

報告番号	甲 第 12926 号
------	-------------

主 論 文 の 要 旨

論文題目 固体壁を伴う流れの計算科学的手法の開発
(Study on computational methods for
wall-bounded flows from viewpoints of
wavelets and volume penalization)

氏 名 櫻井 照夫

論 文 内 容 の 要 旨

(1) 序論

私たちの身の周りで起きる現象の多くは流れが密接に関わっている。その中でも、自動車や飛行機の周りの流れ、パイプによる物質の輸送、熱交換器内で発生する熱対流など、固体壁を伴う流れは工学において重要な役割を果たしている。流れの普遍的性質の解明は、流れの理解、工学への応用において重要である。流れの性質の解明には、実験による解析だけではなく、コンピュータによる数値シミュレーションが非常に有効である。数値シミュレーションは、実験では測定が困難な物理量についても測定誤差なしにデータを得られる利点がある。近年、スーパーコンピュータなど計算機の発達によって大規模な流れの直接数値シミュレーション(Direct Numerical Simulation, DNS)が行われている。

現実に見られる流れの多くは固体壁の境界を伴う流れである。このような流れでは境界の形状や境界での条件が流体の運動を決定する上で非常に重要な役割を果たしている。工学で扱われる固体壁の境界を伴う流れは、乱れた流れ(乱流)、複雑形状の固体壁を伴う流れ、熱との相互作用がある流れなど複雑な流れが多い。このような流れをそのまま DNS で扱おうとする場合、現在ある最高性能のスーパーコンピュータを用いてもその計算は困難である。これは、乱流の場合はレイノルズ数の増加につれて急速に増大する巨大自由度を扱う必要がある、複雑形状をした物体周りの流れの場合は境界近傍の流れを正確にとらえるための非構造格子を作成する必要があるからである。したがって、乱流の自由度を縮約する手法、複雑な流れを簡単に表現することのできるシミュレーション手法が望まれている。本研究では、そのような手法として、ウェーブレットを用いた乱流の自由度縮約、体積ペナライズ法(Volume Penalization, VP 法)の2つの手法について注目し、手法の開発を行った。

得られた成果については、査読付き学術論文[1, 2]に掲載されている。

(2) ウェーブレットを用いたチャネル乱流の自由度縮約

乱流の特徴として、支配方程式の強非線形性、巨大自由度、多スケール性、強い間欠性がある。チャネル乱流の数値シミュレーションにおける自由度はレイノルズ数の 3 乗に比例して急速に増大する[3]。乱流データを扱う場合、多スケールかつ間欠的なデータの疎な表現に適した手法が有効である。そのような手法の一つにウェーブレット解析がある。本研究では 3 次元直交ウェーブレットによる壁乱流の秩序渦抽出手法(Coherent Vortex Extraction, CVE)を開発した。チャネル乱流の乱流データに対して CVE を適用して秩序構造を抽出し、統計量を計算することでその寄与を調べた。

本研究では摩擦レイノルズ数が 395 のチャネル乱流の DNS を実施し、乱流の DNS データを作成した。統計量について Moser ら[4]のチャネル乱流の DNS データと比較を行い、計算結果が正しいことを確認した。作成した乱流場に対して、周期ウェーブレットと区間ウェーブレットを用いた 3 次元直交ウェーブレット解析を用いた CVE により、チャネル乱流から秩序渦度場を抽出した。周期ウェーブレットとして Coiflet 30、区間ウェーブレットとして Cohen-Daubechies-Jawerth-Vial ウェーブレット[4]を用いた。抽出した渦度場に Biot-Savart の関係を用いて速度場を再構成し、秩序場、無秩序場の乱流統計を計算した。

