群についての一研究

持　田　都　也

（要　旨）

群の教材は手近かなところに，やさしいものから，かなりむつかしいものまであって，それを材料に一つのまとまった構造をうみだすことが出来る。従って，低学年から高学年へと一貫してとり挙げられる材料である。余りむつかしく，公理からの導入はさけて，実際の作業から，群というものをとらえることが大切である。まず，簡単な群の構造をしらべ，それから，正20面体を実際に回転して，20面体群の構造図を作っていく。

〔I〕群について

（1） 群の概念（一般化）

群の概念が実数や複素数の四則演算をふりかえるためのものであるだけでなく，群は実数や複素数を，のりこえて，広く適用されるところに意義がある。その一般化には，つぎの2つの道がある。

（1）数からの解放で，任意の「もの」について考えること。

（2）四則演算からの解放で，任意の演算について考えること。

この一般化によって，数学的な構造の一端をつかまえることが出来，また，論証の指導にも，適当な材料を提供することが出来る。

いうまでもなく，演算とは，2つのものに対応して第3のものをただ1つ定めることであると言える。このことは，見方をかえれば，3つのものの関係の特殊な場合と見られる。

$a+b=c$

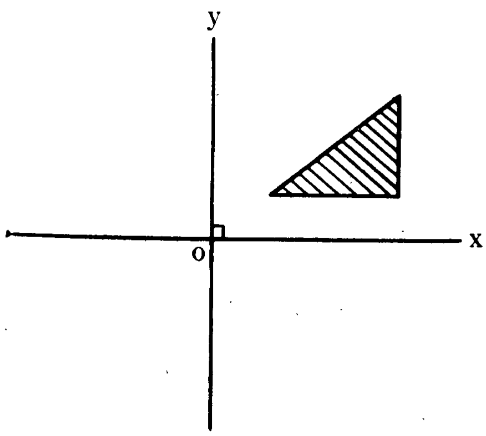
$a\times b=c$

などは，3つの数a，b，cの関係とみられる。

この関係のうち，a，bを定めると，それに対応して，cがただ1つ定まるとき，演算は2変数の関数ともみられる。このように演算を一般化して見ると，演算とみられるものは，われわれの周囲には沢山あり，この卑近なものの中に教材があり，小学校から群の考え方がとりあげられてもよいと言われる理由がある。

（2） 群の簡単な例

例えば，つぎの図のように，直交座標軸x軸，y軸をとり，その2つの移動をつづけることを一つの演算として考える。



e；不動の移動。

p；x軸について対称な移動。

q；y軸について対称な移動。

r；原点について対称な移動。

これら4つの移動の集合を

$K_1=\{e,\ p,\ q,\ r\}$

とすると，pを行ない，それにひき続いてqを行なうと，その結果はrを1回行なったことと同じになる。

これを　$p\circ q=r$

とかけば，このような演算をいろいろ行なって出来る結果が，つぎのような表になる。

a∘b

a＼b	e	p	q	r
e	e	p	q	r
p	p	e	r	q
q	q	r	e	p
r	r	q	p	e

eは乗法の演算の1に相当するもので，演算は×に相当する。また乗法の逆演算（つまり除法）に相当する

ものが出来て，結果は1つに決まる。また，

$(p\circ q)\circ p=r\circ p=q$

$p\circ(q\circ p)=p\circ r=q$

したがって

$(p\circ q)\circ p=p\circ(q\circ p)$

など結合法則がいえることも表からわかる。さらに，

$p\circ q=q\circ p=r$

となって，交換法則もなりたつ。（可換群）

このようにある操作によって出来る「もの」の集りが，群をなす例は沢山ある。

（3） 群 の 構 造

（1）2 位 の 群

肯定と否定（yesと no）を組みあわせると一つの群が出来る。肯定の否定は否定である。否定の否定は肯定である。それをつぎのようにかく。

肯定∘否定＝否定

否定∘否定＝肯定

このような演算によると，つぎのような群表が出来る。

a∘b

a＼b	肯 定	否 定
肯 定	肯 定	否 定
否 定	否 定	肯 定

2位の群はこの形になる。これは2位の巡回群をなしているaを単位元とすれば

$a\circ b=b\circ a=b\ (b\neq a)$

$b\circ b=a$

$a\circ a=a$

でなければならない。

（2）3 位 の 群

$\{1,\ \omega,\ \omega^2\}$を例にとれば $\left(\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)$

a × b

a＼b	1	ω	ω^2
1	1	ω	ω^2
ω	ω	ω^2	1
ω^2	ω^2	1	ω

a∘b

a＼b	e	p	q
e	e	p	q
p	p	q	e
q	q	e	p

3位の群は上の形のものに限ることがわかる。

すなわち，もしも

$p\circ q=q\circ p=p$ となれば

$p=e$

$p\circ q=q\circ p=q$ となれば

$q=e$

また，$p\circ p=e$となれば，逆元の一意性に反する。したがって

$p\circ p=q$

$q\circ q=p$

$p\circ q=q\circ p=e$

である。3位の群は，$\{p,\ p^2,\ p^3\}$ の形の巡回群である。

（3）4 位 の 群

さきのx軸，y軸，原点に関して対称の移動と不動の4つの移動をそれぞれ，p, q, r, e とすると

$K_1=\{e, p, q, r\}$

は1つの群をつくる。

行列の演算による。

$e=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ p=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\ q=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},$

$r=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

を元として

$K_2=\{e, p, q, r\}$

の群表をつくると

a∘b

a＼b	e	p	q	r
e	e	p	q	r
p	p	e	r	q
q	q	r	e	p
r	r	q	p	e

となり，さきのK_1とK_2は同型の群である。

また，立方体の対面の中点を結ぶ直線をx軸，y軸，z軸にとり，それらを軸として，πだけの回転によって，その立方体がもとの立方体に重なるような移動を考える。

E……不動。

P……x軸のまわりにπだけの回転。

Q……y軸のまわりにπだけの回転。

R……z軸のまわりにπだけの回転。

による。

$K_3=\{E, P, Q, R\}$

もK_1，K_2と同型となる。

正四面体の3組の対辺の中点を通る3直線を軸としてもとの正四面体にかさねる回転と不動の群K_4もK_3と同型であり，「正四面体の3組の対辺を結ぶ直線が一点で交わり，しかも直交し，互に他を二等分する。」ことは，立方体の一部分の回転に帰するから当然である。

また命題A→Bについて，逆，裏，対偶を考えると

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] (A \to B) \arrow[r, leftrightarrow, "m(\text{逆})"] \arrow[d, leftrightarrow, "n(\text{裏})"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "m\cdot n"] & (B \to A) \arrow[d, leftrightarrow, "n(\text{裏})"] \arrow[dl, leftrightarrow, "(\text{対偶})"'] \\ (\overline{A} \to \overline{B}) \arrow[r, leftrightarrow, "m(\text{逆})"'] & (\overline{B} \to \overline{A}) \end{tikzcd}$$

K_5＝{不変，逆，裏，対偶}
＝{e, m, n, m•n}

などの操作も，同型る群をなしている。

上の変換は，条件文に限らず一般に2変数の論理式 f(A, B)に行なう変換，例えば，

$$\begin{cases} e\,;\ A \wedge B \\ m\,;\ \overline{A \wedge B} \\ n\,;\ \overline{A} \wedge \overline{B} \\ m\bullet n;\ \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e\,;\ A \vee B \\ m\,;\ \overline{A \vee B} \\ n\,;\ \overline{A} \vee \overline{B} \\ m\bullet n;\ \overline{\overline{A} \vee \overline{B}} \end{cases}$$

のように

e；不変　f(AB)
m；全体の否定　f(AB)を$\overline{f(AB)}$
n；各変数の否定　f(AB)を$f(\overline{A}\,\overline{B})$
m•n；全体を否定し，さらに各変数も否定。
f(AB)を$\overline{f(\overline{A}\,\overline{B})}$

とするとき

{e, m, n, m•n}

も前と同じ群をなしている。この群のことを Piaget の変換群とも言い，

m；鏡像変換
n；双対変換
m•n；相関変換

と呼んでいる。これらの変換は，全称命題，存在命題にもほどこしうる。

（もとの命題）

$\forall x A(x)$　すべてのxについてAである。

鏡像変換を行なうと

$\overline{\forall x A(x)} = \exists x \overline{A(x)}$
あるxについてAでない。

双対変換を行なうと

$\forall x \overline{A(x)}$　すべてのxについてAでない。

相関変換を行なうと

$\overline{\forall x \overline{A(x)}} = \exists x A(x)$
あるxについてAである。

$\exists x A(x)$についても，この変換が Piaget 変換である。

これらの群はすべて Klein群とよばれるもので

$p \circ p$
$= q \circ q$
$= r \circ r$
$= e$

である特徴をもち

{p, e}　{q, e}　{r, e}

だけで，{e, p, q, r}の部分群をなし，Klein 群の正規部分群である。

4位の群はその他に

$G_1 = \{1, i, -1, -i\}$
$G_2 = \{1, 2, 3, 4\}$，$3 \times 4 \equiv 2 \pmod 5$とする。

G_1 の 群 表

a×b

a＼d	1	i	−i	−1
1	1	i	−i	−1
i	i	−1	1	−i
−i	−i	1	−1	i
−1	−1	−i	i	1

G_2 の 群 表

a×b

a＼b	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

G_1とG_2は

{e, p, q, r}

の群とすると，群表がつぎのようになる4位の群となる。

a∘b

a＼b	e	p	q	r
e	e	p	q	r
p	p	r	e	q
q	q	e	r	p
r	r	q	p	e

この群は$\{p, p^2, p^3, p^4\}$である巡回群と同型であることはこの表からわかる。

その他に4位群があるかどうか

a∘b

a＼b	e	p	q	r
e	e	p	q	r
p	p			
q	q			
r	r			

この空欄にいろいろ e, p, q, r をうめて見ると，これら以外に4位の群はないことがわかる。

（4）半群について

$A=\{1,2,3,4,5,6\}$

でAの2数a，bの最大公約数を $a\circ b$ で表わすと，つぎのような表ができる。

$a\circ b$	a＼b	1	2	3	4	5	6
	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	2	1	2	1	2
	3	1	1	3	1	1	3
	4	1	2	1	4	1	2
	5	1	1	1	1	5	1
	6	1	2	3	2	1	6

