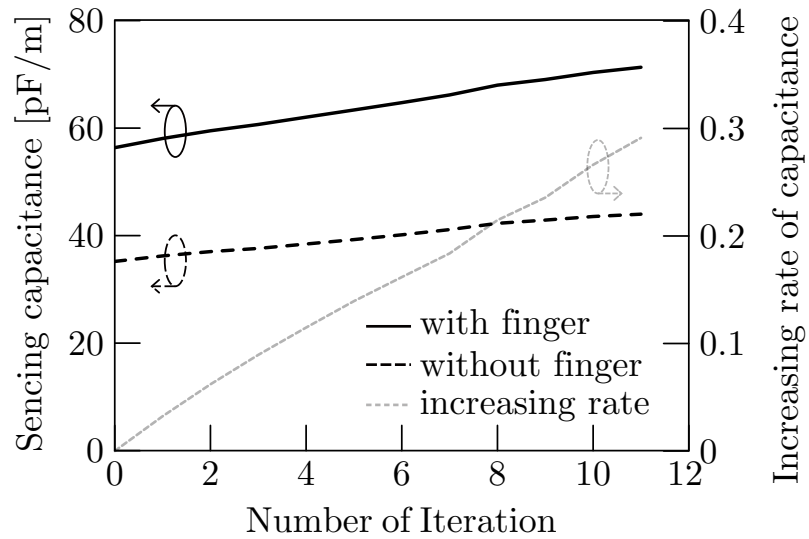


図 3.15: 例 2a: 形状更新に対する検出容量値の変化と初期形状に対する検出容量の向上率

減少しており、指がない場合とある場合の静電容量差も拡大している。しかし、最適化後の形状は非常に薄い形状となっており、例 1a のときと同様のメッシュのつぶれ問題により目的関数は収束せずにエラーで停止した。

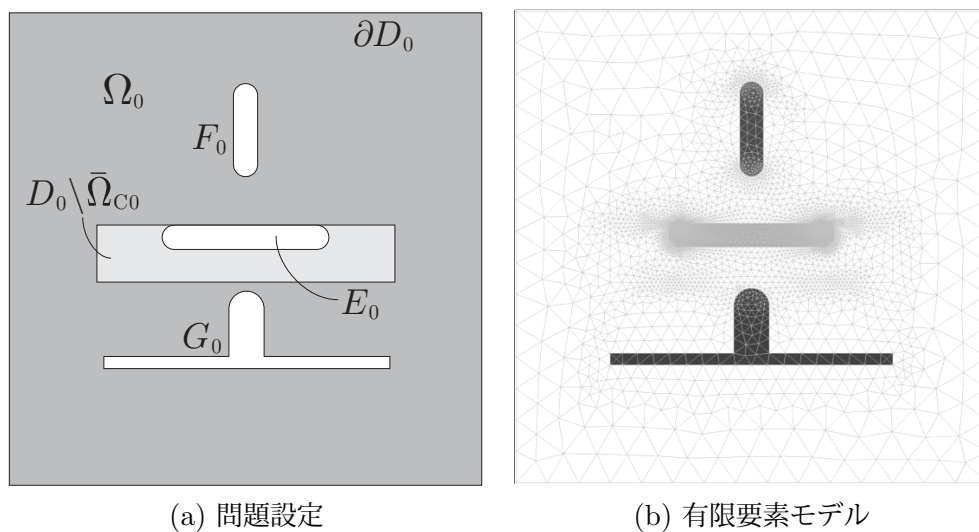


図 3.16: 例 2b: 凸型接地電極における 2 次元静電場問題

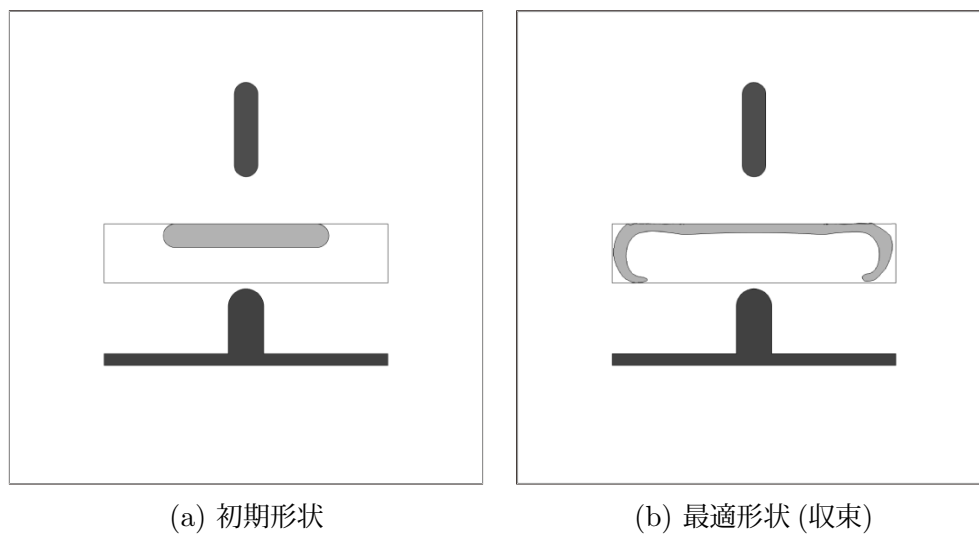


図 3.17: 例 2b: 形状比較

ここでも、例 1b と同様の方法で電極  $E_0$  の設計領域を  $D_0 \setminus \bar{\Omega}_{C0}$  に制限した問題を解析した。図 3.17 に本例での形状更新前後の形状を示す。最適化後の形状は、電極の両端が丸みをおびた形状となっている。また図 3.18 と 3.19 に評価関数と静電容量の更新履歴を示す。これらのグラフより、目的関数  $f_0$  は制約関数  $f_1$  が一定の下で減少し、21 回の更新後に収束したことが確認された。このとき、指の有無による検出される静電容量の差も拡大し、21 回目で収束している。