秩序渦度場は、元の場合の自由度の 5.9%の自由度から再構成され、秩序場の渦構造は元の場合のチューブ状の渦構造をよく再現した(図 1(b) 参照)。秩序場のエネルギーは元の場合の 99.7%、エントロフィーは 99.9%に相当する量であった。一方、無秩序場は元の場合の 94.1%の自由度から再構成されているにもかかわらず、渦構造に組織的な構造は見られなかった(図 1(c) 参照)。エネルギーは元の場合の 0.5%、エントロフィーは $2.3 \times 10^{-3}\%$ に相当する量と非常に小さな値であった。統計量として平均速度、平均渦度、二乗平均値、確率密度関数、エネルギースペクトル、非線形ダイナミクスとしてエネルギー収支を計算し元の場合のものと比較を行った。秩序場について、平均速度、平均渦度、速度と渦度の二乗平均値、および確率密度関数の統計量は元の場合のものと非常によく一致した。一方、無秩序場の統計量は元の場合のものと比べて非常に小さな値となった。エネルギー収支の生成項、乱流拡散項、圧力拡散項、散逸項、粘性拡散項について、秩序場の値は元の場合の値を非常によく再現した。無秩序場間の相互作用、および無秩序場・秩序場間の相互作用による各項の値はとくに、元の場合のものと比べて無視できるほど小さな値となった。

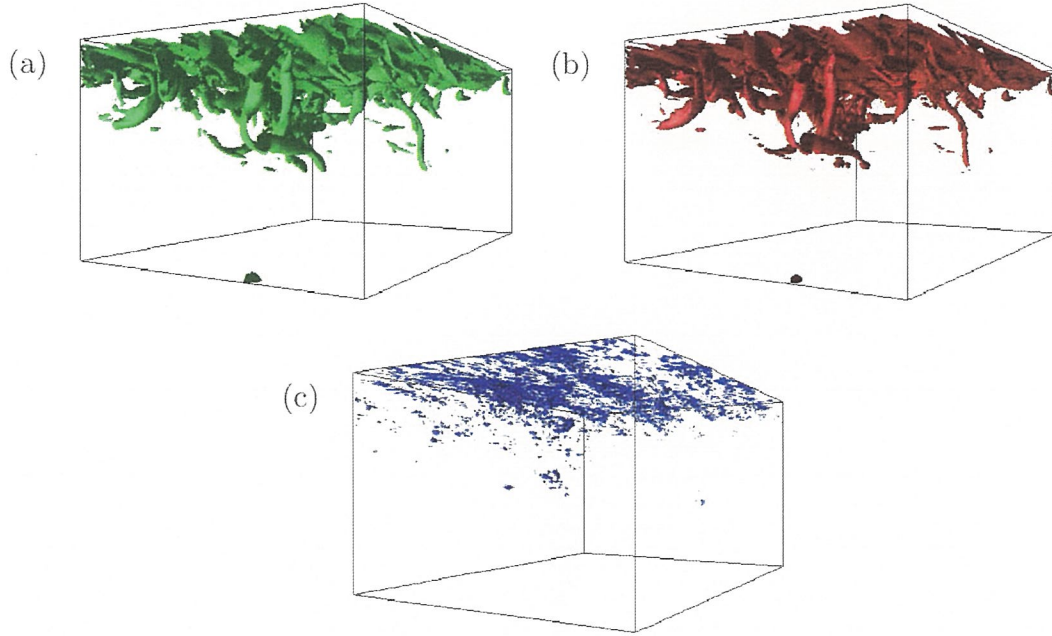


図 1 チャンネル乱流の壁付近の渦構造の可視化図. (a) 元の乱流場. (b) 秩序場. (c) 無秩序場.

(3) Inhomogeneous Neumann 境界条件に対する VP 法

複雑形状境界をもつマルチフィジックス問題に対する数値モデルは流体の数値計算において重要な課題である. 固体と液体の境界における熱や質量の流れは, 典型的に Neumann 境界条件や, Robin 境界条件で表される.

境界条件をモデル化する手法の一つが埋め込み境界法(IBM)である. IBM の基本的な考え方は, 簡単な計算領域でより効果的な数値計算手法を得ることであり, 境界条件は外力項として式に組み込まれる. 本研究では, その中でも特に Volume Penalization 法(VP 法)に着目する. この手法は, 簡単な偏微分方程式の問題に関して解析的な取り扱いができる. VP 法では物体は多孔質の媒体としてモデル化される.