$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$

は成立するが，単位元が見当らず，逆元は一意に決まらない。その他にも

$\{0,1,-1\}$

$\{p_i \mid p_i=3a+i,\ a\text{は整数},\ i=0,1,2\}$

$p_i\circ p_j=3(3a+j)+i=p_i$ とする。

これは演算についてとじており，半群をなしている。

以上簡単な群についての構造をしらべたが，さらに5位の群の構造………などの研究から一般の群論への足掛りとなると思う。

（4） 群の教材について

群の教材はいままで挙げた卑近の教材の他にも，中学校，高等学校の教材として考えられるものとして，つぎのようなものが考えられる。

（1）数の拡張と群の構造。

整数→有理数→実数→複素数への拡張。

代数的構造と順序構造。

（2）図形の移動と置換。

（3）複素数の構造と行列　行列式の導入。

（4）文字計算の構造。

（5）ベクトルと群。

（6）変　換　と　群。

これらの中から適当な教材をえらぶことによって，群の構造を通じて，数学の構造をとらえることも出来また，幾何的方向からでなく，代数的方向からの論証の指導の場も与えることが出来る。

〔Ⅱ〕 20面体群について

いままで4位までの群の構造についてしらべて見たが，少し位数が多い群について出来るだけ卑近な群として，とらえることの出来る，20面体群の構造がどうなっているかを，模型を利用してしらべて見た。これが群の上にどのように乗っているか，少し理論的にしらべて見た。この研究は決して数学にはプラスになるものではないが，構造の様子が身近なものからとらえられることが出来，実際にもしらべられていないと思ったので手掛けて見た。

（1） 20面体群の置換表示

実際に正20面体を作って

（1）対応する2頂点を結んだ直線を軸として

（2）対応する面の中心を結んだ直線を軸として

（3）対応する辺の中点を結んだ直線を軸として

正20面体が同一の空間をしめるように回転して見て，頂点の移動をしらべた。この置換をすべて列挙する。

(1)

$$\mathfrak{A}_1\left\{\begin{array}{l}
\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\end{pmatrix}=e\ (\text{単位置換})\\
\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\B\,C\,D\,E\,A\,G\,H\,I\,J\,F\,K\,L\end{pmatrix}=(A\,B\,C\,D\,E)\ (F\,G\,H\,I\,J)\\
\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\C\,D\,E\,A\,B\,H\,I\,J\,F\,G\,K\,L\end{pmatrix}=(A\,C\,E\,B\,D)\ (F\,H\,J\,G\,I)\\
\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\D\,E\,A\,B\,C\,I\,J\,F\,G\,H\,K\,L\end{pmatrix}=(A\,D\,B\,E\,C)\ (F\,I\,G\,J\,H)\\
\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\E\,A\,B\,C\,D\,J\,F\,G\,H\,I\,K\,L\end{pmatrix}=(A\,E\,D\,C\,B)\ (F\,J\,I\,H\,G)
\end{array}\right.$$

$$\mathfrak{A}_2\left\{\begin{array}{l}
\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\A\,G\,H\,C\,L\,E\,F\,K\,I\,D\,J\,B\end{pmatrix}=(B\,G\,F\,E\,L)\ (C\,H\,K\,J\,D)\\
\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\A\,F\,K\,H\,B\,L\,E\,J\,I\,C\,D\,G\end{pmatrix}=(B\,F\,L\,G\,E)\ (C\,K\,D\,H\,J)\\
\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\A\,L\,D\,J\,F\,G\,B\,C\,I\,K\,H\,E\end{pmatrix}=(B\,L\,E\,F\,G)\ (C\,D\,J\,K\,H)\\
\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\A\,E\,J\,K\,G\,B\,L\,D\,I\,H\,C\,F\end{pmatrix}=(B\,E\,G\,L\,F)\ (C\,J\,H\,D\,K)
\end{array}\right.$$

（単位置換を含めて $\mathfrak{A}_2$とする）

$$\mathfrak{A}_3 \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{LBHIDEAGKJFC} \end{pmatrix} = (\mathrm{ALCHG})\ (\mathrm{DIKFE}) \\ \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{CBGKIDLAFJEH} \end{pmatrix} = (\mathrm{ACGLH})\ (\mathrm{DKEIF}) \\ \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{HBAFKICLEJDG} \end{pmatrix} = (\mathrm{AHLGC})\ (\mathrm{DFIEK}) \\ \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{GBLEFKHCDJIA} \end{pmatrix} = (\mathrm{AGHCL})\ (\mathrm{DEFKI}) \end{array} \right.$$

$$\mathfrak{A}_4 \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{ELCIJFABHKGD} \end{pmatrix} = (\mathrm{AEJKG})\ (\mathrm{BLDIH}) \\ \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{JDCHKFELBGAI} \end{pmatrix} = (\mathrm{AJGEK})\ (\mathrm{BDHLI}) \\ \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{KICBGFJDLAEH} \end{pmatrix} = (\mathrm{AKEGJ})\ (\mathrm{BILHD}) \\ \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{GHCLAFKIDEJB} \end{pmatrix} = (\mathrm{AGKJE})\ (\mathrm{BHIDL}) \end{array} \right.$$

$$\mathfrak{A}_5 \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{FALDJKGBCIHE} \end{pmatrix} = (\mathrm{AFKHB})\ (\mathrm{CLEJI}) \\ \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{KFEDIHGALCBJ} \end{pmatrix} = (\mathrm{AKBFH})\ (\mathrm{CEILJ}) \\ \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{HKJDCBGFELAI} \end{pmatrix} = (\mathrm{AHFBK})\ (\mathrm{CJLIE}) \\ \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{BHIDLAGKJEFC} \end{pmatrix} = (\mathrm{ABHKF})\ (\mathrm{CIJEL}) \end{array} \right.$$

$$\mathfrak{A}_6 \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{FGBLEJKHCDIA} \end{pmatrix} = (\mathrm{AFJDL})\ (\mathrm{BGKIC}) \\ \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{JKGAEDIHBLCF} \end{pmatrix} = (\mathrm{AJLFD})\ (\mathrm{BKCGI}) \\ \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{DIKFELCHGABJ} \end{pmatrix} = (\mathrm{ADFLJ})\ (\mathrm{BIGCK}) \\ \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{LCIJEABHKFGD} \end{pmatrix} = (\mathrm{ALDJF})\ (\mathrm{BCIKG}) \end{array} \right.$$

（$\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{A}_3$ $\mathfrak{A}_4$ $\mathfrak{A}_5$ $\mathfrak{A}_6$ は単位置換を含む）

(2)

$$\mathfrak{B}_1 \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{EFGBLDJKHCIA} \end{pmatrix} = (\mathrm{AEL})\ (\mathrm{BFD})\ (\mathrm{CGT})\ (\mathrm{HKI}) \\ \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{LDJFABCIKGHE} \end{pmatrix} = (\mathrm{ALE})\ (\mathrm{BDF})\ (\mathrm{CJG})\ (\mathrm{HIK}) \end{array} \right.$$

$$\mathfrak{B}_2 \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{FKHBAEJICLDG} \end{pmatrix} = (\mathrm{AFE})\ (\mathrm{GJL})\ (\mathrm{BKD})\ (\mathrm{HIC}) \\ \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{EDIKFALCHGBJ} \end{pmatrix} = (\mathrm{AEF})\ (\mathrm{GLJ})\ (\mathrm{BDK})\ (\mathrm{HCI}) \end{array} \right.$$

$$\mathfrak{B}_3 \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{BGKICLAFJDEH} \end{pmatrix} = (\mathrm{ABG})\ (\mathrm{CKE})\ (\mathrm{FLH})\ (\mathrm{DIJ}) \\ \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{GAEJKHBLDICF} \end{pmatrix} = (\mathrm{AGB})\ (\mathrm{CEK})\ (\mathrm{FHL})\ (\mathrm{DJI}) \end{array} \right.$$

$$\mathfrak{B}_4 \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{GKICBAFJDLEH} \end{pmatrix} = (\mathrm{AGF})\ (\mathrm{BKE})\ (\mathrm{CID})\ (\mathrm{LHJ}) \\ \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{FEDIKGALCHBJ} \end{pmatrix} = (\mathrm{AFG})\ (\mathrm{BEK})\ (\mathrm{CDI})\ (\mathrm{LJH}) \end{array} \right.$$

$$\mathfrak{B}_5 \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{LAGHCDEFKIJB} \end{pmatrix} = (\mathrm{ALB})\ (\mathrm{CGE})\ (\mathrm{DHF})\ (\mathrm{IKJ}) \\ \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{BLEFGHCDJKIA} \end{pmatrix} = (\mathrm{ABL})\ (\mathrm{CEG})\ (\mathrm{DFH})\ (\mathrm{IJK}) \end{array} \right.$$

$$\mathfrak{B}_6 \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{DLBHIJEAGKFC} \end{pmatrix} = (\mathrm{ADH})\ (\mathrm{BLC})\ (\mathrm{EIG})\ (\mathrm{FJK}) \\ \begin{pmatrix} \mathrm{ABCDEFGHIJKL} \\ \mathrm{HCLAGKIDEFJB} \end{pmatrix} = (\mathrm{AHD})\ (\mathrm{BCL})\ (\mathrm{EGI})\ (\mathrm{FKJ}) \end{array} \right.$$

$$\mathfrak{B}_7\begin{cases}\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\D\,C\,H\,K\,J\,E\,L\,B\,G\,F\,A\,I\end{pmatrix}=(ADK)\ (BCH)\ (EJF)\ (GLI)\\ \begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\K\,H\,B\,A\,F\,J\,I\,C\,L\,E\,D\,G\end{pmatrix}=(AKD)\ (BHC)\ (EFJ)\ (GIL)\end{cases}$$

$$\mathfrak{B}_8\begin{cases}\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\C\,H\,K\,J\,D\,L\,B\,G\,F\,E\,A\,I\end{pmatrix}=(ACK)\ (BHG)\ (DJE)\ (IFL)\\ \begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\K\,G\,A\,E\,J\,I\,H\,B\,L\,D\,C\,F\end{pmatrix}=(AKC)\ (BGH)\ (DEJ)\ (ILF)\end{cases}$$

$$\mathfrak{B}_9\begin{cases}\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\J\,E\,L\,C\,I\,K\,F\,A\,B\,H\,G\,D\end{pmatrix}=(AJH)\ (BEI)\ (CLD)\ (FKG)\\ \begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\H\,I\,D\,L\,B\,G\,K\,J\,E\,A\,F\,C\end{pmatrix}=(AHJ)\ (BIE)\ (CDL)\ (FGK)\end{cases}$$

$$\mathfrak{B}_{10}\begin{cases}\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\J\,F\,A\,L\,D\,I\,K\,G\,B\,C\,H\,E\end{pmatrix}=(AJC)\ (BFI)\ (DLE)\ (GKH)\\ \begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\C\,I\,J\,E\,L\,B\,H\,K\,F\,A\,G\,D\end{pmatrix}=(ACJ)\ (BIF)\ (DEL)\ (GHK)\end{cases}$$