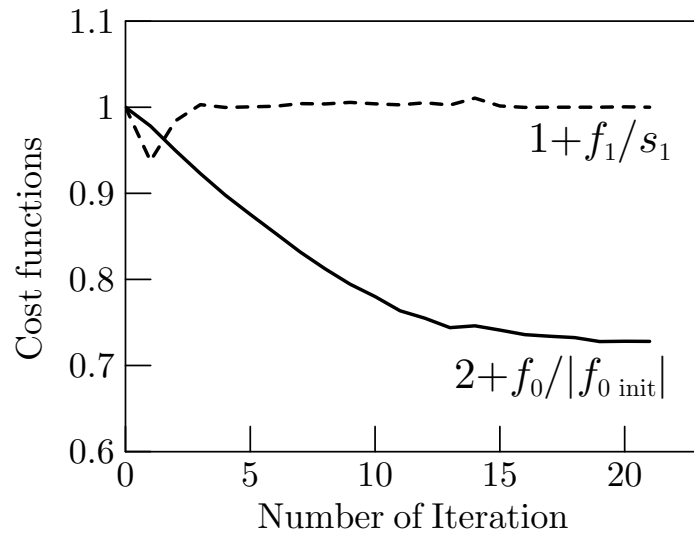


図 3.18: 例 2b: 形状更新に対する評価関数の推移

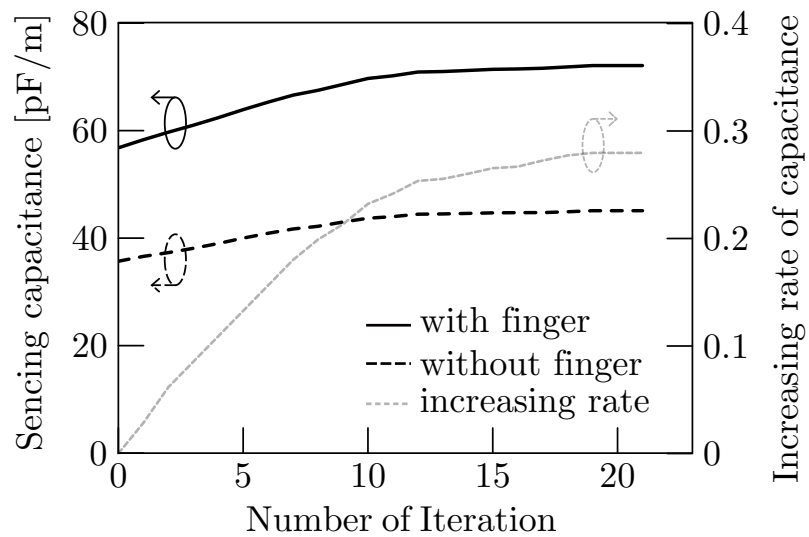


図 3.19: 例 2b: 形状更新に対する検出容量値の変化と初期形状に対する検知容量の向上率

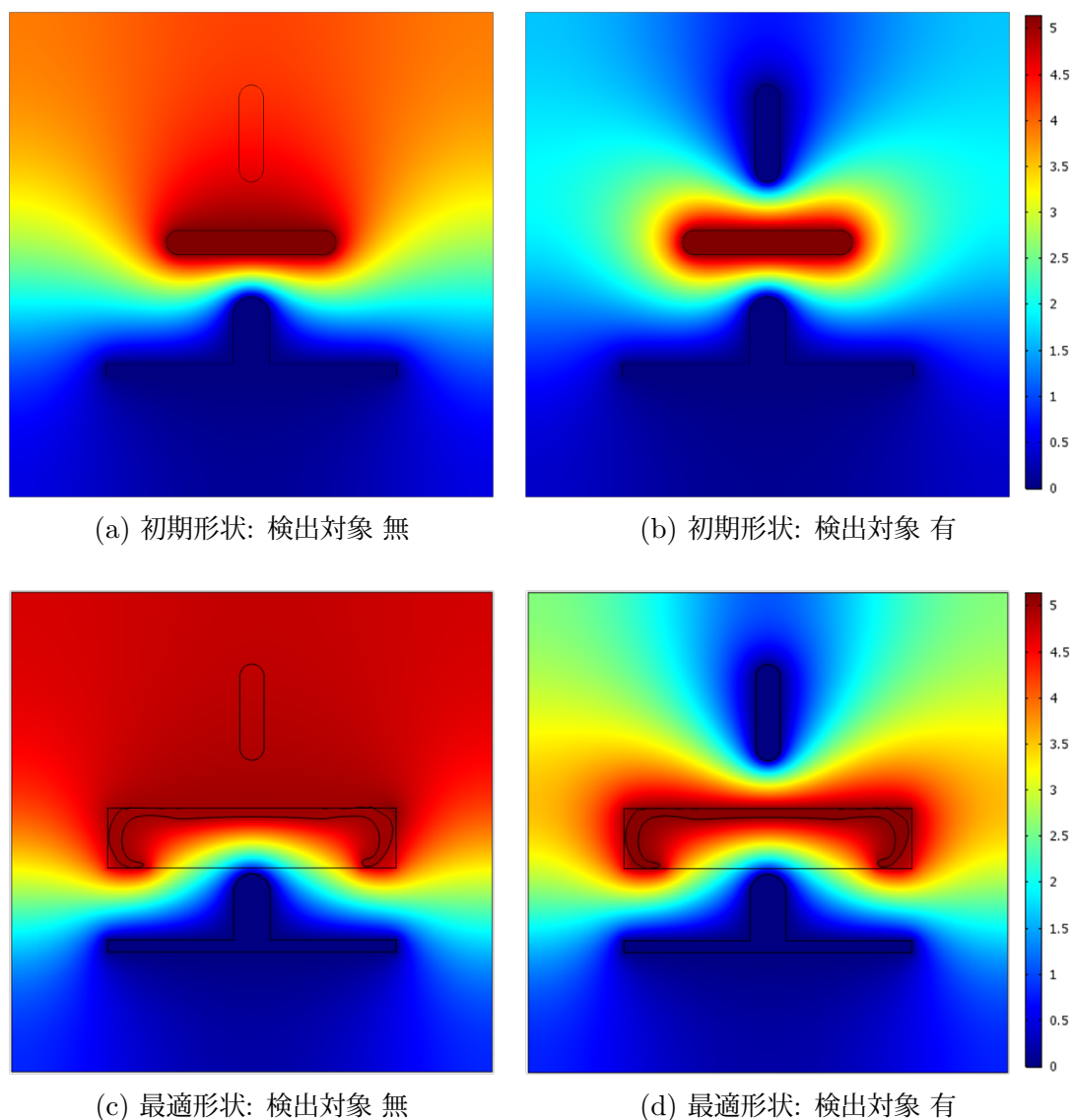


図 3.20: 例 2b: 初期形状と最適化後の電位分布 [V]

次に図 3.20 に検出対象の有無における初期形状と最適形状の電位分布を示す。まず初期形状に着目すると、凸型接地電極の上部付近の電位分布が検出対象がある場合とない場合で大きな変化が生じている。これに対して最適形状は検出対象の有無にかかわらず凸型接地電極と検出電極間の電位分布がほとんど変化せず、検知対象と検出電極間の電位分布のみが大きく変化している。これはつまり、接地電極との不要な結合容量の変動が最適化によって生じにくくなっており、検出対象との結合容量を高感度に検知できるようになったことを意味する。このような結果は、検知精度向上を狙った

静電センサに関する特許 [29] の知見と一致する。<sup>注1</sup>

### 3.9 まとめ

本章では、静電場を利用して指などの検出対象を検知するための静電容量タッチセンサのための形状最適化問題を定式化した。センサの検知感度は2つの状態決定問題から得られる解の差の  $H^1$  ノルムを2乗したものを目的関数として定義した。第1の状態決定問題は、検出電極と接地電極および空気から成る静電場問題で、検出対象は存在しない問題である。一方、第2の状態決定問題は、第1の問題に指などの検出対象が含まれた静電場問題である。また、検出電極の体積に対する制約を付加した。評価関数の形状微分は、2つの状態決定問題と2つの随伴問題の解を用いて導出された。この形状最適化問題の解を得るため、 $H^1$  勾配法による反復法を用いて数値解を得た。プログラムは、商用シミュレーションソフト COMSOL Multiphysics の JAVA API プログラミング機能を利用して作成された。

一連の数値解析例より、最適化対象である電極の設計領域が開けた状態では、電極が極めて薄い形状に遷移することで収束解が得られない場合があることが明らかとなった。それに対して、電極の設計領域を現実的な範囲で制限することによって、収束形状が得られることが明らかになった。

本章では収束形状を得るための制約として、電極の設計領域上での制約を用いたが、別の方法として境界の曲率に対して制約を設けることも考えられる。

---

<sup>注1</sup> 特許 [29] は、自動車座席の乗員種別を、座席内の検知電極の静電容量変化で検知するセンサに関する発明である。特徴は、特定の電極配置によって車両ボディなどと形成される不要な静電容量の変化を抑制し、検知感度を高めていることである。この特許は、著者が膨大なシミュレーション解析と試作実験の繰り返しにより、経験的に辿り着いた知見である。

## 第 4 章

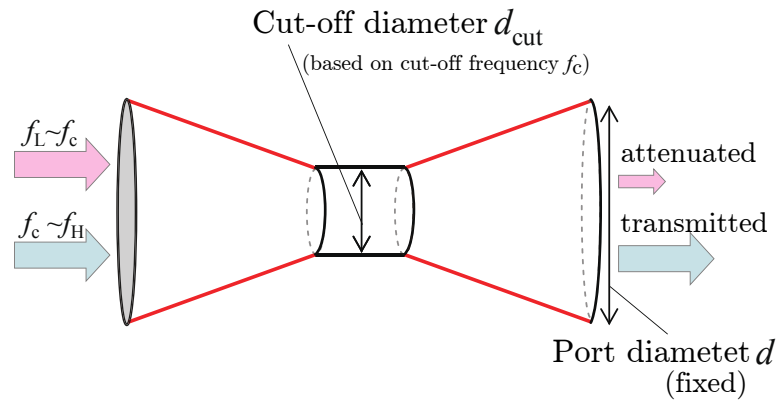
# 電磁場の周波数応答における形状最適化問題

### 4.1 はじめに

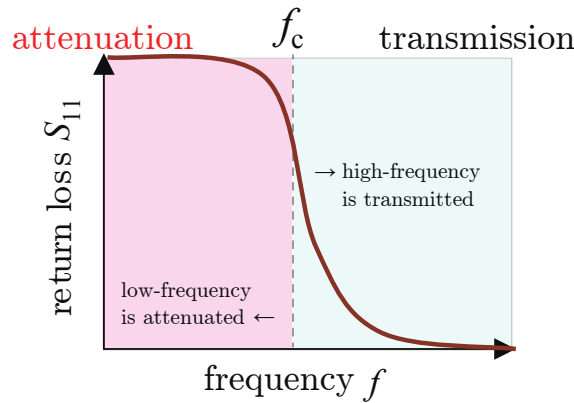
高周波電子デバイスは、様々な電子機器において今では欠かせないモノになっている。遠方との電気信号の送受に用いられるアンテナや高周波のエネルギー電送に用いられる導波管デバイスなどはその代表的な例である。

導波管は電子デバイスの中で、マイクロ波エネルギーあるいは信号を伝送するために用いられる。例えば車両や飛行機などのレーダ (1.0~76GHz), 携帯電話 (0.7~2.5 GHz) など様々に活用されている。導波管の機能は電磁波を伝送するだけでなく、特定の周波数範囲において、カットオフフィルタおよびディバイダとして利用され、電磁波の制御にも用いられる。カットオフフィルタとしての遮断性能は、一般に分散パラメータ ( $S$  パラメータ) により評価される。 $S$  パラメータは周波数に対するポートの入出力の電力を用いて定義される。

図 4.1 に導波管カットオフフィルタの一種であるハイパスフィルタの概要を示す。導波管の通過可能な周波数帯域ははその管断面の寸法により変化 (断面が小さいほど低周波の減衰が増加) する。このためハイパスフィルタとして導波管を構成したい場合は、経路途中の管径を縮小し、遮断周波数  $f_c$  に応じた径とすることで、所望の周波数未達の反射損失 (リターンロス  $s_{11}$ ) を向上させることができる。これにより図中 (b) のように低周波は損失が大きく、高周波は損失が小さく通過可能なフィルタが構成される。しかしフィルタの遮断周波数  $f_c$  近傍での損失カーブは導波管壁形状 (図中 (a) の赤線部) の影響により左右されることが知られている [33]。



(a) ハイパスフィルタのイメージ



(b) フィルタ周波数特性

図 4.1: 導波管ハイパスフィルタの概要

このように導波管はその形状が性能に影響を及ぼすため、最適な形状の設計がこれまでに研究されてきた。H面共振フィルタのパラメトリック形状最適化 [17] は、粗い有限要素モデルと細かいモデルを組み合わせる手法で実証された。この問題では、 $S$ パラメータを評価関数とにおいて、共振器の直径および長さを設計変数において定式化されている。また、文献 [16] においては、誘電材料の密度を設計変数として、 $S$ パラメータを目的関数においたノンパラメトリックなトポロジー最適化問題が定式化され、勾配法ベースの解法により、H-面導波管コンポーネントとしての最適な誘電材料密度分布が解析されている。しかしながら、これまでに導波管のためのノンパラメトリックな形状最適化問題に注目した研究はほとんど見当たらない。

そこで本章では、導波管カットオフフィルタを対象としたノンパラメトリック形状最適化問題を定式化し、その解法を示すこととする。本章の内容の一部は、文献 [30] を引用している。