本研究では, homogeneous Neumann 境界条件における VP 法 [6] を拡張し, inhomogeneous Neumann 境界条件における VP 表現を開発した. 開発した手法を Poisson 方程式に対して適用し, 解と誤差, 固有値問題を計算し, 手法の有効性を検証した. 開発した手法の応用として, 内円筒から熱が発生している円環領域内の熱対流のシミュレーションを行った.

次のような inhomogeneous Neumann 境界条件における 1 次元 Poisson 方程式を考える.

$$\begin{aligned} -d_x^2 w(x) &= f(x) \quad \text{for } x \in \Omega_f, \\ f(x) &= m^2 \cos mx. \end{aligned}$$

$d_x = d/dx$, Ω_f は流体領域で $\Omega_f = \{x \mid 0 < x < \pi\}$ であり, 境界条件として $d_x w(0) = \alpha$, $d_x w(\pi) = \alpha$ としている. この式に VP 法を適用した式について, 次のように定式化を行った.

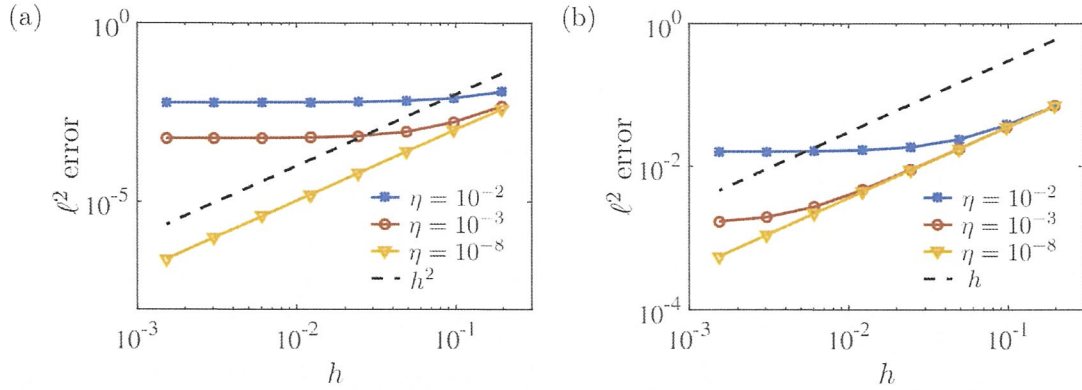


図 2 VP 法による数値解と VP 法を用いていない厳密解の誤差. 計算領域は $0 \leq x < 2\pi$, 流体領域を $0 < x < \pi$, 固体領域を $\pi < x < 2\pi$. (a) $f(x) = \cos(x)$, $\alpha = 1$ としたときの計算結果. (b) $f(x) = \sin(x)$, $\beta(x) = \cos(x)$ としたときの計算結果.

$$\begin{aligned} -d_x \{ \theta d_x v + \chi \alpha \} &= (1 - \chi) f, \\ \theta &= 1 - \chi + \eta \chi \end{aligned}$$

ここで χ はマスク関数で, 以下の式で与えられる. η はペナライズパラメータである.

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < x < \pi \\ 1/2 & \text{at } x = 0, \pi \\ 1 & \text{for } \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

定式化した式について解析解を計算し, 元の Poisson 方程式の厳密解と比較を行った. VP 法を用いた方程式の解について, $0 < x < \pi$ の流体領域において元の Poisson 方程式の解とよく一致した. またペナライズパラメータを小さくするとより厳密解に近づくことがわかった. VP 法を用いた方程式の離散化誤差について, 厳密解との誤差を計算した. 図 2(a) に示すように, ペナライズパラメータが小さな値のとき, 誤差は $O(h^2)$ で減少し, ペナライズパラメータが大きな値のとき, 格子間隔を小さくすると誤差は一定の値に収束した. ここで, h は格子間隔である. このことからペナライズパラメータが十分小さなときは, ペナライズ項に由来する誤差より離散化誤差が支配的になるとわかった.