($\mathfrak{B}\,i$ ($i=1,2\ldots.10$)に単位置換を加える。)

(3)

$$\mathfrak{C}_1\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\B\,A\,F\,K\,H\,C\,L\,E\,J\,I\,D\,G\end{pmatrix}=(AB)\,(CF)\,(DK)\,(EH)\,(GL)\,(IJ)$$

$$\mathfrak{C}_2\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\J\,I\,H\,G\,F\,E\,D\,C\,B\,A\,L\,K\end{pmatrix}=(AJ)\,(BI)\,(CH)\,(DG)\,(EF)\,(KL)$$

$$\mathfrak{C}_3\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\I\,J\,E\,L\,C\,H\,K\,F\,A\,B\,G\,D\end{pmatrix}=(AI)\,(BJ)\,(CE)\,(DL)\,(FH)\,(GK)$$

$$\mathfrak{C}_4\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\G\,F\,J\,I\,H\,B\,A\,E\,D\,C\,L\,K\end{pmatrix}=(AG)\,(BF)\,(CJ)\,(DI)\,(EH)\,(KL)$$

$$\mathfrak{C}_5\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\I\,C\,B\,G\,K\,J\,D\,L\,A\,F\,E\,H\end{pmatrix}=(AI)\,(BC)\,(DG)\,(EK)\,(FJ)\,(HL)$$

$$\mathfrak{C}_6\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\D\,J\,F\,A\,L\,C\,I\,K\,G\,B\,H\,E\end{pmatrix}=(AD)\,(BJ)\,(CF)\,(GI)\,(HK)\,(EL)$$

$$\mathfrak{C}_7\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\F\,J\,I\,H\,G\,A\,E\,D\,C\,B\,L\,K\end{pmatrix}=(AF)\,(BJ)\,(CI)\,(DH)\,(EG)\,(KL)$$

$$\mathfrak{C}_8\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\C\,L\,A\,G\,H\,I\,D\,E\,F\,K\,J\,B\end{pmatrix}=(AC)\,(BL)\,(DG)\,(EH)\,(FI)\,(JK)$$

$$\mathfrak{C}_9\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\I\,K\,F\,E\,D\,C\,H\,G\,A\,L\,B\,J\end{pmatrix}=(AI)\,(BK)\,(CF)\,(DE)\,(GH)\,(JL)$$

$$\mathfrak{C}_{10}\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\I\,H\,G\,F\,J\,D\,C\,B\,A\,E\,L\,K\end{pmatrix}=(AI)\,(BH)\,(CG)\,(DF)\,(EJ)\,(KL)$$

$$\mathfrak{C}_{11}\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\K\,J\,D\,C\,H\,G\,F\,E\,L\,B\,A\,I\end{pmatrix}=(AK)\,(BJ)\,(CD)\,(EH)\,(FG)\,(IL)$$

$$\mathfrak{C}_{12}\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\L\,E\,F\,G\,B\,C\,D\,J\,K\,H\,I\,A\end{pmatrix}=(AL)\,(BE)\,(CF)\,(DG)\,(HJ)\,(IK)$$

$$\mathfrak{C}_{13}\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\H\,G\,F\,J\,I\,C\,B\,A\,E\,D\,L\,K\end{pmatrix}=(AH)\,(BG)\,(CF)\,(DJ)\,(EI)\,(KL)$$

$$\mathfrak{C}_{14}\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\E\,J\,K\,G\,A\,L\,D\,I\,H\,B\,C\,F\end{pmatrix}=(AE)\,(BJ)\,(CK)\,(DG)\,(FL)\,(HI)$$

$$\mathfrak{C}_{15}\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\\I\,D\,L\,B\,H\,K\,J\,E\,A\,G\,F\,C\end{pmatrix}=(AI)\,(BD)\,(CL)\,(EH)\,(FK)\,(GJ)$$

($\mathfrak{C}\,i$ ($i=1,2,3\ldots.15$)に単位置換を加える。)

正20面体を同一の空間をしめるように回転して出来たこれらの置換はすべてで60個ある。これらの置換はすべて偶置換であることは，偶数個の互換におきかえられることからわかる。またこれら60個の置換が，群をなしているか一応しらべてみる。

まず

(1) $\mathfrak{A}\,i$ ($i=1,2,\ldots,6$) は相対する頂点を結んでできる直線AI，BJ，CF，DG，EH，KLを軸として $\frac{2}{5}\pi$，$\frac{4}{5}\pi$，$\frac{6}{5}\pi$，$\frac{8}{5}\pi$，2πの回転によって出来る置換，$4\times6=24$個の置換が(1)の置換。（単位置換も入れる。）

(2) $\mathfrak{B}\,i$ ($i=1,2,\ldots,10$) は相対する面の中心を結ぶ10個の直線を軸として$\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$の回転によって出来る置換，$2\times10=20$

(3) $\mathfrak{C}\,i$ ($i=1,2,\ldots,15$) は相対する辺の中点を結ぶ15本の直線を軸として，π の回転によって出来る

置換15個。

(a) これらの置換の2つをとって，2度の置換も正20面体を同一の空間をしめるような回転である。

(b) 結合法則の成立することは，置換を

$$p=\begin{pmatrix}a_1\,a_2\cdots\cdots a_n\\ b_1b_2\cdots\cdots b_n\end{pmatrix}\quad q=\begin{pmatrix}b_1b_2\cdots\cdots b_n\\ c_1\,c_2\cdots\cdots c_n\end{pmatrix}$$

$$r=\begin{pmatrix}c_1\,c_2\cdots\cdots c_n\\ d_1d_2\cdots\cdots d_n\end{pmatrix}$$

とすると

$$(p\cdot q)\cdot r=p\cdot(q\cdot r)=\begin{pmatrix}a_1a_2\cdots\cdots a_n\\ d_1d_2\cdots\cdots d_n\end{pmatrix}$$

となってつねに成立する。

(c) 単位元は単位置換である。

(d) 逆元は，あとでのべるが、$\mathfrak{A}_i$ と単位置換，$\mathfrak{B}_i$ と置換，$\mathfrak{C}_i$ と単位置換が，巡回群をなしていることからかならず唯一つ存在する。

（2）部分群と構造

群$\mathfrak{G}$の部分群については，群$\mathfrak{G}$の位数の約数を位数とするもののみ考えればよい。（以後は20面体群を群$\mathfrak{G}$と呼ぶことにする。）

さしあたり必要な部分群についてしらべる。

(1)における，AＩを軸とする置換$\mathfrak{A}_2$（単位置換も入れる。）は位数５である巡回群である。

$A_2\in\mathfrak{A}_2$を取って

$$A_2=(BGFEL)(CHKJD)$$
$$A_2^2=(BGFEL)^2(CHKJD)^2=(BFLGE)(CLDHJ)$$
$$A_2^3=(BGFEL)^3(CHKJD)^3=(BEGLF)(CJHDK)$$
$$A_2^4=(BGFEL)^4(CHKJD)^4=(BLEFG)(CDJKH)$$
$$A_2^5=(BGFEL)^5(CHKJD)^5=e$$

となって，$\mathfrak{A}_2=\{A_2\}$ はA_2を生成元とする巡回群である。

他の軸による置換，$\mathfrak{A}_1=\{A_1\}$，$\mathfrak{A}_3=\{A_3\}$，$\mathfrak{A}_4=\{A_4\}$，$\mathfrak{A}_5=\{A_5\}$，$\mathfrak{A}_6=\{A_6\}$ も巡回群となり，位数は５位である。

また$\mathfrak{A}_1$，$\mathfrak{A}_2$，$\mathfrak{A}_3$，$\mathfrak{A}_4$，$\mathfrak{A}_5$，$\mathfrak{A}_6$は１つの共役部分群系を作っている。

すなわち，いま任意の２つの同次の置換をとつて見る。

$$A=\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\cdots\cdots n\\ a\ b\ c\cdots\cdots \ell\end{pmatrix}$$

$$T=\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\cdots\cdots n\\ t_1t_2t_3\cdots\cdots t_n\end{pmatrix}$$

とすれば，

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}t_1\,t_2t_3\cdots\cdots t_n\\ 1\ 2\ 3\cdots\cdots n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\cdots\cdots n\\ a\ b\ c\cdots\cdots \ell\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\ \ b\ \ c\cdots\cdots \ell\\ t_a\,t_c\,t_b\cdots\cdots t_\ell\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t_1\,t_2\,t_3\cdots\cdots t_n\\ t_a t_b\,t_c\cdots\cdots t_\ell\end{pmatrix}$$