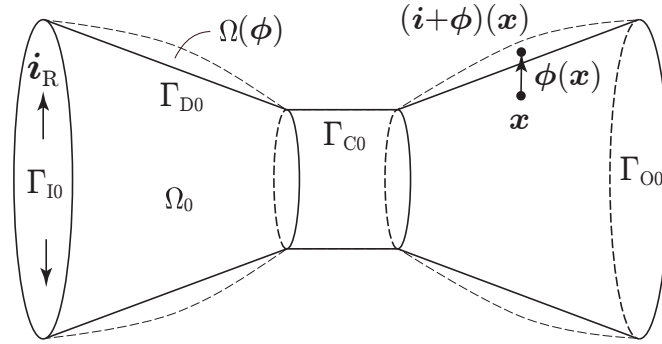


図 4.2: 円筒型導波管カットオフフィルタモデル

## 4.2 初期領域と領域写像の集合

単純化のため、本章では図 4.2 に示されるようなテーパ形状を備えた円筒導波管型ハイパスフィルタを扱うこととする。この導波管による電磁波の伝送モードは  $TE_{01}$  (Transverse Electric 01) モードであるとする。  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$  は空気で満たされた境界を持った初期の電磁場領域を表す。  $\Gamma_{I0} \subset \partial\Omega_0$  は入力信号の電流密度  $\mathbf{i}_R : \Gamma_{I0} \rightarrow \mathbb{R}^3$  が与えられる入力ポートの境界である。  $\Gamma_{O0} \subset \partial\Omega_0 \setminus \bar{\Gamma}_{I0}$  ( $\bar{\cdot}$  は閉包を表す) は伝送信号の出力ポートを意味する。残された境界  $\partial\Omega_0 \setminus (\bar{\Gamma}_{I0} \cup \bar{\Gamma}_{O0})$  は導波管の壁面を表し、完全導体 (PEC) であるとする。中央の円筒部  $\Gamma_{C0} \subset \partial\Omega_0 \setminus (\bar{\Gamma}_{I0} \cup \bar{\Gamma}_{O0})$  の管径は、設計において設定されるカットオフ周波数に基づいて決定される。そこで、カットオフ特性を向上させようとするならば、これらの既定境界を除いた  $\Gamma_{D0} = \partial\Omega_0 \setminus (\bar{\Gamma}_{I0} \cup \bar{\Gamma}_{O0} \cup \bar{\Gamma}_{C0})$  の形状を変化させればよいことになる。実際、文献 [33] では、実験的試行に基づいて、 $n$  乗コサイン曲線状の形状とすることで良好なカットオフ特性が得られることが示されている。

初期の電磁場領域  $\Omega_0$  において、形状最適化問題を定義するためには、その境界  $\partial\Omega_0$  は Lipschitz 境界であることが要求される。また設計変数は次の方法で定義する。初期領域から変動した領域を写像  $\phi$  によって与えられると仮定する。  $\mathbf{i}$  が恒等写像を表すこととすれば、変動後の領域は連続な 1 対 1 写像  $\mathbf{i} + \phi$  によって

$$\Omega(\phi) = \{(\mathbf{i} + \phi)(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \Omega_0\}$$

のようにつくられると仮定される。同様に、領域や境界に対して

$$(\cdot)(\phi) = \{(\mathbf{i} + \phi)(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in (\cdot)_0\}$$

を意味するものとする。また、後に評価関数の Fréchet 微分を定義するため、設計変数

$\phi$  に対して実 Hilbert 空間が定義されている必要がある。そこで  $\phi$  に対する線形空間を

$$X = \{\phi \in H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \mid \phi = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \text{ on } \Gamma_{I0} \cup \Gamma_{O0} \cup \Gamma_{C0}\} \quad (4.2.1)$$

とする。さらに、 $\phi$  の 1 対 1 写像が確実に満たされるようにするため、設計変数  $\phi$  の許容集合は以下のように定義される必要がある。

$$D = \{\phi \in X \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \mid \|\mathbf{i} + \phi\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)} \leq \sigma\} \quad (4.2.2)$$

ただし、 $\sigma$  は  $\mathbf{i} + \phi$  の逆写像が 1 対 1 写像となるように選んだ正定数とする。

### 4.3 状態決定問題

設計変数  $\phi \in D$  を用いて、電磁場領域の状態決定問題を定義する。導波管は周波数領域の電磁場問題で扱われるため、支配方程式は式 (2.3.12) で定義される。また入出力ポート  $\Gamma_{I0}$  と  $\Gamma_{O0}$  は非同次 Robin 条件の式 (2.3.22) で与えられ、導波管壁の境界  $\Gamma_D$  は完全導体 (PEC) の境界条件である式 (2.3.20) で与えられる。本研究では、サンプリング周波数の集合を  $F = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$  と書くことにして、それぞれのサンプリング周波数  $\omega \in F$  における導波管での電磁場領域におけるエネルギー伝達問題を以下のように定義する。

**問題 4.3.1 (導波管のエネルギー伝達問題)**  $\phi \in D$  と  $\mathbf{i}_R : \Gamma_{I0} \times \{\omega\} \rightarrow \mathbb{C}^3$  が与えられたとき、

$$\begin{aligned} \nabla \times \left( \frac{1}{\mu_R} \nabla \times \mathbf{e} \right) - k^2 \left( \epsilon_R - \frac{j\sigma}{\omega \epsilon_0} \right) \mathbf{e} &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \text{ in } \Omega(\phi) \times \{\omega\}, \\ \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{e} &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \text{ on } \Gamma_D(\phi) \times \{\omega\}, \\ \frac{1}{\mu_R} \boldsymbol{\nu} \times (\nabla \times \mathbf{e}) + \gamma_R \boldsymbol{\nu} \times (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{e}) &= \mathbf{i}_R \text{ on } \Gamma_{I0} \times \{\omega\}, \\ \frac{1}{\mu_R} \boldsymbol{\nu} \times (\nabla \times \mathbf{e}) + \gamma_R \boldsymbol{\nu} \times (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{e}) &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \text{ on } \Gamma_{O0} \times \{\omega\} \end{aligned}$$

を満たす電場  $\mathbf{e} : \Omega(\phi) \times \{\omega\} \rightarrow \mathbb{C}^3$  を求めよ。ただし、 $k = \omega/c_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ 、 $\gamma_R$  は電磁場のポート条件で決まる定数、 $\mu_R$  は給電側ポートの電力によって決まる定数である。□

この後、すべてのサンプリング周波数  $\omega \in F$  に対する  $\mathbf{e}(\cdot, \omega)$  を  $\mathbf{e}$  として記述することにする。形状最適化問題においては状態決定問題は等式制約となる。Lagrange

乗数法を用いる場合は、状態決定問題に対する Lagrange 関数が必要となる。そこで、問題 4.3.1 の Lagrang 関数を

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_M(\phi, \mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}}^c) = & \sum_{\omega \in F} \left[ - \int_{\Omega(\phi)} \left\{ \frac{1}{\mu_R} (\nabla \times \mathbf{e}) \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{e}}^c) \right. \right. \\
& + k^2 \left( \epsilon_R - \frac{j\sigma}{\omega \epsilon_0} \right) \mathbf{e} \cdot \bar{\mathbf{e}}^c \left. \right\} dx \\
& + \int_{\Gamma_{I0}} \{ i_R \cdot \bar{\mathbf{e}}^c + \gamma_R (\mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot (\bar{\mathbf{e}}^c \times \boldsymbol{\nu}) \} d\gamma \\
& + \int_{\Gamma_{O0}} \gamma_R (\mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot (\bar{\mathbf{e}}^c \times \boldsymbol{\nu}) d\gamma \\
& + \int_{\Gamma_D(\phi)} \frac{1}{\mu_R} \left\{ (\nabla \times \mathbf{e}) \cdot (\bar{\mathbf{e}}^c \times \boldsymbol{\nu}) \right. \\
& \left. + (\nabla \times \bar{\mathbf{e}}^c) \cdot (\mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}) \right\} d\gamma \left. \right] \tag{4.3.1}
\end{aligned}$$

と定義しておく。ここで、 $\bar{\mathbf{e}} : \Omega(\phi) \times \{\omega\} \rightarrow \mathbb{C}^3$  は Lagrange 乗数 ( $\mathbf{e}$  の随伴変数) であり、以下に属するものとする。

$$\begin{aligned}
U = & \{ \mathbf{u} \in L^2(\Omega(\phi) \times F; \mathbb{C}^3), \\
& \nabla \times \mathbf{u} \in L^2(\Omega(\phi) \times F; \mathbb{C}^3), \\
& \mathbf{u} \times \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \text{ on } \Gamma_{D0} \times F \} \tag{4.3.2}
\end{aligned}$$

$(\cdot)^c$  は複素共役を表す。この Lagrange 関数を用いれば、問題 4.3.1 の弱形式は、任意の  $\bar{\mathbf{e}} \in U$  に対して以下の式で示される。

$$\mathcal{L}_M(\phi, \mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}}^c) = 0$$

問題 4.3.1 の弱解  $\mathbf{e}$  は、 $i_R$  が適切に与えられていれば、 $U$  に含まれる [18, 26]。しかし、形状最適化問題においては、さらなる滑らかさが必要となる。特異点を除いて  $D$  の領域変動が得られるためには、 $\mathbf{e}$  は次のような許容集合に入る必要がある。

$$S = U \cap W^{1,\infty}(\Omega(\phi) \times F; \mathbb{C}^3) \tag{4.3.3}$$

$\mathbf{e}$  が  $S$  に入るためには、境界条件を適切に設定する必要がある [3, 定理 9.8.6]。

## 4.4 導波管カットオフフィルタの形状最適化問題

上記において状態決定問題の解である電場  $\mathbf{e}$  が決定された。本節ではフィルタ性能を向上させるための目的関数を定義する。電磁波を扱う工学分野では、一般的に、フィ

ルタ性能を評価する際に  $S$  パラメータが用いられる. このパラメータを実験で測定することは容易であるが,  $e$  を用いて厳密に定義することは容易ではない. そこで本章では, 入力ポート  $\Gamma_{10}$  での符号付電力消費量, すなわち

$$f(\phi, e) = \sum_{\omega \in F} w_R \int_{\Gamma_{10}} \operatorname{Re}[\mathbf{i}_R \cdot \mathbf{e}] d\gamma \quad (4.4.1)$$

を目的関数とおく. ここで,  $w_R: F \rightarrow \mathbb{R}$  は重み関数であり, カットオフ周波数  $\omega_C$  に対するハイパスフィルタとしての特性の定義より

$$w_R = \begin{cases} \operatorname{sign} \left( \int_{\Gamma_{10}} \operatorname{Re}[\mathbf{i}_R \cdot \mathbf{e}] d\gamma \right) & \text{for } \omega < \omega_C \\ -\operatorname{sign} \left( \int_{\Gamma_{10}} \operatorname{Re}[\mathbf{i}_R \cdot \mathbf{e}] d\gamma \right) & \text{for } \omega \geq \omega_C \end{cases} \quad (4.4.2)$$

で与えられるものとする. ここで,  $\operatorname{sign}(\cdot)$  は  $(\cdot) > 0$  のとき  $1$ ,  $(\cdot) < 0$  のとき  $-1$  をとるシグナル関数である.