1次元 Poisson 方程式における Inhomogeneous Neumann 境界条件の VP 法について, 一般的な形に拡張したものが次の式である.

$$\begin{aligned} -d_x \{ \theta d_x v + \chi \beta \} &= (1 - \chi) f - \chi d_x \beta, \\ \theta &= 1 - \chi + \eta \chi \end{aligned}$$

この式について, $f(x) = \sin x$ とし, 数値解の誤差の振る舞いを調べた. 図 2(b) に示すように, ペナライズパラメータが小さな値の場合について, 格子間隔を小さくすると誤差が $O(h)$ で減少した. 誤差の振る舞いの違いについて, 境界条件が境界の両端で異なる値をとることによると考えられる.

応用例として inhomogeneous Neumann 境界条件, Dirichlet 境界条件における VP 法を

移流拡散方程式に対して適用し、内円筒から熱が発生している同心円環領域内における 2 次元定常熱対流のシミュレーションを行った。支配方程式は非圧縮 Navier-Stokes 方程式と移流拡散方程式で以下の式で表される。

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{u} &= -\nabla p - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \text{Pr} \nabla^2 \mathbf{u} + \text{Pr} \text{Ra} \Phi \mathbf{e}_y, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \partial_t \Phi &= -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \Phi + \nabla^2 \Phi.\end{aligned}$$

ここで、 \mathbf{u} は無次元速度、 Φ は無次元温度、 p は無次元圧力、 $\mathbf{e}_y=(0,1)$ 、 Pr は Prandtl 数、 Ra は Rayleigh 数である。流体領域は $\Omega_f = \{(x,y) \mid 1 < r < 2\}$, $r = (x^2+y^2)^{1/2}$ とした。境界条件について、速度は滑りなし条件、温度は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \Phi &= \beta & \text{at } r = r_i, \\ \Phi &= 0 & \text{at } r = r_o.\end{aligned}$$

この式について、VP 法を用いて表現すると次のようになる。

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{u} &= -\nabla p - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \text{Pr} \nabla^2 \mathbf{u} + (1 - \chi) \text{Pr} \text{Ra} \Phi \mathbf{e}_y - \frac{\chi \mathbf{u}}{\eta_d}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \partial_t \Phi &= -(1 - \chi)(\mathbf{u} \cdot \nabla) \Phi \\ &\quad + \nabla \cdot \{(1 - \chi_2) + \eta_n \chi_2 \nabla \Phi + \chi_2 \beta\} - \chi_2 (\nabla \cdot \beta) - \frac{\chi_1 \Phi}{\eta_d}.\end{aligned}$$

ここで、 η_d , η_n はペナライズパラメータ、 $\beta(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/r$, $\beta(0) = 0$ であり、 $\chi(\mathbf{x})$ はマスク関数で χ_1 , χ_2 の話で与えられる関数である。 χ_1 , χ_2 については

$$\begin{aligned}\chi_1 &= \begin{cases} 0 & \text{for } r < r_o = 2, \\ 1/2 & \text{at } r = r_o, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases} \\ \chi_2 &= \begin{cases} 0 & \text{for } r > r_i = 1, \\ 1/2 & \text{at } r = r_i, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}\end{aligned}$$

とした。

計算はスタガード格子と MAC 法を用いた。 $\text{Pr} = 0.7$, $\text{Ra} = 5700$, 5.0×10^4 の場合について計算した。ペナライズパラメータについては $\eta_d = \eta_n = 5.0 \times 10^{-6}$ とした。計算結果について Yoo[6] の極座標系でのシミュレーション、Ren ら[7] の IBM を用いたデカルト座標系でのシミュレーションと比較した。図 3 のように、温度の分布、内円筒表面の温度について、先行研究[7, 8]の結果をよく再現した。