またもし，Aが巡回部に分解してあれば，巡回部の１つとして（１，２，３，……ｎ，）の形をしているから

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}t_1t_2t_3\cdots\cdots tn\\ t_2t_3t_4\cdots\cdots t_1\end{pmatrix}=(t_1t_2t_3\cdots\cdots t_n)$$

となる。なぜかといえば，置換Ａをこれと同次の置換Ｔで変形した結果は，その上下の行の文字が，Ｔの置換に従つて，同時に書き変えたものである。実際に

$$\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\cdots\cdots n\\ t_1\,t_2t_3\cdots\cdots t_n\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\ 4\cdots\cdots n-1\,n\\ 2\ 3\ 4\ 5\cdots\cdots\cdots n\ 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\cdots\cdots n\\ t_1\,t_2t_3\cdots\cdots t_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t_1\,t_2t_3\cdots\cdots t_n\\ 1\ 2\ 3\cdots\cdots n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\ 4\cdots\cdots n-1\,n\\ 2\ 3\ 4\ 5\cdots\cdots\cdots n\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\cdots\cdots n\\ t_1\,t_2t_3\cdots\cdots t_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}t_1\,t_2t_3\cdots\cdots t_n\\ 2\ 3\ 4\cdots\cdots 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\cdots\cdots n\\ t_1\,t_2t_3\cdots\cdots t_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}t_1t_2t_3\cdots\cdots t_n\\ t_2t_3t_4\cdots\cdots t_1\end{pmatrix}=(t_1t_2t_3\cdots\cdots t_n)$$

となる。

もしＡが巡回部の積になっておれば，各巡回部の文字をそのままＴに従って書き変えて得られる巡回部の積となり，$\{A_i\}$（$i=1,2,3,4,5,6$）のように，５位の巡回群の$\mathfrak{G}$の任意の元での$T^{-1}AT$の変形は例えば，

$$A_2=\begin{pmatrix}ABCDEFGHIJKL\\ AGHCLEFKIDJB\end{pmatrix}を$$

$$T=\begin{pmatrix}A\ B\ C\ D\ E\ F\ G\ H\ I\ J\ K\ L\\ A'B'C'D'E'F'G'H'I'J'K'L'\end{pmatrix}で変形す$$

ると

$$T^{-1}A_2T=\begin{pmatrix}A'B'C'D'E'F'G'H'I'J'K'L'\\ A\ B\ C\ D\ E\ F\ G\ H\ I\ J\ K\ L\end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}ABCDEFGHIJKL\\ AGHCLEFKIDJB\end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}A\ B\ C\ D\ E\ F\ G\ H\ I\ J\ K\ L\\ A'B'C'D'E'F'G'H'I'J'K'L'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A'B'C'D'E'F'G'H'I'J'K'L'\\ A'G'H'C'L'E'F'K'I'D'J'B'\end{pmatrix}$$

$$=(B'G'F'E'L')(C'H'K'J'D')$$

となって，５文字の巡回部の２つの積に変形されて，$\{A_i\}$（$i=1,2,3,4,5,6$）の中のいずれかの元になっている。

また $\{A_i\}$は巡回群であるから，この巡回部の文字の入かえによって，$T^{-1}\mathfrak{A}_2T$ の変形はやはり

$$\{(B'G'F'E'L')(C'H'K'J'D')\}$$

の２つの５文字のそれぞれの巡回部の中の文字の入替えだけであって，集団的に，$\{A_1\}$，$\{A_2\}$，$\{A_3\}$，$\{A_4\}$，$\{A_5\}$，$\{A_6\}$の中のいずれかに移動する。

従って，$\{A_1\}$，$\{A_2\}$，$\{A_3\}$，$\{A_4\}$，$\{A_5\}$，$\{A_6\}$は$\mathfrak{G}$の共役部分群系となっている。

$\mathfrak{G}$の元として，いま

$$G=\begin{pmatrix}ABCDEFGHIJKL\\ EFGBLDJKHCIA\end{pmatrix}$$

をとると，

$$G^{-1}\begin{pmatrix}ABCDEFGHIJKL\\ LBHIDEAGKJFC\end{pmatrix}G$$

$$=\begin{pmatrix}EFGBLDJKHCIA\\AFKHBLEJICDG\end{pmatrix}$$
$$=(AGKJE)(BHIDL)$$
$$G^{-1}\begin{pmatrix}ABCDEFGHIJKL\\CBGKIDLAFJEH\end{pmatrix}G$$
$$=\begin{pmatrix}EFGBLDJKHCIA\\GFJIHBAEDCLK\end{pmatrix}$$
$$=(AKEGJ)(BILHD)$$
$$G^{-1}\begin{pmatrix}ABCDEFGHIJKL\\HBAFKICLEJDG\end{pmatrix}G$$
$$=\begin{pmatrix}EFGBLDJKHCIA\\KFEDIHGALCBJ\end{pmatrix}$$
$$=(AJGEK)(BDHLI)$$
$$G^{-1}\begin{pmatrix}ABCDEFGHIJKL\\GBLEFKHCDJIA\end{pmatrix}G$$
$$=\begin{pmatrix}EFGBLDJKHCIA\\JFALDIKGBCHE\end{pmatrix}$$
$$=(AEJKG)(BLDIH)$$
$$G^{-1}\begin{pmatrix}ABCDEFGHIJKL\\ABCDEFGHIJKL\end{pmatrix}G$$
$$=G^{-1}G=e$$

集団的に　$G^{-1}\mathfrak{A}_3G=\mathfrak{A}_4$に移る。

(2)における　$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4, \mathfrak{B}_5, \mathfrak{B}_6, \mathfrak{B}_7, \mathfrak{B}_8, \mathfrak{B}_9, \mathfrak{B}_{10}$（単位置換を含む。）はそれぞれ，位数３位の巡回群であり，可換群である。

$$\mathfrak{B}_1=\left\{\begin{array}{l}(AEL)(BFD)(CGJ)(HKI),\\(ALE)(BDF)(CJG)(HIK),\\e\end{array}\right\}$$

も$\mathfrak{G}$の任意の元

$$G=\begin{pmatrix}A\ B\ C\ D\ E\ F\ G\ H\ I\ J\ K\ L\\A'B'C'D'E'F'G'H'I'J'K'L'\end{pmatrix}$$

をとって，

$$G^{-1}(\mathfrak{B}_1)G$$

の変形で，

$$\left\{\begin{array}{l}(A'E'L')(B'F'D')(C'G'J')(H'K'I'),\\(A'L'E')(B'D'F')(C'J'G')(H'I'K'),\\e\end{array}\right\}$$

となって，集団として $\mathfrak{B}i$（$i=1, 2, 3\cdots\cdots10$）のいずれかに移る。 $\mathfrak{B}i$（$1, 2, 3\cdots\cdots10$）は$\mathfrak{G}$の共役部分群系を作る。

(3)の相対する辺を結ぶ直線を軸とする置換群$\mathfrak{C}i$（$i=1, 2, 3\cdots\cdots15$）（単位置換を含む。）は２位の巡回群で，共役部分群系を作ることは前と同様である。

註(1)　($\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\cdots\cdots\mathfrak{A}_6$)，($\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\cdots\cdots\mathfrak{B}_{10}$)（$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\cdots\cdots\mathfrak{C}_{15}$）はそれぞれ$\mathfrak{G}$の部分群ではない。

註(2)　(3)の対辺の中点を結ぶ軸のうち，直角に交わる３軸による置換は５組に分かれ，これに単位置換を加えた４位の置換はそれぞれ群であり，上のように，５個の群が共役部分群系をなしている。

$\{\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, e\}$　$\{\mathfrak{C}_4, \mathfrak{C}_5, \mathfrak{C}_6, e\}$　$\{\mathfrak{C}_7, \mathfrak{C}_8, \mathfrak{C}_9, e\}$　$\{\mathfrak{C}_{10}, \mathfrak{C}_{11}, \mathfrak{C}_{12}, e\}$　$\{\mathfrak{C}_{13}, \mathfrak{C}_{14}, \mathfrak{C}_{15}, e\}$

	a \ b	e	$\mathfrak{C}_1$	$\mathfrak{C}_2$	$\mathfrak{C}_3$
	e	e	$\mathfrak{C}_1$	$\mathfrak{C}_2$	$\mathfrak{C}_3$
a_0b	$\mathfrak{C}_1$	$\mathfrak{C}_1$	e	$\mathfrak{C}_3$	$\mathfrak{C}_2$
	$\mathfrak{C}_2$	$\mathfrak{C}_2$	$\mathfrak{C}_3$	e	$\mathfrak{C}_1$
	$\mathfrak{C}_3$	$\mathfrak{C}_3$	$\mathfrak{C}_2$	$\mathfrak{C}_1$	e

この群表よりこの４位の群はKlein群であり，立方体の回転群 K_3 と同型であることは，模型からもわかる。

（３） 20面体群と同型の群

（１）20面体群が単群であること

$\mathfrak{N}$を$\mathfrak{G}$の正規部分群と仮定して，その位数をnとするとnが５の倍数ならば，$\mathfrak{N}$は５位の部分群を含まなければならない。しかし，$\mathfrak{G}$における５位の部分群は$\mathfrak{G}$における１つの共役部分群系を作っている。したがって，正規部分群$\mathfrak{N}$は$\mathfrak{G}$におけるすべての５位の部分群を含むべきである。ゆえに $\mathfrak{A}i$（$i=1, 2, 3\cdots\cdots6$）をすべて含む。

３位の部分群は$\mathfrak{G}$の一共役系を作るから，nが３の倍数ならば$\mathfrak{N}$は $\mathfrak{B}i$（$i=1, 2, 3\cdots\cdots10$）をすべて含む。

２位の部分群は$\mathfrak{G}$の一共役系を作るから，nが２の倍数ならば$\mathfrak{N}$は $\mathfrak{C}i$（$i=1, 2, 3\cdots\cdots15$）をすべて含む。したがって，$\mathfrak{N}$の位数は単位元を加えて

$$4\times6+10\times2+15\times1+1=60$$

となり，$\mathfrak{G}$の位数と一致する。$\mathfrak{N}$は$\mathfrak{G}$自身となり，$\mathfrak{G}$の正規部分群は$\mathfrak{G}$と単位元の２つになり，したがって$\mathfrak{G}$は単群である。