これより目的関数  $f$  を用いて, 導波管ハイパスフィルタの形状最適化問題を以下のように定義する.

**問題 4.4.1** (導波管ハイパスフィルタの形状最適化問題)  $\phi \in \mathcal{D}$  に対する問題 4.3.1 の解  $e$  と式 (4.4.1) の  $f_0$  に対して,

$$\min_{\phi \in \mathcal{D}} \{f(\phi, e) \mid e \in \mathcal{S}, \text{ 問題 4.3.1}\}$$

を満たす  $\Omega(\phi)$  を求めよ. □

## 4.5 評価関数の形状微分

$H^1$  勾配法の形状更新アルゴリズムにより形状最適化問題 4.4.1 を解くため, 評価関数  $f$  の形状微分が必要となる. ここでは随伴変数法を用いてその形状微分を求める.

問題 4.3.1 に対する随伴変数として  $\bar{e} \in \mathcal{S}$  を用い, 目的関数  $f$  の Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}(\phi, e, \bar{e}^c) = f(\phi, e) + \operatorname{Re}[\mathcal{L}_M(\phi, e, \bar{e}^c)] \quad (4.5.1)$$

と定義する.  $\varphi \in X$  を  $\Omega(\phi)$  からの任意の領域変動とする.  $\mathcal{L}$  の形状微分は以下のようにかける.

$$\mathcal{L}'(\phi, e, \bar{e}^c)[\varphi, e', \bar{e}'^c] = \mathcal{L}_\phi(\phi, e, \bar{e}^c)[\varphi]$$

$$+ \mathcal{L}_e(\phi, e, \bar{e}^c)[e'] + \mathcal{L}_{\bar{e}^c}(\phi, e, \bar{e}^c)[\bar{e}'^c] \quad (4.5.2)$$

ここで、 $e$  が問題 4.3.1 の解ならば、式 (4.5.2) 右辺の第 3 項は 0 となる。また、 $\bar{e}$  が次の問題 4.5.1 の解のとき、式 (4.5.2) 右辺の第 2 項も 0 となる。

**問題 4.5.1** (問題 4.3.1 の随伴問題)  $\phi \in \mathcal{D}$  と  $\omega \in F$  に対して、問題 4.3.1 の解  $e$  が与えられたとき、

$$\begin{aligned} \nabla \times \left( \frac{1}{\mu_R} \nabla \times \bar{e}^c \right) - k^2 \left( \epsilon_R - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon_0} \right) \bar{e}^c &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \text{ in } \Omega(\phi) \times \{\omega\}, \\ \boldsymbol{\nu} \times \bar{e}^c &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \text{ on } \Gamma_D(\phi) \times \{\omega\}, \\ \frac{1}{\mu_R} \boldsymbol{\nu} \times (\nabla \times \bar{e}^c) + \gamma_R \boldsymbol{\nu} \times (\boldsymbol{\nu} \times \bar{e}^c) &= w_R \mathbf{i}_R \text{ on } \Gamma_{I0} \times \{\omega\}, \\ \frac{1}{\mu_R} \boldsymbol{\nu} \times (\nabla \times \bar{e}^c) + \gamma_R \boldsymbol{\nu} \times (\boldsymbol{\nu} \times \bar{e}^c) &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \text{ on } \Gamma_{O0} \times \{\omega\} \end{aligned}$$

を満たす  $\bar{e} : \Omega(\phi) \times \{\omega\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  を求めよ。  $\square$

問題 4.3.1 と問題 4.5.1 の違いは、 $\mathbf{i}_R$  に重み関数  $w_R$  が付け加えられたことである。 $w_R$  は 1 または  $-1$  をとるので、 $e$  と  $\bar{e}$  には

$$\bar{e}^c = w_R e \quad (4.5.3)$$

の関係を持つ。これは準自己随伴といえる関係を持っており、状態決定問題の解  $e$  を求めれば随伴問題の解  $\bar{e}$  が容易に導出できることを意味し、実際の最適化問題の解法における計算コストを削減できるメリットがある。

$e$  と  $\bar{e}$  がそれぞれ問題 4.3.1 と問題 4.5.1 の解であるとき、式 (4.5.2) の第 1 項は、 $\tilde{f}(\phi) = f(\phi, e(\phi))$  の形状微分となる。関数の形状微分の公式 [3, 命題 9.3.3, 命題 9.3.7] を適用すれば

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi(\phi, e, \bar{e}^c)[\varphi] &= \tilde{f}'(\phi)[\varphi] = \langle \mathbf{g}, \varphi \rangle \\ &= \sum_{\omega \in F} \int_{\Omega(\phi)} (\mathbf{G}_\Omega \cdot \nabla \varphi^T + g_\Omega \nabla \cdot \varphi) dx \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

を得る。ここで

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\Omega &= \frac{2w_R}{\mu_R} \text{Re} \left[ (\nabla \times e) (\nabla \times e)^T \right], \\ g_{\Omega i} &= -\frac{w_R}{\mu_R} \text{Re} [(\nabla \times e) \cdot (\nabla \times e)] - w_R k^2 \left( \epsilon_R - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon_0} \right) \text{Re} [e \cdot e] \end{aligned}$$

である。 $\mathbf{g} \in X'$  は  $f$  の形状微分を与える。

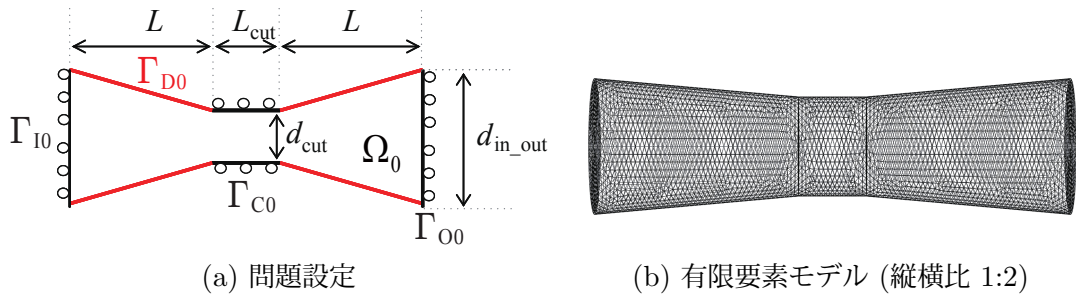


図 4.3: 例: 円筒導波管ハイパスフィルタの問題設定

## 4.6 最適化問題の解法

4.5 節にて、導波管形状最適化問題における評価関数  $f$  の形状微分  $g$  を求めた。この  $g$  を用いて、3.6 節で述べた  $H^1$  勾配法を適用すれば、 $f$  が減少するような領域変動  $\varphi_g \in X$  を求めることが可能となる。ここでは重ねての説明を省略する。

## 4.7 解析例

導波管ハイパスフィルタに対する形状最適化問題 4.4.1 を解くために、3 章と同様、有限要素法解析ソフトウェア COMSOL Multiphysics の JAVA API 機能を用いてプログラムを作成した。以降の解析例では、以下の設定が使われた。

- 円筒導波管の初期形状を図 4.3 の  $\Gamma_{D0}$  とする。導波管は  $TE_{01}$  で電力伝送を行うハイパスフィルタであるとする。カットオフ周波数を  $\omega_C/(2\pi) = 50.0$  GHz に設定して、それより  $\Gamma_{C0}$  部の管径  $d_{cut}$  を 7.36 mm と設定した。また、他の寸法は、それぞれ  $L = 20$  mm,  $L_{cut} = 10$  mm,  $d_{in\_out} = 18.4$  mm と設定した。
- ポート  $\Gamma_{I0}$  と  $\Gamma_{O0}$  の特性インピーダンスを 50 [ohm] と仮定した。
- $\Gamma_{I0}$ ,  $\Gamma_{O0}$  および  $\Gamma_{C0}$  の形状変動を拘束した (式 (4.2.1))。
- サンプリング周波数を  $F = \{\omega_1, \omega_2\}$  と仮定して、 $\omega_1/(2\pi) = 49.6$  GHz,  $\omega_2/(2\pi) = 50.4$  GHz と設定した。また、式 (4.4.2) の  $w_R$  を  $\omega_1, \omega_2$  に対してそれぞれ 1 および -1 とおいた。

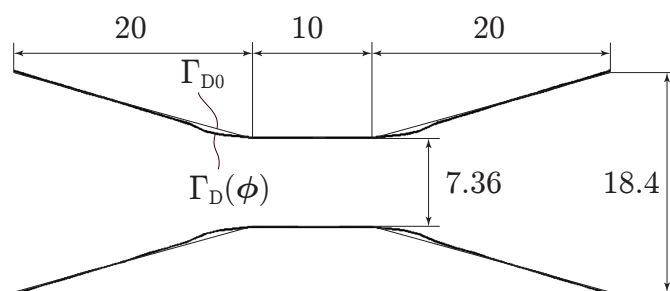


図 4.4: 最適化前後の導波管形状の比較 (単位: mm)