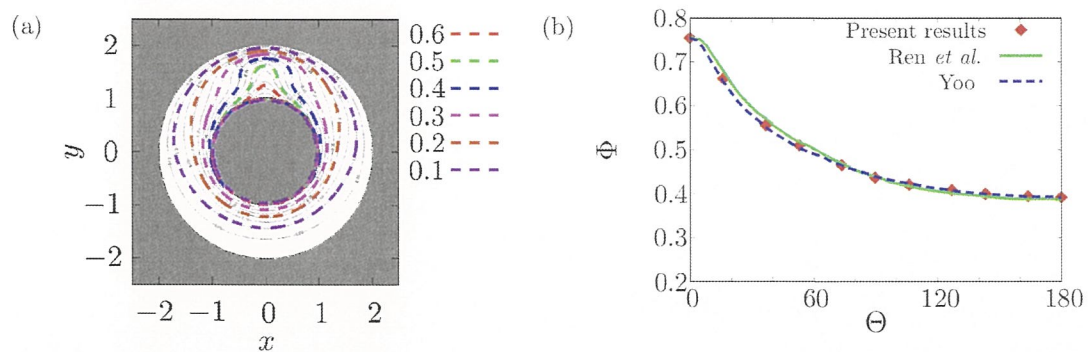


図 3 VP 法を用いた支配方程式による円環領域内の熱対流のシミュレーションの $Ra=5700$ での計算結果. (a) 温度の等高線. Ren らの結果[8]との比較. (b) 内円筒表面における温度. Yoo の結果[7], Ren らの結果[6]との比較.

(4) 結論

固体壁を境界に持つ流れの計算手法として、ウェーブレット解析による乱流の自由度縮約手法, VP 法に注目して手法を開発し, 有効性を検証した.

DNS によって作成したチャンネル乱流の乱流場のデータに対して, 周期ウェーブレットと区間ウェーブレットを用いた 3 次元直交ウェーブレット解析による CVE を行い, 秩序渦度場を抽出した. この場合は元の場合の自由度のおよそ 6% のウェーブレット係数から再構成されているにもかかわらず, 元の場合の渦構造, 乱流統計をよく再現した. チャンネル乱流の秩序渦構造は乱流の渦構造や乱流統計について主要な役割を果たしている.

Inhomogeneous Neumann 境界条件における偏微分方程式の VP 法による表現を作成し, Poisson 方程式に対して適用した. 解, 誤差, 固有値問題について計算し, 手法の有効性を調べた. 解は流体領域において元の場合の解と非常によく一致し, 誤差はペナライズパラメータが小さなときは $O(h)$ で減少した. 応用例として内円筒から熱が発生している円環領域内における, 2 次元定常熱対流のシミュレーションを行った. 計算結果を文献[7, 8]の異なる手法のシミュレーションの結果と比較した. 開発した手法の結果は文献[7, 8]の結果をよく再現していることを示した. 開発した VP 法は, 元の偏微分方程式の式を流体領域内で非常によく再現する.

本研究による成果から, 乱流の秩序渦構造を時間発展させるアダプティブ格子によるシミュレーション手法の一つである秩序渦シミュレーション(Coherent Vortex Simulation, CVS)の壁乱流への適用や, VP 法のマルチフィジックス問題への適用が考えられる. また, CVS と VP 法を複合した直交格子上での複雑形状境界における乱流のシミュレーション手法の展開, 低コスト化への貢献が期待される.

参考文献

- [1] T. Sakurai *et. al.*, J. Turbul., Vol. 18, No. 4, pp. 352-372 (2017).
- [2] T. Sakurai *et. al.*, J. Comput. Phys., Vol. 390, pp. 452-469 (2019).
- [3] 金田行雄 編, 乱流の計算科学, 共立出版 (2012).
- [4] R. D. Moser *et. al.*, Phys. Fluids, Vol. 11, pp. 943-945 (1999).
- [5] A. Cohen *et. al.*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., Vol. 316, pp. 417-421 (1993).
- [6] D. Kolomenskiy *et. al.*, Appl. Numer. Math., Vol. 95, pp. 238-249 (2015).
- [7] J. S. Yoo, J. Heat Mass Transfer, Vol. 46, pp. 2499-2503 (2003).
- [8] W. Ren *et. al.*, J. Heat Mass Transfer, Vol. 64, pp. 694-705 (2013).