（２） ５次の交代群は単群である

A，B，C，D，Eの５文字の上に行われた交代群を$\mathfrak{R}$として，その正規部分群$\mathfrak{N}$を持つとすれば

①$\mathfrak{N}$が３項の巡回置換を含むとすれば，$\mathfrak{N}$は$\mathfrak{R}$と一致する。

いま

$$(ABC)\in\mathfrak{N}$$

とすれば「n次の交代群は(n－2)様可遷群となり，逆にn次の（n－2）様可遷群は$\mathfrak{R}_n$と一致する。」ことより５次の交代群は３様可遷群である。

ゆえに$\mathfrak{R}$は

$$(ABC)\longrightarrow(ABD)$$
$$(ABC)\longrightarrow(ABE)$$

におきかえる置換

$$Ai=\begin{pmatrix}ABCDE\\AB\,x_i\cdots\end{pmatrix}\quad(x_i=C, D, E)$$

を含む。

$A^{-1}(ABC)A_i=(ABx_i)$

$(ABx_i)\in\mathfrak{N}$

であるから

(ABC), (ABD), (ABE)

の三項巡回置換を含む。したがって

$\mathfrak{N}=\mathfrak{K}$

②$\mathfrak{N}$は必ず三項巡回置換を含む。

いまNを$\mathfrak{N}$の任意の置換，Aを$\mathfrak{K}$の置換とし

$L=N^{-1}A^{-1}NA\in\mathfrak{N}$

となり，$\mathfrak{N}$のすべての置換を巡回表示すれば，これから得られる場合はつぎの3つの場合につきる。

ⓐ　$N=(ABCDE)$ の形のとき

$L=(ABCDE)^{-1}(ABC)^{-1}(ABCDE)$

$(ABC)=\begin{pmatrix}ABCDE\\BCDEA\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}ABCDE\\BCADE\end{pmatrix}^{-1}$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\BCDEA\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ABCDE\\BCADE\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ABCDE\\EABCD\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\CABDE\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ABCDE\\BCDEA\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ABCDE\\BCADE\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}ABCDE\\BDCAE\end{pmatrix}=(ABD)\in\mathfrak{N}$

ⓑ　$N=(AB)(CD)$の形のとき

$N=(AB)(CD)$, $A=(ABE)$ とすれば

$L=\{(AB)^{-1}(CD)^{-1}\}(ABE)^{-1}\{(AB)$

$(CD)\}(ABE)=\begin{pmatrix}ABCDE\\BADCB\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\EACDB\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ABCDE\\BADCE\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ABCDE\\BECDA\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}ABCDE\\EACDB\end{pmatrix}=(AEB)\in\mathfrak{N}$

ⓒ　$N=(CED)$など3項巡回置換の1つの置換。

(ABC), (ABD), (ABE)はこれでよいが(CED)などの3項置換は

$A=\begin{pmatrix}ABCDE\\DECAB\end{pmatrix}$

によって

$L=(CED)^{-1}\begin{pmatrix}ABCDE\\DECAB\end{pmatrix}^{-1}(CED)$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\DEACB\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ABCDE\\BCDEA\end{pmatrix}$

$=(ABCDE)\in\mathfrak{N}$

となって，ⓐの場合に帰するから，ⓐⓑⓒによって，5次の交代群の巡回置換のすべてをつくした。

（5次の交代群参照）$\mathfrak{N}$は三項巡回置換(ABC) (ABD), (ABE)をすべて含むことになり，①より$\mathfrak{N}=\mathfrak{K}$となる。

したがって，5次の交代群は単群であることがわかった。また

(3)60位単群はすべて同型である。

60位単群はすべて同型であることもしられている。

(1)(2)(3)より

$\mathfrak{G}\simeq\mathfrak{K}$

であることが言える。

（4）　5次の交代群

20面体群$\mathfrak{G}$よりも5次の交代群の方が表現が簡単であるから，これに切換えて，あらためてその構造をしらべて見る。

先に書いた順序に従って，5次の交代群を列挙する。

(1)　$\mathfrak{G}$の単位置換に対応するもの

$\begin{pmatrix}ABCDE\\ABCDE\end{pmatrix}=e$

(2)　$\mathfrak{G}$の$\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{A}_6$に対応するもの

$p=\begin{pmatrix}ABCDE\\BCDEA\end{pmatrix}=(ABCDE)$

$q=p^2=\begin{pmatrix}ABCDE\\CDEAB\end{pmatrix}=(ACEBD)$

$r=p^3=\begin{pmatrix}ABCDE\\DEABC\end{pmatrix}=(ADBEC)$

$s=p^4=\begin{pmatrix}ABCDE\\EABCD\end{pmatrix}=(AEDCB)$

eを加えて，$\mathfrak{A}_1$ の5位の巡回群

▲　$\mathfrak{A}_1=\{(ABCDE)\}$

(註)

a∘b

a＼b	e	p	q	r	s
e	e	p	q	r	s
p	p	q	r	s	e
q	q	r	s	e	p
r	r	s	e	p	q
s	s	e	p	q	r

位数5の群は5が素数であるから，巡回群で，すべてこの型と同型である。

$\begin{pmatrix}ABCDE\\BCEAD\end{pmatrix}=(ABCDE)$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\CEDBA\end{pmatrix}=(ACDBE)$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\EDACB\end{pmatrix}=(AEBDC)$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\DABEC\end{pmatrix}=(ADECB)$

eを加えて，5位の巡回群

▲　$\mathfrak{A}_2=\{(ABCED)\}$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\BCAEC\end{pmatrix}=(ABDEC)$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\DEBCA\end{pmatrix}=(ADCBE)$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\ECDAB\end{pmatrix}=(AEBCD)$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\ECDAB\end{pmatrix}=(ACEDB)$

eを加えて，5位の巡回群

▲ $\mathfrak{A}_3=\{(ABDEC)\}$ ┛

$\begin{pmatrix}ABCDE\\BDECA\end{pmatrix}=(ABCDE)$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\DCAEB\end{pmatrix}=(ADEBC)$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\CEBAD\end{pmatrix}=(ACBED)$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\EADBC\end{pmatrix}=(AECDB)$

eを加えて，5位の巡回群

▲ $\mathfrak{A}_4=\{(ABDCE)\}$ ┛

$\begin{pmatrix}ABCDE\\BEACD\end{pmatrix}=(ABEDC)$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\EDBAC\end{pmatrix}=(AECBD)$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\DCEBA\end{pmatrix}=(ADBCE)$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\CADEB\end{pmatrix}=(ACDEB)$

eを加えて，5位巡回群

▲ $\mathfrak{A}_5=\{(ABEDC)\}$ ┛

$\begin{pmatrix}ABCDE\\BEDAC\end{pmatrix}=(ABECD)$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\ECABD\end{pmatrix}=(AEDBC)$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\CDBEA\end{pmatrix}=(ACBDE)$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\DAECB\end{pmatrix}=(ADCEB)$

eを加えて，5位の巡回群

▲ $\mathfrak{A}_6=\{(ABECD)\}$ ┛

(3) $\mathfrak{G}$の3位の巡回群に対応するもの

$p=\begin{pmatrix}ABCDE\\ABDEC\end{pmatrix}=(CDE)$

$q=p^2=\begin{pmatrix}ABCDE\\ABECD\end{pmatrix}=(CED)$

eを加えて，3位の巡回群

○ $\mathfrak{B}_1=\{(CDE)\}$ ┛

(註)

$a\circ b$

a \ b	e	p	q
e	e	p	q
p	p	q	e
q	q	e	p

位数が3で素数であるから，巡回群で，3位の群はこれと同型

$\begin{pmatrix}ABCDE\\BCADE\end{pmatrix}=(ABC)$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\CABDE\end{pmatrix}=(ACB)$

eを加えて，3位の巡回群

○ $\mathfrak{B}_2=\{(ABC)\}$ ┛

$\begin{pmatrix}ABCDE\\CBDAE\end{pmatrix}=(ACD)$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\DBACE\end{pmatrix}=(ADC)$

eを加えて，3位の巡回群

○ $\mathfrak{B}_3=\{(ACD)\}$ ┛

$\begin{pmatrix}ABCDE\\BECDA\end{pmatrix}=(ABE)$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\EACDB\end{pmatrix}=(AEB)$

eを加えて，3位の巡回群

○ $\mathfrak{B}_4=\{(ABE)\}$ ┛

$\begin{pmatrix}ABCDE\\BDCAE\end{pmatrix}=(ABD)$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\DACBE\end{pmatrix}=(ADB)$

eを加えて，3位の巡回群

○ $\mathfrak{B}_5=\{(ABD)\}$ ┛

$\begin{pmatrix}ABCDE\\ACDBE\end{pmatrix}=(BCD)$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\ADBCE\end{pmatrix}=(BDC)$

eを加えて，3位の巡回群

○ $\mathfrak{B}_6=\{(BCD)\}$ ┛

$\begin{pmatrix}ABCDE\\ADCEB\end{pmatrix}=(BDE)$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\AECBD\end{pmatrix}=(BED)$

eを加えて，3位の巡回群

○ $\mathfrak{B}_7=\{(BDE)\}$ ┛

$\begin{pmatrix}ABCDE\\CBEDA\end{pmatrix}=(ACE)$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\EBADC\end{pmatrix}=(AEC)$

eを加えて，3位の巡回群

○ $\mathfrak{B}_8=\{(ACE)\}$ ┛

$\begin{pmatrix}ABCDE\\ACEDB\end{pmatrix}=(BCE)$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\AEBDC\end{pmatrix}=(BEC)$

eを加えて，3位の巡回群

○ $\mathfrak{B}_9=\{(BCE)\}$ ┛

$\begin{pmatrix}ABCDE\\DBCEA\end{pmatrix}=(ADE)$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\EBCAD\end{pmatrix}=(AED)$

eを加えて，3位の巡回群

○ $\mathfrak{B}_{10}=\{(ADE)\}$ ┛

(4) $\mathfrak{G}$の2位の巡回群に対応するもの

□ $\mathfrak{C}_1=\begin{pmatrix}ABCDE\\BACED\end{pmatrix}=(AB)\ (DE)$

□ $\mathfrak{C}_2=\begin{pmatrix}ABCDE\\DECAB\end{pmatrix}=(AD)\ (BE)$

□ $\mathfrak{C}_3=\begin{pmatrix}ABCDE\\EDCBA\end{pmatrix}=(AE)\ (BD)$

$\{\mathfrak{C}_1, e\}$ $\{\mathfrak{C}_2, e\}$ $\{\mathfrak{C}_3, e\}$は2位の巡回群

◎ $\mathfrak{D}_1=\{e, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3\}$は4位のKlein 群 ┛