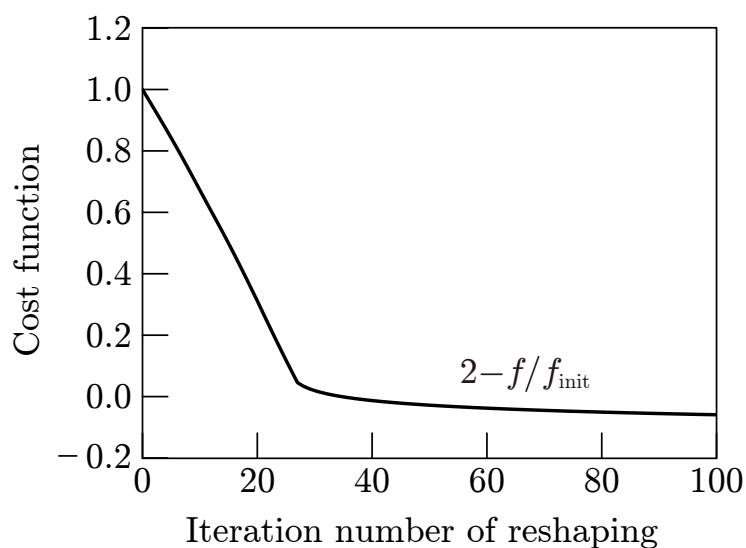


図 4.5: 形状更新に対する評価関数の推移

最適化後の形状を図 4.4 の  $\Gamma_D(\phi)$  に示す. テーパー部の付け根部分に注目すると, 中央の拘束された円筒部との接続部付近が滑らかな形状に変化している. 図 4.5 は, 形状更新に対する目的関数  $f$  の変遷を示す. ここで,  $f_{\text{init}}$  は初期形状での  $f$  の値を表している. この反復履歴から, 形状更新に伴って目的関数は減少し, 更新回数が 100 回でほぼ収束している. また, フィルタ性能の指標に用いられる  $S$  パラメータ (リターンロス  $s_{11}$ ) を調べると, 図 4.6 のようになった. カットオフフィルタの性能を評価する指標として, 一般に, カットオフ周波数  $\omega_C/(2\pi)$  ( $= 50 \text{ GHz}$ ) のときの  $s_{11}$  から,  $-10 \text{ dB}$  以下となる周波数  $\omega/(2\pi)$  までの周波数の差が使われる. 理想的にはこの間隔が小さいほど優れたカットオフフィルタであるとみなされる. 初期形状ではその差が  $580 \text{ MHz}$  であったのに対し, 最適化後は  $120 \text{ MHz}$  と約  $77\%$  改善している. これにより, 今回の形状最適化計算によって得られた形状は, フィルタ性能が向上していることが確認された.

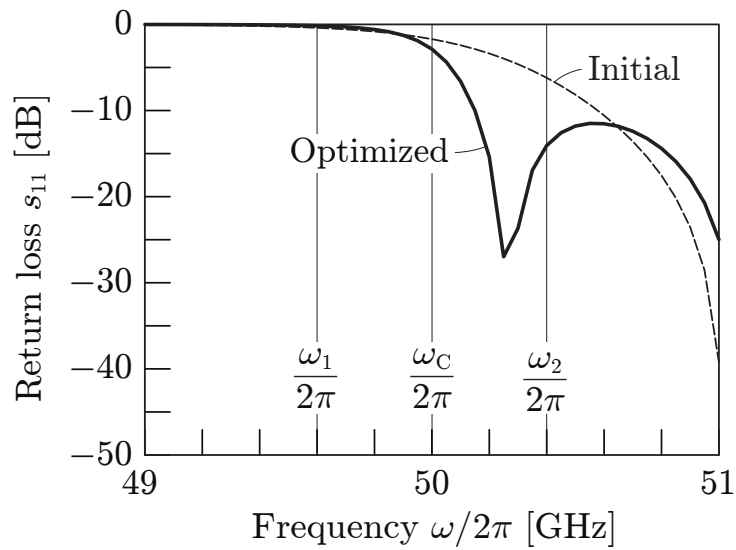


図 4.6: 最適化によるフィルタ特性  $s_{11}$  の変化

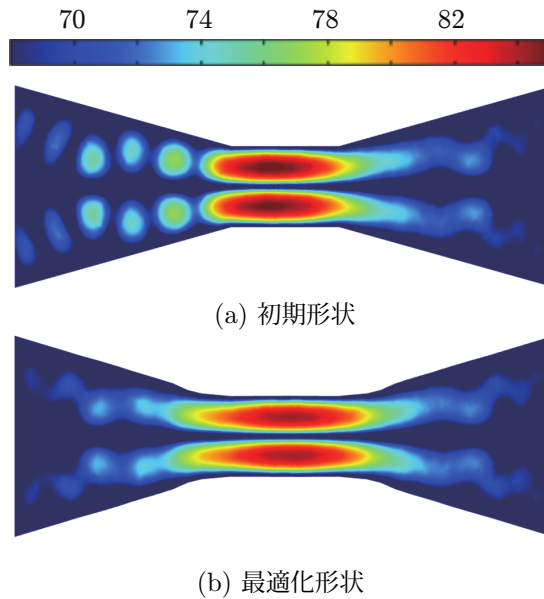


図 4.7: 50.2GHz 入力時の電界強度分布 [dBV/m]

図 4.7 は、初期形状と最適化形状のときの 50.2 GHz における電界分布を示す。最適化後の電界分布は、初期形状のもの比べて滑らかな分布（入力ポート側のテーパ部における電界の分断が少ない）となっている。この結果は、初期形状では入力ポートでの電磁波の反射が多く生じているのに対して、最適化後の形状では、50.2 GHz の電磁波が通過するようになり、反射が減じたことを表している。



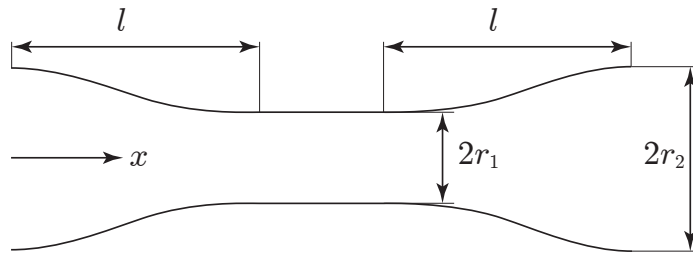


図 4.8: 式 (4.7.1) を用いた経験的設計による形状

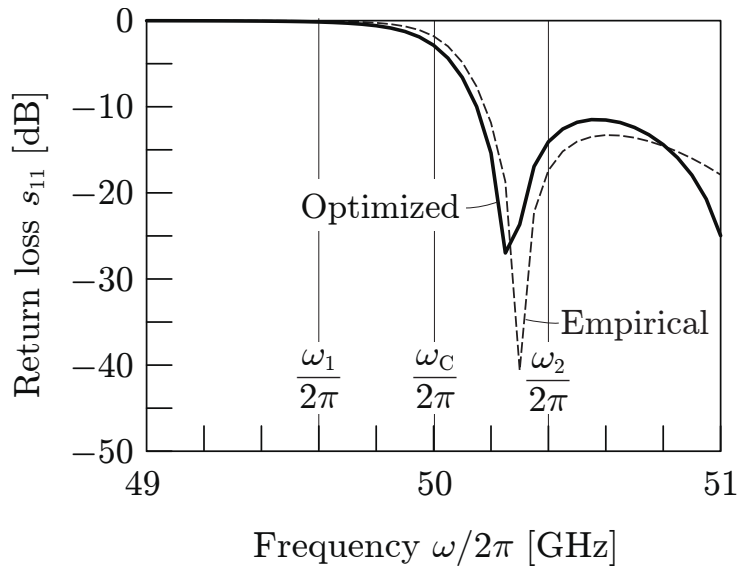


図 4.9: 最適化で得た形状と経験的設計の  $s_{11}$  特性の比較

さらに、実験に基づいて提案された文献 [33] の結果と比較する。文献 [33] で提案されている導波管は、管の半径  $r : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  が

$$r(x) = r_1 + (r_2 - r_1) \cos^3 \frac{\pi x}{2l} \quad (4.7.1)$$

のように決定される。この式に基づいて描かれた導波管の形状を図 4.8 に示す。この形状は、入出力部から中心の狭管までの接続形状が滑らかな形状となることが特徴である。本研究で得られた形状 (図 4.4) も同様の特徴を有している。

実験式 (4.7.1) に基づく導波管と本研究で得られた導波管のフィルタ性能 (リターンロス  $s_{11}$ ) を比較した結果を図 4.9 に示す。  $f_c = \omega_c / (2\pi)$  から  $s_{11}$  が  $-10$  dB になる周波数間隔は、実験式 (4.7.1) に基づく導波管では 140MHz, 本研究で得られた導波管では 120MHz であった。両者は非常に近い特性を示しており、形状最適化で得られた形状の妥当性が確認されたと著者は考える。

## 4.8 まとめ

本章では、テーパ状の管径差により、高周波を通過させ、低周波を遮断するような電磁波のフィルタ (ハイパスフィルタ) として動作する円筒導波管の形状最適化問題を定式化した。フィルタ性能は、入出力部と狭域部を接続するテーパ状管壁の形状により変化するため、その形状を設計対象とした。目的関数には、設計するフィルタ特性を考慮して、カットオフ周波数近傍にとったサンプリング周波数における入力ポートの電力消費量の和が選ばれた。ただし、電力消費量にはフィルタ性能に応じた符号がつけられているものとした。目的関数に入力ポートの電力消費量を選んだことにより、目的関数の形状微分を求める際に必要となる随伴問題は、符号の違いを除いて状態決定問題と同一となることが示された。その結果に基づいて、目的関数の形状微分は状態決定問題の解だけで構成される結果を得た。

