〔3〕 数　学　科

中学・高校の関数指導上の問題点

阿　部　健　一

は じ め に

現在高校では，数学の授業内容を十分理解できる生徒は少なく，ほとんどわからずに卒業してしまう者もかなりある。高校の数学教材においては，関数の占める割合が非常に大きく，関数的な見方，とらえ方が重視される。従って中学で，関数教材を十分理解できる素地を養わねばならない。またこのたびの，中学の数学の教育課程の改定にともない，関数の取扱いが従来と若干変わるので，これまでのいろいろな問題点を究明のこれからの指導上の参考の一端になればと思う。

・2つの変数 x と y がともなって変わるとき，x と y との間には，関数関係があるといい，その関係を y の値が x の値によってきまるとみたとき，y は x の関数であるという。

・y が x の一次式で表わされるとき，つまり $y=ax+b$（a・bは定数）の形に表わされるとき，y は x の一次関数であるという。（以上，中2）

・2つの変数 x・y があつて，y が x の二次式 $y=ax^2+bx+c$（a，b，cは定数）の形になるとき，y は x の二次関数であるという。（中3）

従来関数のとらえ方として，上のように教科書では扱われてきた。しかし関数指導でねらうものは，具体的事象を変化や対応の観点からとらえる態度，能力を養なう。つまり具体的事象の中から，ともなって変わる量を見い出し，その対応の様子や特徴を調べたり，対応の規則を追求したりしていく。

こういったねらいが十分達成されるような指導がなされなければならないのであるが，従来では，関数というと，式・グラフばかり前面に出て，生徒の意識の中には，関数関係とは，が x が変われば y 変わるという程度のばくぜんとしたものしかない。そして関数＝式あるいは，関数＝グラフ，という固定概念からぬけきらないで，たとえば，$f(x)=\begin{cases}1 & x:\text{有理数}\\ 0 & x:\text{無理数}\end{cases}$ などを関数としてとらえられる生徒は少ない。

関数で最も大切な，「x の変化につれて，y はどのように変化するか。」「何がきまれば，これがきまるか。」「y と x の間の対応関係の規則」などをとらえさせることに関して，今まで十分でなかった。もっと対応関係の規則を表面に打ち出す必要がある。そしてその規則の表現方法として，式・グラフなどを位置づけるべきである。

即ち，「集合 x の任意の元xに対し，集合 y の元 y がただ1つきまる対応の規則があるとき，この規則を関数という。」といったとらえ方をした方が，関数指導の目的が十分達成される。

ところで関数の基本概念として集合，対応といったことが，十分生徒に理解されなくてはならない。一つの事象の中で，互いに対応するものを見い出したとしても，それらの対応を個々に意識するだけで，対応する元を含む集合が意識できなければ，それは関数意識とはならない。つまり対応をどういう範囲で考えているか，明確にとらえなくではならない。ただ $y=ax$ の対応関係があるといっても，x が実数と整数では内容がずいぶん違ってくる。また，たとえば1ケ10円のみかんを買ったときのみかんの個数と代金を考えたとき，2ケで20円，3ケで30円，4ケで40円………の対応は意識できても，2ケ，3ケ，4ケ………いかなる集合の元であるか，20円，30円，40円………がいかなる数か意識しない限り，$y=10x$ の関数意識は持ちえないのである。

このたびの教育課程の改訂では，関数を集合の対応関係の規則としてとらえている。

さて，今まで，関数というと正比例，反比例からはいって，1次関数，2次関数へと発展していったが，規則以前に式そのものがあった。即ち具体的問題→式→表→グラフといった具合なので，関数の本質である規則をとらえるのに問題がある。もっと関数そのものを理解させるような工夫がなされなければならない。それには有限離散的な元からなる集合の上で定義される分離量関数を扱うと，対応関係の規則，原像，像，定義，減，値減，f (x) の意味，逆関数……等を一般的な概念をしっかりとらえさせられる。中2あたりで整数から整数への対応を扱うのが適当と考える。対応を指導する場合，これまで使わなかった f を使うと大変便利である。たとえば1次関数は

$$\begin{array}{ccc} x & f & y \\ \left(\begin{array}{c}\cdot\\ x\end{array}\right) & \| & \left(\begin{array}{c} y\\ \cdot\ \| \\ ax+b\end{array}\right) \end{array}$$

a倍して b を
加えるキソク

関数は ｛対応規則が規定されてはじめて定義されること
　　　　　定義減

がもっと強調されるべきである。高校生は $f(x)$ の意味を正確に理解してない者がかなりある（ｆを傾き，保数などと思っている者もある。）が，$f(1)$・$f(2)$……等の値を求めることは比較的できる。即ち，$f(x)$ を離散的な値としてとらえているが，これはどういう範囲で関数を考え，どういう範囲で変化するかといったことを日頃十分考えなかったためである。