□ $\mathfrak{C}_4=\begin{pmatrix}ABCDE\\ACBED\end{pmatrix}=(BC)\ (DE)$

□ $\mathfrak{C}_5=\begin{pmatrix}ABCDE\\ADEBC\end{pmatrix}=(BD)\ (CE)$

□ $\mathfrak{C}_6=\begin{pmatrix}ABCDE\\AEDCB\end{pmatrix}=(BE)\ (CD)$

$\{\mathfrak{C}_4, e\}$ $\{\mathfrak{C}_5, e\}$ $\{\mathfrak{C}_6, e\}$は2位の巡回群

◎ $\mathfrak{D}_2=\{e,\ \mathfrak{C}_4,\ \mathfrak{C}_5,\ \mathfrak{C}_6\}$は4位の Klein 群 ┘

□ $\mathfrak{C}_7=\begin{pmatrix}ABCDE\\BAEDC\end{pmatrix}=(AB)\ (CE)$

□ $\mathfrak{C}_8=\begin{pmatrix}ABCDE\\CEADB\end{pmatrix}=(AC)\ (BE)$

□ $\mathfrak{C}_9=\begin{pmatrix}ABCDE\\ECBDA\end{pmatrix}=(AE)\ (BC)$

$\{\mathfrak{C}_7, e\}$ $\{\mathfrak{C}_8, e\}$ $\{\mathfrak{C}_9, e\}$は2位の巡回群

◎ $\mathfrak{D}_3=\{e,\ \mathfrak{C}_7,\ \mathfrak{C}_8,\ \mathfrak{C}_9\}$は4位の Klien 群 ┘

□ $\mathfrak{C}_{10}=\begin{pmatrix}ABCDE\\CBAED\end{pmatrix}=(AC)\ (DE)$

□ $\mathfrak{C}_{11}=\begin{pmatrix}ABCDE\\DBEAC\end{pmatrix}=(AD)\ (CE)$

□ $\mathfrak{C}_{12}=\begin{pmatrix}ABCDE\\EBDCA\end{pmatrix}=(AE)\ (CD)$

$\{\mathfrak{C}_{10}, e\}$ $\{\mathfrak{C}_{11}, e\}$ $\{\mathfrak{C}_{12}, e\}$は2位の巡回群

◎ $\mathfrak{D}_4=\{e, \mathfrak{C}_{10}, \mathfrak{C}_{11}, \mathfrak{C}_{12}\}$は4位の Klein 群 ┘

□ $\mathfrak{C}_{13}=\begin{pmatrix}ABCDE\\BADCE\end{pmatrix}=(AB)\ (CD)$

□ $\mathfrak{C}_{14}=\begin{pmatrix}ABCDE\\CDABE\end{pmatrix}=(AC)\ (BD)$

□ $\mathfrak{C}_{15}=\begin{pmatrix}ABCDE\\DCBAE\end{pmatrix}=(AD)\ (BC)$

$\{\mathfrak{C}_{13}, e\}$ $\{\mathfrak{C}_{14}, e\}$ $\{\mathfrak{C}_{15}, e\}$は2位の巡回群

◎ $\mathfrak{D}_5=\{e, \mathfrak{C}_{13}, \mathfrak{C}_{14}, \mathfrak{C}_{15}\}$は4位の Klein 群 ┘

《4》 その他の部分群

さらに5次の交代群はその1文字Aを動かさないような置換は群をなしている。B，C，D，Eを動かさない置換（単位置換を含む）も群をなしているこれらの群を

$\mathfrak{H}_A$，$\mathfrak{H}_B$，$\mathfrak{H}_C$，$\mathfrak{H}_D$，$\mathfrak{H}_E$

とすれば，たとえば，A→Cにうつす任意の置換で変形すれば，$\mathfrak{H}_C$ となる。

$$\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\\C\,x\,y\,z\,\omega\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\\A\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\\C\,x\,y\,z\,\omega\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}A\ B\ C\ D\ E\\\cdot\ \cdot\ C\ \cdot\ \cdot\end{pmatrix}\in\mathfrak{H}_C$$

となる。$\mathfrak{H}_A$，$\mathfrak{H}_B$，$\mathfrak{H}_C$，$\mathfrak{H}_D$，$\mathfrak{H}_E$ は $\mathfrak{G}$ の共役部分群系をなしている。

いま，$\mathfrak{H}_A$，$\mathfrak{H}_B$，$\mathfrak{H}_C$，$\mathfrak{H}_D$，$\mathfrak{H}_E$ を挙げると，これは12位の部分群である。

○

● $\mathfrak{H}_A$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\ABCDE\end{pmatrix}=e$	$\begin{pmatrix}ABCDE\\ABDEC\end{pmatrix}=(CDE)$
$\begin{pmatrix}ABCDE\\ABECD\end{pmatrix}=(CED)$	$\begin{pmatrix}ABCDE\\ADCEB\end{pmatrix}=(BDE)$
$\begin{pmatrix}ABCDE\\AECBD\end{pmatrix}=(BED)$	$\begin{pmatrix}ABCDE\\AEBDC\end{pmatrix}=(BEC)$
$\begin{pmatrix}ABCDE\\ACEDB\end{pmatrix}=(BCE)$	$\begin{pmatrix}ABCDE\\ADBCE\end{pmatrix}=(BDC)$
$\begin{pmatrix}ABCDE\\ACDBE\end{pmatrix}=(BCD)$	$\begin{pmatrix}ABCDE\\ACBED\end{pmatrix}=(BC)\ (DE)$
$\begin{pmatrix}ABCDE\\ADEBC\end{pmatrix}=(BD)\ (CE)$	$\begin{pmatrix}ABCDE\\AEDCB\end{pmatrix}=(BE)\ (CD)$

● $\mathfrak{H}_B$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\ABCDE\end{pmatrix}=e$	$\begin{pmatrix}ABCDE\\ABDEC\end{pmatrix}=(CDE)$
$\begin{pmatrix}ABCDE\\ABECD\end{pmatrix}=(CED)$	$\begin{pmatrix}ABCDE\\DBCEA\end{pmatrix}=(ADE)$
$\begin{pmatrix}ABCDE\\EBCAD\end{pmatrix}=(AED)$	$\begin{pmatrix}ABCDE\\CBEDA\end{pmatrix}=(ACE)$
$\begin{pmatrix}ABCDE\\EBADC\end{pmatrix}=(AEC)$	$\begin{pmatrix}ABCDE\\CBDAE\end{pmatrix}=(ACD)$
$\begin{pmatrix}ABCDE\\DBACE\end{pmatrix}=(ADC)$	$\begin{pmatrix}ABCDE\\CBAED\end{pmatrix}=(AC)\ (DE)$
$\begin{pmatrix}ABCDE\\DBEAC\end{pmatrix}=(AD)\ (CE)$	$\begin{pmatrix}ABCDE\\EBDCA\end{pmatrix}=(AE)\ (CD)$

● $\mathfrak{H}_C$

$\begin{pmatrix}ABCDE\\ABCDE\end{pmatrix}=e$	$\begin{pmatrix}ABCDE\\ADCEB\end{pmatrix}=(BDE)$
$\begin{pmatrix}ABCDE\\AECBD\end{pmatrix}=(BED)$	$\begin{pmatrix}ABCDE\\DBCEA\end{pmatrix}=(ADE)$
$\begin{pmatrix}ABCDE\\EBCAD\end{pmatrix}=(AED)$	$\begin{pmatrix}ABCDE\\BECDA\end{pmatrix}=(ABE)$

$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\E&A&C&D&B\end{pmatrix}=(AEB)$　$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\B&D&C&A&E\end{pmatrix}=(ABD)$

$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\D&A&C&B&E\end{pmatrix}=(ADB)$　$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\B&A&C&E&D\end{pmatrix}=(AB)\ (DE)$

$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\E&D&C&B&A\end{pmatrix}=(AE)\ (BD)$　$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\D&E&C&A&B\end{pmatrix}=(AD)\ (BE)$

● $\mathfrak{H}_D$

$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\A&B&C&D&E\end{pmatrix}=e$　$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\A&C&E&D&B\end{pmatrix}=(BCE)$

$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\A&E&B&D&C\end{pmatrix}=(BEC)$　$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\C&B&E&D&A\end{pmatrix}=(ACE)$

$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\E&B&A&D&C\end{pmatrix}=(AEC)$　$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\B&E&C&D&A\end{pmatrix}=(ABE)$

$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\E&A&C&D&B\end{pmatrix}=(AEB)$　$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\B&C&A&D&E\end{pmatrix}=(ABC)$

$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\C&A&B&D&E\end{pmatrix}=(ACB)$　$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\B&A&E&D&C\end{pmatrix}=(AB)\ (CE)$

$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\C&E&A&D&B\end{pmatrix}=(AC)\ (BE)$　$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\E&C&B&D&A\end{pmatrix}=(AE)\ (BC)$

● $\mathfrak{H}_E$

$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\A&B&C&D&E\end{pmatrix}=e$　$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\A&C&D&B&E\end{pmatrix}=(BCD)$

$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\A&D&B&C&E\end{pmatrix}=(BDC)$　$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\C&B&D&A&E\end{pmatrix}=(ACD)$