上記の理論に基づいて、具体的な導波管の形状最適化を行うためのプログラムを作成した。形状最適化問題の解法は、 $H^1$  勾配法に基づいた反復法を用いた。プログラムコードは、汎用有限要素法解析プログラム COMSOL Multiphysics の JAVA API 機能を用いて書かれた。作成されたプログラムを用いて円筒導波管の形状最適化解析を行った。その結果、最適化により中央の狭径な円筒部との接続部付近のテーパ部分が滑らかな形状に変化する形状が得られた。得られた形状に対してフィルタ性能の評価に使われるリターンロス  $s_{11}$  を求めてみた結果、カットオフ周波数付近で急激に減少する (フィルタ性能が向上する) グラフが得られた。また、伝統的な経験則から導出された形状と本解析で得られた形状を比較すると、テーパ部付近が滑らかな特徴は類似し、両者のリターンロス  $s_{11}$  は非常に近い特性を示していることが確認された。これより、経験則と同等の形状が理論的に導出されることが確認された。

本解析に用いた汎用有限要素法解析プログラムでは、サンプリング周波数の個数が2に制限された。もしも、サンプリング周波数の数を増やすことができれば、更なるフィルタ性能の改善によって、経験則の設計以上の導波管も設計可能であると考えられる。

## 第5章

### 結論

本論文では、電磁場領域の電気・電子機器の形状設計問題、特に電子デバイスである静電式タッチセンサスイッチや導波管フィルタの形状設計に対して、ノンパラメトリック形状最適化問題を定式化し、数理解析手法により数値解が得られることを明らかにした。

本論文の第1章では、電気・電子機器の製品設計における現状と課題を概観し、本論文の目的を述べた。現代の電気・電子機器では形状が性能に寄与する製品が増加している。それらの形状を設計するためには、多数の制約を考慮しなければならない。しかし、近年の製品開発に対する期間短縮要請により、設計に十分な時間を割くことができなくなっている。著者は、それを解決する方法の一つとして、電磁場領域を対象にした形状最適化技術があることを見出した。しかしながら、電磁場領域での形状最適化に関する研究は十分には行われておらず、特に、形状変動を関数で定式化したノンパラメトリック形状最適化に関しては、先行研究が見当たらない。一方、構造・流体分野などではノンパラメトリック最適化手法が開発され、産業応用が行われている。そこで、著者はその手法を電子デバイスに応用することを決意し、具体的な2つの電子デバイスに対して、下記のことを明らかにすることを目的と定めた。

- (1) 電子機器の設計指標を考慮しながら定式化が可能な評価関数を見つける。
- (2) 評価関数の形状微分を求める方法を示す。
- (3) 数値例により有効性を確認する。

第2章では、電磁場の支配方程式から電気・電子機器設計で使われる式を導出した。

第3章においては、静電場の変化を利用して指などを検知する、静電式タッチセンサスイッチの電極形状を最適化する問題に対して、上記(1)~(3)について述べた。センサの検知感度は2つの状態決定問題から得られる解の差に対する  $H^1$  2乗ノルムを目的関数として定義した。また、制約関数として電極の体積を採用した。評価関数の形状微分は、2つの状態決定問題および2つの随伴問題の解を用いて導出された。体積制約の下で負の誤差ノルムを最小化することを目的とした形状最適化問題の解を得るため、 $H^1$  勾配法を用いた反復法を採用した。数値解析プログラムは、汎用有限要素法解析プログラム COMSOL Multiphysics の JAVA API によって書かれた。そのプログラムを用いた数値解析により、電極の設計領域を制限しない場合には、電極が極めて薄い形状に変化し、収束解が得られないことがあることが明らかとなった。しかし、電極の設計領域を制限すれば、最適な収束形状解が得られること明らかにした。本章では、収束形状を得るために、電極の設計領域を制限したが、別の方法として境界の曲率を制約することも考えられる。

第4章では、高周波の電磁波を伝送する際にハイパスフィルタとして使われる、円筒型導波管の管壁形状を最適化する問題を定式化した。導波管の管壁形状を設計対象に選び、目的関数には導波管の入力ポートにおける各サンプリング周波数での電力消費量の和を用いた。サンプリング周波数はカットオフ周波数の前後にとられ、電力消費量の係数には、フィルタ特性に対応した係数をつけられた。目的関数に電力消費量を選んだことにより、準自己随伴と呼べる関係が成立し、形状微分が状態決定問題の解だけで計算されることを示した。その結果に基づいて、第3章と同様に、 $H^1$  勾配法を用いた反復法による数値解析プログラムを COMSOL Multiphysics の JAVA API を利用して作成した。円筒型導波管の数値モデルに対して得られた最適化形状は、テーパ部分が滑らかな形状に変化した。そのときのフィルタ性能は、リターンロス  $s_{11}$  のカットオフ周波数付近での変化が初期形状と比べ急峻に改善されたことにより確認された。また、経験則から導出された形状と本解析によって得られた形状を比較して、両者のリターンロス  $s_{11}$  は非常に近い特性を示すことを明らかにした。これより、本導波管ハイパスフィルタの形状最適化を用いることでこれまでの経験則と同等の形状を導出できることが確認された。本研究では、サンプリング周波数が2つしかとれなかったが、その数を増やすことにより、経験則の設計以上のフィルタ設計も可能であると考えられる。

終わりに電磁場分野の形状最適化の今後の展望を整理し、今後の課題について考える。近年、様々な産業において電動化が急速に進み、電気・電子機器を使わない場所は

もはや考えられない状況になっている。自動車業界をみれば、環境法規や自動運転の出現によりその傾向は加速している。一台の自動車にさまざまな電子・電気機器部品、例えばレーダや超音波ソナーなどの認識センサ群、ナビゲーションや運転支援システムなどの処理システム、車速センサや舵角センサなど制御系、などが膨大に搭載されるようになり、それらが連携して車両機能を実現するようになり始めている。このように従来までの「1部品1機能」の設計・開発から、「複数部品1機能」や「複数部品複数機能」の設計・開発が必要となってきた。一方、電磁場領域におけるCAEは、20世紀末より発展し、今では設計開発の基盤として生産性の向上に貢献している。しかし、上記の高まる需要には応えられていない。

このような劇的な設計・開発状況の変化に対応していくためには、今後、電磁場領域の形状最適化として以下の課題に対応していくことが必要であると著者は考える。

- 連成領域での形状最適化：

自動運転技術や車両の電動化において、これまで領域が切り分けられていた現象が密接に絡みあう中で使われるケースが増えてきた。たとえば、近年近距離向けのセンシングデバイスとして搭載が増えている自動車用超音波ソナーセンサでは、圧電現象により電気信号を構造振動に変換し、その構造振動が空気振動を生じさせ超音波として気中を伝播・反射し、その反射音波を再度電気信号に変換することで測距を行っている。つまりソナーを設計する場合、電気・構造・音響領域の連成問題を考えなければならない。形状最適化を試みる場合においても連成問題を状態決定問題に設定しなければならなくなる。

- 電磁場分野でのロバスト最適化設計：

自動運転の機能のように、1機能に複数の部品が介在するようになった場合、現実には量産において個々の部品に性能や特性のばらつきが生じる。このような部品を組み合わせた場合、ばらつきの組み合わせにより、機能として所望の性能を満たせない可能性が生じる。そこで、複数の部品に対する特性のばらつきの影響を考慮した、ばらつきに強い(ロバストな)設計を構築できる技術の開発が必要である。

最期に電磁場領域の形状最適化に関する研究動向を述べよう。最適化分野の国際会議 WCSMO-11 (The 11th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, 2015年開催) [24] では全343件の発表中、電磁場領域関連の発表はわずか6件ほどであった。その4年後、2019年の WCSMO-13 でも9件しかなく、まだまだ電磁場領域の形状最適化に取り組む研究者が少ない状況が伺える。上記で述べ

たとおり課題とその解決が社会に寄与する影響も大きい分野であるため、これからも多くの基礎研究および産業応用に向けた開発が進むことを期待したい。著者も当該分野の研究開発を継続し、微力ながら貢献していく所存である。

## 記号法

基本ルールを以下に示す。問題に依存する場合はより一般的な場合に従う。

- $a, \alpha, \dots$  小文字をスカラー, ベクトル, 関数に用いる.
- $\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}, \dots$  太文字を有限次元のベクトルとそれを値域にもつ関数に用いる.
- $A, \mathcal{A}, \Lambda, \dots$  大文字を集合, 行列の要素に用いる.
- $\mathbf{A}, \boldsymbol{\Lambda}, \dots$  太大文字を有限次元の行列とそれを値域にもつ関数に用いる.
- $\mathcal{L}, \mathcal{H}$  Lagrange 関数, Hamilton 関数に用いる.
- $x := x + y$   $x + y$  を  $x$  に代入することを意味する.

## 集合

以下,  $m, n, d$  を自然数とする.

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  それぞれ自然数 (正整数), 整数, 有理数, 実数, 複素数全体の集合を表す.
- $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  集合  $A$  は  $a_1, \dots, a_m$  の要素あるいは点からなることを表す.
- $|A|$  有限集合  $A$  の要素の数を表す.
- $a \in A$   $a$  は集合  $A$  の要素であることを表す.
- $\{0\}$   $0$  だけからなる集合を表す.
- $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$  無限点列  $\{a_1, a_2, \dots\}$  を表す.
- $A \subset B$  集合  $A$  が集合  $B$  の部分集合であることを表す.
- $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$  集合  $A$  と集合  $B$  の和集合, 積集合, 差集合を表す.
- $(0, 1), [0, 1], (0, 1]$   $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}, \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}, \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$  を表す.
- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$   $\mathbb{R}^d$  の領域 (単連結開集合) を表す.
- $\bar{\Omega}$   $\Omega$  の閉包 (closure) を表す.