それともう１つ大きな理由は，高１で変数ｘの各値に対するyの値を $f(x)$・$g(x)$……等の記号で表わすとだけあって，ｆの説明がなされてないためである。

元同士のバラバラの対応は比較的よく扱ってきたが集合同士のまとまった対応をもっと取り上げ，定義域値域等の指導をしていかなければならない。

次にグラフについてであるが，中学ではグラフを書くことに大部時間をかけているが，生徒の意識の中には対応関係といったことがない。特に１次関数のグラフなどは傾きがａで，切片がｂであるということから，ただ機械的に書いている。グラフ指導の目的は具体的な問題の中から対応関係や変化の特徴をひきだすためのわかりやすい手段としてあるべきである。そのためには，グラフを使って，そのグラフから関数の特徴や変化の様子をとらえさせる問題があった方がよい。たとえば実験データの中から相互に変わる量の間の規則などは現在もあるが，もっとあってよい。

グラフを書かせる作業面とか，結果の取り扱いが大切である。$y=ax^2$ のグラフを書かせると，ｘ軸，ｙ軸の目盛を同じくとって非常に細長いグラフを書いたりいくつかの代表点をとってそれを直線で結んだりしている生徒もいるが，どうすれば変化の様子がよくわかるようにグラフを書いたらよいか，どの程度の目盛が必要か，など，作業面を通して関数的考えが養なわれる。ｘに対してｙがただ１つ定まるということや，定義域，値域の指導もグラフを通して十分なされなければならない。（注，$x=a$ はｘの関数でない。これは高校でもｘの関数であると思っている生徒もかなりある。）グラフ＝関数といったあやまったとらえ方が生徒の中におこることはさけなければならない。

どの教科でもそうであるが生徒の発達段階に応じた指導をしなければならない。従って中学でそれほど程度の高いことは必要でないが，本質的なことは中・高一貫してないと非常に混乱する。たとえば関数を今までのようなとらえ方をして高校で対応規則としてとらえることはとても出来ない。そこで中学で基本的な事柄はきちんと学習してこないと困る。高校での関数教材のおもなものは二次関数，分数関数，無理関数，三角関数，指数関数，対数関数，関数そのもの（逆関数，偶関数，奇関数，単調関数，周期関数……）軌跡，方程式と不等式の関連，微分等

これらの中で現在高校生が特に理解しがたいものをあげると，

① $f(x)$の意味が理解できない。

② 関数関係そのものがあいまい。

③ 逆関数，合成関数の意味

現在の教科書では，高１で指数関数の逆関数として，対数関係を定義し，高３では微分する場合の準備として合成関数を取り扱っているが，これらは生徒たちにとって理解しがたい。$y=f(x)$ の逆関数 $y=g(x)$ の両者を統一的にとらえられず，全く何の関係もない別個の関数として意識されている。現行の教科書で逆関数をどのように扱っているかというと，$y=f(x)$（ただしｘとｙが１：１対応のとき）でｙをきめるとｘがただ１つきまる。従ってｘはｙの関数と考えられる。これを $x=g(y)$ と書く。さらにこのｘ・ｙを入れかえて，$y=g(x)$ と書いたとき，これを $y=f(x)$ の逆関数という。このように大変面当な定義であって逆関数の意味がなかなかわからない。この次からは中３でも逆関数が扱われるが，従来のような取り扱いではおそらく生徒は理解できないだろう。これなどはｆを使って関数を対応関係の規則としてとらえる立場をとれば理解しやすい。たとえば，$y=f(x)=2x$ では

$$f\ :\ x \longrightarrow 2x$$

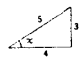
$$f^{-1}\ :\ \frac{y}{2} \longleftarrow y$$

２倍するという規則の逆の対応関係の規則が½倍ということを示している。

④ 具体的問題に関数のグラフが利用出来ない。

中学でたくさんの時間をかけこまかく指導したのに，グラフからの問題解法にむすびつかない。$x^2+ax+b=0$ が -1 と１の間に相異なる２根を持つ条件を考える場合，判別式 $a^2-4b>0$ だけにして，そのあとの処理が出ｘ来ない。

⑤ 三角関数が中学での三角比と混乱している。

$\sin=3/5$のとき $\cos x$ や $\tan x$ の値を求める場合 

として，$\cos x=4/5$，$\tan x=3/4$とだけ答える者がある。

以上十分な研究は出来てないが，実際授業してみると上記の問題点以外にもいろいろな問題がひそんでいる。