$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\D&B&A&C&E\end{pmatrix}=(ADC)$　$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\B&D&C&A&E\end{pmatrix}=(ABD)$

$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\D&A&C&B&E\end{pmatrix}=(ADB)$　$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\B&C&A&D&E\end{pmatrix}=(ABC)$

$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\C&A&B&D&E\end{pmatrix}=(ACB)$　$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\B&A&D&C&E\end{pmatrix}=(AB)\ (CD)$

$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\C&D&A&B&E\end{pmatrix}=(AC)\ (BD)$　$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\D&C&B&A&E\end{pmatrix}=(AD)\ (BC)$

《5》 正規部分群（正規化群）

(1) 以前にあげた$\mathfrak{H}_A$，$\mathfrak{H}_B$，$\mathfrak{H}_C$，$\mathfrak{H}_D$，$\mathfrak{H}_E$ の部分群として，それぞれ$\mathfrak{D}_2$，$\mathfrak{D}_4$，$\mathfrak{D}_1$，$\mathfrak{D}_3$，$\mathfrak{D}_5$ がある。しかも正規部分群をなしている。

たとえば，

$$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\A&x&y&z&u\end{pmatrix}\in\mathfrak{H}_A$$

で $\mathfrak{D}_2$に含まれる元を変形すれば，

$$\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\A&x&y&z&u\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\A&C&B&D&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\A&x&y&z&u\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A&x&y&z&u\\A&y&x&u&z\end{pmatrix}=(x\,y)\ (z\,u)$$

となって，x，y，z，uはB，C，D，Eのいずれかであるから

$$(x\,y)\ (z\,u)\in\mathfrak{D}_2$$

である。したがって，$\mathfrak{H}_A$，$\mathfrak{H}_B$，$\mathfrak{H}_C$，$\mathfrak{H}_D$，$\mathfrak{H}_E$ の正規部分群を列挙して見ると，

$\mathfrak{H}_A$の正規部分群（il$_2$の正規化群）

$\mathfrak{D}_2=\{e,(BC)(DE),(BD)(CE),(BE)(CD)\}$

$\mathfrak{H}_B$の正規部分群（$\mathfrak{D}_4$の正規化群）

$\mathfrak{D}_4=\{e,(AC)(DE),(AD)(CE),(AE)(CD)\}$

$\mathfrak{H}_C$の正規部分群（$\mathfrak{D}_1$の正規化群）

$\mathfrak{D}_1=\{e,(AB)(DE),(AE)(BD),(AD)(BE)\}$

$\mathfrak{H}_D$の正規部分群（$\mathfrak{D}_3$の正規化群）

$\mathfrak{D}_3=\{e,(AB)(CE),(AC)(BE),(AE)(BC)\}$

$\mathfrak{H}_E$の正規部分群（$\mathfrak{D}_5$の正規化群）

$\mathfrak{D}_5=\{e,(AB)(CD),(AC)(BD),(AD)(BC)\}$

(2) 5位の共役部分群系の各々の正規化群

5位の部分群$\mathfrak{A}i$（i＝1，2……6）の正規化群の位数は $^{60}/_{6}=10$ であるから，それ自身以外に5個の元を見つけなければならない。一つ一つ実際に探して見る。

$\mathfrak{A}_1=\{(ABCDE),(ACEBD),(ADBED),(AEDCB),e\}$

この1つの元(ABCDE)の文字A，Eを交換し，B，Dを交換しても，$\mathfrak{A}_1$ の中に含まれる。すなわち，

$$(EDCBA)=(AEDCB)\in\mathfrak{A}_1$$

同様に(ACEBD)はAD，CBをそれぞれ交換すれば

(DBECA)=(ADBEC)$\in\mathfrak{A}_1$

(AEDCB)→(BCDEA)=(ABCDE)$\in\mathfrak{A}_1$

(ADBEC)→(CEBDA)=(ACEBD)$\in\mathfrak{A}_1$

これから$\mathfrak{A}_1$の正規化群は，$\mathfrak{A}_1$の元に５個の元を加えて

(AB)(CE)，(AC)(DE)，(AD)(BC)，
(AE)(BD)，(BE)(CD)

の10個である。

▲ $\mathfrak{A}_1$ の正規化群

{e，(ABCDE)，(ACEBD)，(ADBEC)，(AEDCB)，
(AB)(CE)，(AC)(DE)，(AD)(BC)，(AE)(BD)，(BE)(CD)}

▲ $\mathfrak{A}_2$ の正規化群

{e，(ABCED)，(ACDBE)，(AEBDC)，(ADECB)，
(AC)(DE)，(AE)(CB)，(AB)(DC)，(BD)(CE)，(AD)(BE)}

▲ $\mathfrak{A}_3$ の正規化群

{e，(ABDEC)，(ADCBE)，(AEBCD)，(ACEDB)，
(AC)(BE)，(AE)(BD)，(BC)(DE)，(AD)(CE)，(AB)(CD)}

▲ $\mathfrak{A}_4$ の正規化群

{e，(ABDCE)，(ADEBC)，(ACBED)，(AECDB)，
(AE)(BC)，(AC)(DB)，(AD)(CE)，(AB)(ED)，(BE)(DC)}

▲ $\mathfrak{A}_5$ の正規化群

{e，(ABEDC)，(AECBD)，(ADBCE)，(ACDEB)，
(AC)(BD)，(AD)(EB)，(AE)(DC)，(AB)(CE)，(BC)(ED)}

▲ $\mathfrak{A}_6$ の正規化群

{e，(ABECD)，(AEDBC)，(ACBDE)，(ADCEB)，
(AD)(BC)，(AC)(BE)，(AE)(CD)，(AB)(DE)，(BD)(EC)}

(３) ３位の正規化群（正規部分群が３位のもの）

$\mathfrak{B}_1$ = {e，(CDE)，(CED)}はABの文字が不動でC，D，Eの３文字の間の置換を考えればよい。

(CDE)について，

$$\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\\B\,A\,C'D'E\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\\A\,B\,D\,E\,C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\,B\,C\,D\,E\\B\,A\,C'D'E'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A\,B\,C'D'E'\\A\,B\,D'E'C'\end{pmatrix}=(C'D'E')$$

となって，(AB) の巡回部にC，D，Eの文字の適当な２つの互換の因子を加えた置換が，正規化群の元となる。

他の群$\mathfrak{B}_2$，$\mathfrak{B}_3$………$\mathfrak{B}_{10}$についても同じである。

○ $\mathfrak{B}_1$ の正規化群

{e，(CDE)，(CED)，(AB)(DE)，(AB)(CE)，(AB)(CD)}

○ $\mathfrak{B}_2$ の正規化群

{e，(ABC)，(ACB)，(DE)(AB)，(DE)(BC)，(DE)(AC)}

○ $\mathfrak{B}_3$ の正規化群

{e，(ACD)，(ADC)，(BE)(AD)，(BE)(AC)，(BE)(CD)}

○ $\mathfrak{B}_4$ の正規化群

{e，(ABE)，(AEB)，(CD)(AB)，(CD)(BE)，(CD)(AE)}

○ $\mathfrak{B}_5$ の正規化群

{e，(ABD)，(ADB)，(CE)(AB)，(CE)(AD)，(CE)(BD)}

○ $\mathfrak{B}_6$ の正規化群

{e，(BCD)，(BDC)，(AE)(BD)，(AE)(BC)，(AE)(CD)}

○ $\mathfrak{B}_7$ の正規化群

{e，(BDE)，(BED)，(AC)(BD)，(AC)(BE)，(AC)(DE)}

○ $\mathfrak{B}_8$ の正規化群

{e，(ACE)，(AEC)，(BD)(AC)，(BD)(AE)，(BD)(CE)}

○ $\mathfrak{B}_9$ の正規化群

{e，(BCE)，(BEC)，(AD)(BC)，(AD)(BE)，(AD)(CE)}

○ $\mathfrak{B}_{10}$の正規化群

{e, (ADE), (AED), (BC)(DE), (BC)(AE), (BC)(AD)}
以上6位の群である。

(4) 2位の正規化群

$\mathfrak{D}_1$ {e, (AB)(DF)}はCが不動で，ABDEのいれかわった，2つの互換であるから，$\frac{{}_4C_2}{2}=3$に単位を加えたものである。

■ $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$の正規化群
$\mathfrak{D}_1$={e, (AB)(DE), (AD)(BE), (AE)(BD)}

■ $\mathfrak{D}_4$, $\mathfrak{D}_5$, $\mathfrak{D}_6$の正規化群
$\mathfrak{D}_2$={e, (BC)(DE), (BD)(CE), (BE)(CD)}

■ $\mathfrak{D}_7$, $\mathfrak{D}_8$, $\mathfrak{D}_9$の正規化群
$\mathfrak{D}_3$={e, (AB)(CE), (AC)(BE), (AE)(BC)}

■ $\mathfrak{D}_{10}$, $\mathfrak{D}_{11}$, $\mathfrak{D}_{12}$の正規化群
$\mathfrak{D}_4$={e, (AC)(DE), (AD)(CE), (AE)(CD)}

■ $\mathfrak{D}_{13}$, $\mathfrak{D}_{14}$, $\mathfrak{D}_{15}$の正規化群
$\mathfrak{D}_5$={e, (AB)(CD), (AC)(BD), (AD)(EC)}

(6) $\mathfrak{G}$は他の部分群は持たないこと

群$\mathfrak{G}$について，その位数をgとすれば，その部分群の位数はgの約数である。g=60であるから，$\mathfrak{G}$の部分群として，30位数，20位数，15位数の部分群が考えられる。

(1) $\mathfrak{G}$は30位数の部分群を持たないこと。

まず30位数の部分群をしらべて見ると

$30=2\times3\times5$

である。

Sylowの定理より，位数2，3，5の共役なSylow群を持つ。

そのSylow群の個数は各々，何個含まれるかを調べる。

$6 \mid 1+5\lambda_1$で，5位のSylow群は1個，6個
$10 \mid 1+3\lambda_2$で，3位のSylow群は1個，10個
$15 \mid 1+2\lambda_3$で，2位のSylow群は1個，3個，5個，15個