$\partial\Omega$   $\Omega$  の境界  $\bar{\Omega} \setminus \Omega$  を表す.

$|\Omega|$   $\int_{\Omega} dx$  を表す.

$dx, d\gamma, da$  領域積分, 境界積分, 部分境界の境界上の積分微小測度に用いる.

## ベクトルと行列

以下,  $\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$  のベクトルと行列を考える.

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d$   $d$  次元の縦実ベクトルを表す.  $x_i$  は  $\mathbf{x}$  の  $i$  番目の要素を表す.  $\mathbf{x}^T$  は  $\mathbf{x}$  の転置を表す.

$\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$   $\mathbb{R}^d$  の零元を表す. 混乱がなければ  $\mathbf{0}$  とかく.

$\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^d, p}$   $p \in [1, \infty]$  として,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  の  $p$  乗ノルム  $\sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_d|^p}$  を表す.  $p = \infty$  のとき, 最大値ノルム  $\max\{|x_1|^p, \dots, |x_d|^p\}$  を表す. 混乱がなければ  $\|\mathbf{x}\|_p$  とかく.

$\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^d}$   $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  の Euclid ノルム  $\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$  を表す. 混乱がなければ  $\|\mathbf{x}\|$  とかく.

$\mathbf{A} = (A_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times n}$   $m$  行  $n$  列の実行列を表す. 混乱がなければ  $\mathbf{A} = (A_{ij})$  とかく.

$\mathbf{0}_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)}$   $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$  の零元を表す. 混乱がなければ  $\mathbf{0}$  とかく.

$a_i = B_{ij}c_j$   $a_i = \sum_{j=1}^d b_{ij}c_j$  あるいは  $\mathbf{a} = \mathbf{B}\mathbf{c}$  を表す (Einstein 総和規約).

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$   $a_i b_i, A_{ij} B_{ij}$  を表す.

$\delta_{ij}$  Kronecker デルタ  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$  を表す.

$\mathbf{I}_{\mathbb{R}^{m \times m}}$  単位行列  $(\delta_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  を表す. 混乱がなければ  $\mathbf{I}$  とかく.

$\text{diag } \boldsymbol{\lambda}$   $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$  に対して,  $\mathbf{I}\boldsymbol{\lambda} = (\delta_{ij}\lambda_i)$  を表す.

## Banach 空間

以下,  $V$  をノルム空間,  $X$  を Banach 空間とする.

$\|\mathbf{x}\|_V$   $\mathbf{x} \in V$  のノルムを表す. 混乱がなければ  $\|\mathbf{x}\|$  とかく.

$X'$   $X$  の双対空間を表す.

$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_{X' \times X}$   $\mathbf{x} \in X$  と  $\mathbf{y} \in X'$  の双対積を表す. 混乱がなければ  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$  とかく.



## 関数と微分

以下,  $X, Y, Z$  を Banach 空間とする.

$f: X \rightarrow Y$   $X$  から  $Y$  への写像 (関数) を表す.

$f(\mathbf{x}): X \ni \mathbf{x} \mapsto f \in Y$  要素を明示した写像を表す.

$\mathcal{L}(X; Y)$   $X$  から  $Y$  への線形作用素全体の集合を表す.

$\nabla f(\mathbf{x})$   $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  のとき, ある  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  における,  $f$  の微分  $\partial f(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  を表す.

$\Delta f(\mathbf{x})$   $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  のとき, ある  $\mathbf{x} \in X$  における,  $\nabla \cdot \nabla f(\mathbf{x})$  を表す.

$f'(\mathbf{x})[\mathbf{y}]$   $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  のとき, ある  $\mathbf{x} \in X$  における, 任意の  $\mathbf{y} \in X$  に対する  $f$  の Fréchet 微分  $\langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle_{X' \times X}$  を表す.

$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})[z], \partial_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})[z]$   $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  のとき, ある  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times Y$  における, 任意の  $z \in X$  に対する  $f$  の Fréchet 偏微分  $\langle \partial f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) / \partial \mathbf{x}, z \rangle_{X' \times X}$  を表す.  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) / \partial \mathbf{x} \in X'$  を  $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  とかく.

$\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}^T, \mathbf{f}_{\mathbf{x}^T}$   $\mathbf{f}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$  のとき, Jacobi 行列  $(\partial f_i / \partial x_j): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d$  を表す.

$\partial_{\nu} f$   $f: \mathbb{R}^d \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  のとき,  $\nu$  を  $\partial \Omega$  上の外向き法線として,  $\nu \cdot \nabla f$  を表す.

$\partial_{\varphi} f$   $f: \mathbb{R}^d \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  のとき,  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  として,  $\varphi \cdot \nabla f$  を表す.

## 関数空間

$C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$   $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$  上で定義された連続関数  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  全体の集合を表す.

$C^m(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$   $m$  階までの導関数が  $C^m(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$  に属する関数全体の集合を表す.

$C_0^m(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$   $\{\mathbf{f} \in C^m(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n) \mid \mathbf{f} = \mathbf{0} \text{ on } \partial \Omega\}$  を表す.

$C^{m, \alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$  Hölder 指数  $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$ , に対して,  $m$  階までの導関数が Hölder 連続な関数全体の集合を表す.  $\alpha = 1$  のとき, その関数を Lipschitz 連続という.

$L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$   $1 \leq p < \infty$  に対して,  $p$  乗 Lebesgue 可積分な関数全体の集合

を表す.  $p = \infty$  に対して本質的有界な関数全体の集合を表す.

$W^{m,p}(\Omega; \mathbb{R}^n)$   $m$  階までの導関数が  $L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$  に属する関数全体の集合を表す.

$W_0^{m,p}(\Omega; \mathbb{R}^n)$   $m \geq 1$  に対して,  $\{\mathbf{f} \in W^{m,p}(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid \mathbf{f} = \mathbf{0} \text{ on } \partial\Omega\}$  を表す.

$H^m(\Omega; \mathbb{R}^n)$   $W^{m,2}(\Omega; \mathbb{R}^n)$  を表す.

$H_0^m(\Omega; \mathbb{R}^n)$   $m \geq 1$  に対して,  $\{\mathbf{f} \in H^m(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid \mathbf{f} = \mathbf{0} \text{ on } \partial\Omega\}$  を表す.

## 付録 A

### 付録

#### A.1 外積の公式

(1)  $\mathbf{a} = (a_i)_i \in \mathbb{R}^3$  と  $\mathbf{b} = (b_i)_i \in \mathbb{R}^3$  の外積は,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \mathbf{e}_1 \\ a_2 & b_2 & \mathbf{e}_2 \\ a_3 & b_3 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3 \\ &= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.1.1})$$

のように定義される. ただし,  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  および  $\mathbf{e}_3$  は座標系  $(x_1, x_2, x_3)$  の直交単位ベクトルである.

(2) さらに,  $\mathbf{c} = (c_i)_i \in \mathbb{R}^3$  も加えて,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \quad (\text{A.1.2})$$

が成り立つ.

(3) このとき,  $\nabla = (\partial/\partial x_i)_i \in \mathbb{R}^3$  に対して,

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & a_1 & b_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & a_2 & b_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) b_1 + \left( \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) b_2 + \left( \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) b_3 \end{aligned} \quad (\text{A.1.3})$$

のようにかける。ここで、行列式の中の  $\nabla$  は  $\mathbf{a}$  に作用することに注意する。また、

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \frac{\partial (a_2 b_3 - a_3 b_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial (a_3 b_1 - a_1 b_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{\partial x_3} \\
&= \left( \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) b_1 + \left( \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) b_2 + \left( \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) b_3 \\
&\quad + \left( \frac{\partial b_2}{\partial x_3} - \frac{\partial b_3}{\partial x_2} \right) a_1 + \left( \frac{\partial b_3}{\partial x_1} - \frac{\partial b_1}{\partial x_3} \right) a_2 + \left( \frac{\partial b_1}{\partial x_2} - \frac{\partial b_2}{\partial x_1} \right) a_3 \\
&= (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - (\nabla \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} \tag{A.1.4}
\end{aligned}$$

が成り立つ。そこで、Gauss の定理と公式式 (A.1.2) より

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \, dx &= \int_{\partial\Omega} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\gamma \\
&= \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \, d\gamma = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{b} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \mathbf{a} \, d\gamma \\
&= \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \, dx - \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} \, dx \tag{A.1.5}
\end{aligned}$$

が成り立つ。

(4) さらに、

$$\begin{aligned}
\{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})\} \cdot \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & b_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & b_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & b_3 \end{vmatrix} \\
&= \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) \right\} b_1 \\
&\quad + \left\{ \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) \right\} b_2 \\
&\quad + \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) \right\} b_3 \tag{A.1.6}
\end{aligned}$$

のようにかける。ここで、行列式の中の  $\nabla$  は  $\nabla \times \mathbf{a}$  に作用することに注意する。また、

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \{(\nabla \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}\} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & b_1 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & b_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & b_3 & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{vmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) b_1 + \left( \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) \frac{\partial b_1}{\partial x_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) b_1 - \left( \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) \frac{\partial b_1}{\partial x_3} \\
& + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) b_2 + \left( \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) \frac{\partial b_2}{\partial x_3} \\
& - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) b_2 - \left( \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) \frac{\partial b_2}{\partial x_1} \\
& + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) b_3 + \left( \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) \frac{\partial b_3}{\partial x_1} \\
& - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) b_3 - \left( \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) \frac{\partial b_3}{\partial x_2} \\
& = \{ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) \} \cdot \mathbf{b} + (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \tag{A.1.7}
\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、行列式の中の  $\nabla$  は  $(\nabla \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$  に作用することに注意する。そこで、Gauss の定理と公式式 (A.1.2) より

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \nabla \cdot \{ (\nabla \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} \} dx &= \int_{\partial\Omega} \{ (\nabla \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} \} \cdot \boldsymbol{\nu} d\gamma \\
&= \int_{\partial\Omega} \{ \boldsymbol{\nu} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \} \cdot \mathbf{b} d\gamma = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{b} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) d\gamma \\
&= \int_{\Omega} \{ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) \} \cdot \mathbf{b} dx + \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) dx \tag{A.1.8}
\end{aligned}$$

が成り立つ。

## A.2 形状微分に関する公式

3.5 節において下記公式を用いている ([2] p. 96 Proposition 4.4).

**命題 A.2.1** (領域積分の形状微分)

$\phi \in \mathcal{D}$ ,  $u \in \mathcal{U} = C^1(\mathcal{D}; H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ ,  $\nabla u \in \mathcal{V} = C^1(\mathcal{D}; L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d))$ , および  $h(u, \nabla u) \in C^1(\mathcal{U} \times \mathcal{V}; L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$  において, 任意の  $\varphi \in \mathcal{D}$  に対して,

$$\begin{aligned}
& f(\phi + \varphi, u(\phi + \varphi), \nabla_z u(\phi + \varphi)) \\
&= \int_{\Omega(\phi + \varphi)} h(u(\phi + \varphi), \nabla_z u(\phi + \varphi)) dz
\end{aligned}$$

とおく。このとき  $f$  の形状微分 (領域変動に対する Fréchet 微分) は, 任意の  $\varphi \in X$  に対して,

$$f'(\phi, u(\phi), \nabla u(\phi))[\varphi]$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\Omega(\phi)} \{h_u(u(\phi), \nabla u(\phi)) [u'(\phi) [\varphi]] \\ &\quad + h_{\nabla u}(u(\phi), \nabla u(\phi)) [\nabla u'(\phi) [\varphi] - \nabla \varphi^T \nabla u(\phi)] \\ &\quad + h(u(\phi), \nabla u(\phi)) \nabla \cdot \varphi\} dx, \end{aligned} \tag{A.2.1}$$

ここで  $u'(\phi) [\varphi]$  は  $\varphi \in X$  に対する  $u(\phi)$  の形状微分である. □

## 参考文献

- [1] 畔上秀幸. 領域最適化問題の一解法. 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 60, No. 574, pp. 1479–1486, 1994.
- [2] 畔上秀幸. 形状最適化問題の正則化解法. 日本応用数理学会論文誌, Vol. 23, No. 2, pp. 83–138, 2014.
- [3] 畔上秀幸. 形状最適化問題. 森北出版, 2016.
- [4] H. Azegami, S. Fukumoto, and T. Aoyama. Shape optimization of continua using nurbs as basis functions. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 47, No. 2, pp. 247–258, 1 2013.
- [5] H. Azegami, S. Kaizu, and K. Takeuchi. Regular solution to topology optimization problems of continua. *JSIAM Letters*, Vol. 3, pp. 1–4, 2011.
- [6] H. Azegami and K. Takeuchi. A smoothing method for shape optimization: traction method using the Robin condition. *International Journal of Computational Methods*, Vol. 3, No. 1, pp. 21–33, 2006.
- [7] M. Bendsøe and N. Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, pp. 197–224, 11 1988.
- [8] E. C. Berkeley. *Giant brains; or, Machines that think*. Wiley, 1949.
- [9] A. Bright. *The Electric-Lamp Industry: Technological. Change and Economic Development from 1800 to 1947*. Macmillan, 1949.
- [10] M. V. K. Chari and P. P. Silvester. *Finite elements in electrical and magnetic field problems*. Wiley, 1980.
- [11] R. W. Clough. The finite element method in plane stress analysis. In *2nd ASCE Conference on Electronic Computation*, 1960.
- [12] R. Courant. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 49, No. 1,

- pp. 1–23, 1943.
- [13] D. Crescini, V. Ferrari, D. Marioli, and A. Taroni. A thick-film capacitive pressure sensor with improved linearity due to electrode-shaping and frequency conversion. *Measurement Science and Technology*, Vol. 8, No. 1, p. 71, 1997.
  - [14] B. Davison. Techniques for robust touch sensing design. Application Note 1334, Microchip Technology Inc., 2010.
  - [15] L. Du, G. Kwon, F. Arai, T. Fukuda, K. Itoigawa, and Y. Tukahara. Structure design of micro touch sensor array. *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 107, No. 1, pp. 7 – 13, 2003.
  - [16] K. Hirayama, Y. Tsuji, T. Nomura, K. Sato, and S. Nishiwaki. Application of topology optimization to h-plane waveguide component. *IEICE TRANSACTIONS on Electronics*, Vol. 90-C, pp. 282–287, 2007.
  - [17] R.M. Biernacki J.W. Bandler, S.H. Chen, and D. Omeragic. Space mapping optimization of waveguide filters using finite element and mode-matching electromagnetic simulators. *IEEE MTT-S IMS Digest*, Vol. 2, pp. 635–638, 1997.
  - [18] F. Kikuchi. *Mathematics of Finite Element Method: Mathematical Basics and Error Analysis*. Baifukan, 1994.
  - [19] Y. S. Kim, J. Byun, and I. Park. A level set method for shape optimization of electromagnetic systems. *Magnetics, IEEE Transactions on*, Vol. 45, No. 3, pp. 1466–1469, March 2009.
  - [20] M. Kimura. Shape derivative of minimum potential energy: abstract theory and applications. *Jindřich Nečas Center for Mathematical Modeling Lecture notes Volume IV, Topics in Mathematical Modeling*, pp. 1–38, 2008.
  - [21] G. Kiziltas, D. Psychoudakis, J.L. Volakis, and N. Kikuchi. Topology design optimization of dielectric substrates for bandwidth improvement of a patch antenna. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, Vol. 51, No. 10, pp. 2732–2743, Oct 2003.
  - [22] A. Konrad. A direct three-dimensional finite element method for the solution of electromagnetic fields in cavities. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 21, No. 6, pp. 2276–2279, 1985.



- [23] J. R. Lemon, S. K. Tolani, and A. L. Klosterman. Integration and implementation of computer aided engineering and related manufacturing capabilities into mechanical product development process. *CAD-Fachgesprch*, pp. 161–183, 1980.
- [24] Q. Li, G. P. Steven, and Z. (L). Zhang. *Advances in Structural and Multidisciplinary Optimization - Proceedings of the 11th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-11)*. WCSMO-11 Proceedings e-Book, 2017. <http://web.aeromech.usyd.edu.au/WCSMO2015/978-0-646-94394-7.html>.
- [25] J. C. Maxwell. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 155, pp. 459–513, 1865.
- [26] P. Monk. *Finite element methods for Maxwell's equations*, Clarendon Press. Oxford, 2003.
- [27] 森田康裕, 香月伸一, 金子貴信, 國弘由比, 後呂考亮. 膨張・複雑化する車載電子システムへの対応について. 平成 22 年度 ITS の規格化事業, 自動車電子技術の動向調査, 2011. 財団法人日本自動車研究所 ITS 研究部.
- [28] 崎山一幸, 小寺秀俊, 阿波根明. 有限要素法を用いた三次元電磁界固有値計算法によるマグネトロン共振器の解析. 電気学会論文誌. A, 基礎・材料・共通部門誌, Vol. 110, No. 9, pp. 584–590, 1990.
- [29] 佐竹正義, 森寛之, 大高孝治, 前田登, 服部敏弘, 中川基. 静電容量式乗員検知装置. 特許第 5353991, 2013.
- [30] M. Satake and H. Azegami. Shape optimization of waveguide filter. *JSIAM Letters*, Vol. 8, pp. 33–36, 2016.
- [31] M. Satake, M. Noboru, F. Shinji, and H. Azegami. Shape optimization of an electrostatic capacitive sensor. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 33, No. 3, pp. 599–619, 2016.
- [32] L. A. Schmit. Structural design by systematic synthesis. *Proc. of Second Conference on Electronic Computation ASCE, New York*, pp. 105–122, 1960.
- [33] 鈴木信夫, 島田禎晉. ミリ波  $n$  乗コサイン形カットオフフィルタ. 電子情報通信学会論文誌, Vol. 52-B, No.12, pp. 768–775, 1969.
- [34] 高橋雄造. 電気の歴史 人と技術のものがたり. 東京電機大学出版局, 2011.
- [35] M. J. Turner. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal*

- of the Aeronautical Sciences*, Vol. 23, No. 9, pp. 805–823, 1956.
- [36] A. Volta. On the electricity excited by the mere contact of conducting substances of different kinds. *Abstracts of the Papers Printed in the Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 1, pp. 27–29, 1800.
- [37] J. A. Voorthuyzen, A. J. Sprenkels, A. G. H. van der Donk, P. R. Scheeper, and P. Bergveld. Optimization of capacitive microphone and pressure sensor performance by capacitor-electrode shaping. *Sensors and Actuators A*, Vol. 25–27, pp. 331–336, 1991.
- [38] S. Yoon, I. Jung, D. Hyun, J. Hong, and Y. Kim. Robust shape optimization of electromechanical devices. *Magnetics, IEEE Transactions on*, Vol. 35, No. 3, pp. 1710–1713, May 1999.
- [39] O. C. Zienkiewicz and J. S. Campbell. Shape optimization and sequential linear programming, in optimum structural design - theory and applications. *John Wiley*, pp. 109–126, 01 1973.

# 謝辞

本研究の遂行にあたり、直接の御指導を頂きました名古屋大学大学院 情報学研究科 複雑系科学専攻の畔上秀幸先生に深謝の意を表します。そして、本論文を執筆するにあたっては、同学の大岡 昌博教授、渡邊 崇教授には副査として様々な視点から助言を頂きました。心から感謝いたします。さらに、著者の多忙につきあっていただいた同研究室の皆様に感謝の意を表します。

また、株式会社 SOKEN の福井伸治様と前田登様には本研究の実施の機会を与えていただき、また暖かい励ましを頂いた。ここに深く感謝いたします。

2019 年 7 月  
佐竹 正義