この各々が，1つのみの正規部分群をもっているとすると矛盾を生ずる。

(a) 5位の部分群の数を1個とすると矛盾を生ずる。

5次の交代群$\mathfrak{K}$においても，5位の部分群の正規化群の位数は$\frac{60}{6}=10$である。もし，5位の分群の数1個を30位の部分群が含むとすれば，それは30位分群の正規部分群であるべきで，5位の部分群以外に25個の元素によって，交換可能となり，これは矛盾する。ゆえに5位の分群は1個でなくて6個の共役系を作る。

ⓑ 3位の部分群の数を1個とすると矛盾を生ずる。

3位の部分群において正規化群の位数は$\frac{60}{10}=6$位である。しかし3位の部分群自身以外に27個の元素が交換可能となり矛盾を生ずる。ゆえに，3位の部分群は一個でなく10個の共役系を作る。

ⓒ 同様に2位の部分群を1個でなく，3個か5個か15個の共役系を作る。

したがって，

5位の部分群の6個の共役系中，単位元をのぞいて相異なる元の数は

$(5-1)\times6=24$

3位の部分群の10位の共役系中，単位元をのぞいて相異なる元の数は

$(3-1)\times10=20$

これらの元は相違なるゆえ，それのみで，24+20=44となり，30をこえてしまうから，30位の部分群は$\mathfrak{H}$の部分群として存在しない。

註（群Gの部分群をHとすると，Gの元の中でHと交換可能なものすなわち，正規化群の位数はGの位数とHの正規部分群の個数でわった商である。）

(2) 20位の部分群も存在しない。
(3) 15位の部分群も存在しない。
(2)(3)は(1)と同様に証明できる。

(8) 結び

以上は群についての簡単な研究であって，十分とは思えないが，一つの群の構造は，一見複雑な構造をしているように見えるが，次第に組立てると，一つのまとまった構造が築き上げられていく。20面体群についても，この構造がHasseの図式に表わして見るとさらにすっきりする。

（註） 5次の交代群の置換で

(1) 5文字不動の置換……………………1個
(2) 4文字不動の置換……………………0個
(3) 3文字不動の置換……………………0個
(4) 2文字不動の置換………$2\times{}_5C_2=20$個
(5) 1文字不動の置換…………$3\times5=15$個
(6) すべてが移動の置換…………………24個

$$\mathfrak{G}\begin{cases}(2)\cdots e\ （単位置換）\\(4)\cdots\mathfrak{B}i\ (i=1,2\cdots\cdots10)\\(5)\cdots\mathfrak{C}i\ (i=1,2\cdots\cdots15)\\(6)\cdots\mathfrak{A}i\ (i=1,2\cdots\cdots6)\end{cases}\qquad \left.\begin{matrix}(2)\\(4)\\(5)\end{matrix}\right\}\ \mathfrak{H}i\ (i=A,B,C,D,E)$$

で構成され，この立場から5次の交代群をしらべて見る方法もある。

20面体群のHesseの図式

5次交代群$\mathfrak{A}$ (20面体群)

- $\mathfrak{H}_A$ {e, (CDE), (CED), (BDE), (BED), (BEC), (BCE), (BDC), (BCD), (BC)(DE), (BD)(CE), (BE)(CD)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$ $\mathfrak{D}_2$ {e, (BC)(DE), (BD)(CE), (BE)(CD)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$
  - $\mathfrak{C}_1$ {e, (BC)(DE)}
  - $\mathfrak{C}_5$ {e, (BD)(CE)}
  - $\mathfrak{C}_6$ {e, (BE)(CD)}
- $\mathfrak{H}_B$ {e, (CDE), (CED), (ADE), (AED), (ACE), (AEC), (ACD), (ADC), (AC)(DE), (AD)(CE), (AE)(CD)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$ $\mathfrak{D}_1$ {e, (AC)(DE), (AD)(CE), (AE)(CD)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$
  - $\mathfrak{C}_{10}$ {e, (AC)(DE)}
  - $\mathfrak{C}_{11}$ {e, (AD)(CE)}
  - $\mathfrak{C}_{12}$ {e, (AE)(CD)}
- $\mathfrak{H}_C$ {e, (BDE), (BED), (ADE), (AED), (ABE), (AEB), (ABD), (ADB), (AB)(DE), (AE)(BD), (AD)(BE)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$ $\mathfrak{D}_4$ {e, (AB)(DE), (AD)(BE), (AE)(BD)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$
  - $\mathfrak{C}_1$ {e, (AB)(DE)}
  - $\mathfrak{C}_2$ {e, (AD)(BE)}
  - $\mathfrak{C}_3$ {e, (AE)(BD)}
- $\mathfrak{H}_D$ {e, (BCE), (BEC), (ACE), (AEC), (ABE), (AEB), (ABC), (ACB), (AB)(CE), (AC)(BE), (AE)(BC)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$ $\mathfrak{D}_3$ {e, (AB)(CE), (AC)(BE), (AE)(BC)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$
  - $\mathfrak{C}_7$ {e, (AB)(CE)}
  - $\mathfrak{C}_8$ {e, (AC)(BE)}
  - $\mathfrak{C}_9$ {e, (AE)(BC)}
- $\mathfrak{H}_E$ {e, (BCD), (BDC), (ACD), (ADC), (ABD), (ADB), (ABC), (ACB), (AB)(CD), (AC)(BD), (AD)(BC)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$ $\mathfrak{D}_5$ {e, (AB)(CD), (AC)(BD), (AD)(BC)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$
  - $\mathfrak{H}_{13}$ {e, (AB)(CD)}
  - $\mathfrak{H}_{11}$ {e, (AC)(BD)}
  - $\mathfrak{H}_{15}$ {e, (AD)(BC)}
- $\mathfrak{A}_1$ の正規化群 {e, (ABCDE), (ACEBD), (ADBEC), (AEDCB), (AB)(CE), (AC)(DE), (AD)(BC), (AE)(BD), (BE)(CD)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$ $\mathfrak{A}_1$ {e, (ABCDE), (ACEBD), (ADBEC), (AEDCB)}
- $\mathfrak{A}_2$ の正規化群 {e, (ABCED), (ACDBE), (AEBDC), (ADECB), (AC)(DE), (AE)(CB), (AB)(DC), (BD)(CE), (AD)(BE)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$ $\mathfrak{A}_2$ {e, (ABCED), (ACDBE), (AEBDC), (ADECB)}
- $\mathfrak{A}_3$ の正規化群 {e, (ABDEC), (ADCBE), (AEBCD), (ACEDB), (AC)(BE), (AE)(BD), (BC)(DE), (AD)(CE), (AB)(CD)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$ $\mathfrak{A}_3$ {e, (ABDEC), (ADCBE), (AEBCD), (ACEDB)}
- $\mathfrak{A}_4$ の正規化群 {e, (ABDCE), (ADEBC), (ACBED), (AECDB), (AE)(BC), (AC)(DB), (AD)(CE), (AB)(ED), (BE)(DC)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$ $\mathfrak{A}_4$ {e, (ABDCE), (ADEBC), (ACBED), (AECDB)}
- $\mathfrak{A}_5$ の正規化群 {e, (ABEDC), (AECBD), (ADBCE), (ACDEB), (AC)(BD), (AD)(EB), (AE)(DC), (AB)(CE), (BC)(ED)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$ $\mathfrak{A}_5$ {e, (ABEDC), (AECBD), (ADBCE), (ACDEB)}
- $\mathfrak{A}_6$ の正規化群 {e, (ABECD), (AEDBC), (ACBDE), (ADCEB), (AD)(BC), (AC)(BE), (AE)(CD), (AB)(DE), (BD)(EC)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$ $\mathfrak{A}_6$ {e, (ABECD), (AEDBC), (ACBDE), (ADCEB)}
- $\mathfrak{B}_1$ の正規化群 {e, (CDE), (CED), (AB)(DE), (AB)(CE), (AB)(CD)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$ $\mathfrak{B}_1$ {e, (CDE), (CED)}
- $\mathfrak{B}_2$ の正規化群 {e, (ABC), (ACB), (DE)(AB), (DE)(BC), (DE)(AC)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$ $\mathfrak{B}_2$ {e, (ABC), (ACB)}
- $\mathfrak{B}_3$ の正規化群 {e, (ACD), (ADC), (BE)(AD), (BE)(AC), (BE)(CD)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$ $\mathfrak{B}_3$ {e, (ACD), (ADC)}
- $\mathfrak{B}_4$ の正規化群 {e, (ABE), (AEB), (CD)(AB), (CD)(BE), (CD)(AE)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$ $\mathfrak{B}_4$ {e, (ABE), (AEB)}
- $\mathfrak{B}_5$ の正規化群 {e, (ABD), (ADB), (CE)(AB), (CE)(AD), (CE)(BD)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$ $\mathfrak{B}_5$ {e, (ABD), (ADB)}
- $\mathfrak{B}_6$ の正規化群 {e, (BCD), (BDC), (AE)(BD), (AE)(BC), (AE)(CD)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$ $\mathfrak{B}_6$ {e, (BCD), (BDC)}
- $\mathfrak{B}_7$ の正規化群 {e, (BDE), (BED), (AC)(BD), (AC)(BE), (AC)(DE)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$ $\mathfrak{B}_7$ {e, (BDE), (BED)}
- $\mathfrak{B}_8$ の正規化群 {e, (ACE), (AEC), (BD)(AC), (BD)(AE), (BD)(CE)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$ $\mathfrak{B}_8$ {e, (ACE), (AEC)}
- $\mathfrak{B}_9$ の正規化群 {e, (BCE), (BEC), (AD)(BC), (AD)(BE), (AD)(CE)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$ $\mathfrak{B}_9$ {e, (BCE), (BEC)}
- $\mathfrak{B}_{10}$ の正規化群 {e, (ADE), (AED), (BC)(DE), (BC)(AE), (BC)(AD)} $\xrightarrow{\text{正規部分群}}$ $\mathfrak{B}_{10}$ {e, (ADE), (AED)}