高校数学における論証の指導についての私見

持　田　都　也

1.　論証指導について

高校数学における現在の論証の指導は，高Ⅰ数学の終の方に〝集合と論証〟という章でとりあげられているが，断片的で，簡単に扱かわれている。数学的なものの考え方が重要視されて来ている現在，何らかの重要な位置づけが必要である。さらに，各教材の中でつねにとりあげて，身についたものとして，十分消化され，処理されるまでにしなければならないと思う。昭和44年度の大学数学科の教科教育法の受講生（58人）を対称に〝**高校数学における論証の指導はどうあるべきか**〟についてのレポートによって，彼等が自分自身がうけた高校数学と，教育実習によって得た経験から出た主な意見をここに挙げて見る。（　）内は人数

1.　高校数学の現状とあり方

① 高校数学の論証の指導は断片的であり，軽視されており，実際に役立っていない。（15）

② 1つ1つの学習内容がばらばらであり，命題相互間の関係についても，論理的な構成はなく，数学的概念の本質，根底ある思想，それらの概念の関連の把握が出来ない。本質や根底を見きわめるための論理的な思考の出来るような指導が，つねに必要である。（8）

③ 論理の重要性は数学のみに必要とされていない。高校教育の中に論理の必要性を感じる。そのためには数学の中に論理がとりあげられてよい。現代論理学の発想法の1つである文または命題の初歩の基本的なものを出発点として，文と文の結びつきの形式を明らかにする**命願論理学**，さらに文の中の構造まで考慮に入れた**述語論理学**の基本的なものぐらいは，当然高校数学でやってもよい。（5）

④ 公式→証明→応用（問題演習）という，一連のつながりで数学の授業がなされ，概念的構造もなく，公式をうまく使って問題をと,くことに追われ，答のみでればよいのが今の高校数学である。（5）

2.　論証指導の方法

① 命題論理も一つの公理の上に立った数学的な構造をなしているから，高校生にとっては，はじめはとりつきにくいかもしれないが，少くとも，英語の単語をおぼえるよりは楽であると思う。記号も約束もそれほど多くないから，数学の教材として適当であり，集合とむすびつければ，早期の指導もそんなにむづかしくない。（5）

② 命題の中の言語の使用のあいまいさを排除して問題の把握，問題の分析，仮定と結論の連絡を厳密にやることをつねに心掛けるべきだ。（3）

③ 不自然の形からの導入はさけ，全般にわたって具体的な素朴な教材を工夫し，抽象性へとうつるべきだ。（3）

④ 述語論理の中の all と some の指導をしっかりやることが大切である。（3）

⑤ 命題の中の記号と約束の説明を正確に指導し，的確に使えることがまず大切だ。（2）

3.　論証の指導に遅当な教材

① 論証の指導に最もよい教材は幾何教材であったと思う。中でも空間図形に重点をおいた指導がよいと思う。今でも非常に役立っている。（8）

② 集合の考え方をいたるところにとり入れていけばどこにでもよい教材はある。（5）

③ 論理の指導は数学の教材のみでなく，いろいろな具体例を示して指導できるように，身近かな問題の工夫と準備も必要である。（4）

以上が大学数学科生の体験を通じての論証指導についての考え方であるが，私自身も論証指導に命題論理と述語論理の初歩をとり入れ，約10時間の指導を行った。その内容の一部をあげて見る。

2.　命題論理についての学習内容

高Ⅰ数学の〝集合と論証〟の章に試みとして，約8時間具体例をまじえて，次のような指導を行った。

1.　命題の定義について説明しｐ，ｑ，r……と命題の記号化をした。

2.　事柄の分類について

事柄を重複なしに分類すること，これがすべての場合をのべつくしているかの指導をした。例えば

「家にテレビがある」ことと,「家にテレビがない」ことは，すべての場合を言いつくしている。

「ａ＞０」であることと，「ａ＜０」であることはすべて場合を言いつくしていない。

「天気がよければ，散歩する。」

という命題をすべての場合に分類すれば，

天気がよくて(ｐ)　　散歩する(ｑ)………①
天気がよくて(ｐ)　　散歩しない(～ｑ)…②
天気がよくなくて(～ｐ)　散歩する(ｑ)………③

天気がよくなくて(～p)　散歩しない(～q)…④
の4通りになり。これを表であらわせば

	p	～p
q	pでq	～pでq
～q	pで～q	～pで～q

となる。具体的な命題として，
$a \geqq 0$，$b \geqq 0$のとき「$a \geqq b \leftrightarrow a^2 \geqq b^2$」の証明の場合に

$a>0$，$b>0$……………………………①
$a>0$，$b=0$……………………………②
$a=0$，$b>0$……………………………③
$a=0$，$b=0$……………………………④

についてしらべればよい。事柄が複雑になっても，この分類をきちっと取扱うことは，論証においては大切なことであり。後でのべる証明の「流れ図」では絶対に必要になってくる。

3. 命題論理の公理の設定

命題p，qについて，

$p \wedge q$　$p \vee q$　$\sim p$　$p \to q$　$p \leftrightarrow q$

についての公理の設定をする。（なお$p \vee q$の公理にについては，数学では，包含的離接を言っていることに注意。$p \to q$についての公理は，十分なっとくのいく説明はしにくいが，ある命題「$p \to q$」が真のときは，その対偶命題$\sim q \to \sim p$が真であることが明らかになった際にあらためて例えば

「百本足の猫は雄猫である」

の正しいかどうか。その対偶，

「雌猫は百本足の猫でない」

ことから，なっとくさせる方法もある。）

公理

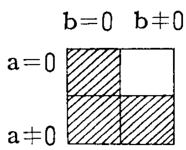
p	q	p ∨ q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	q	p ∧ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	T	F

p	～p
T	F
F	T

p	q	p → q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

4. いろいろの命題の真偽表の作成，恒等命題と矛盾命題

命　題	具　体　例	真偽表正答率
① $(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \wedge (q \wedge r)$	$\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0 \\ x^2+y^2=5y \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ \quad 2x-1>0 \end{cases}$ $a^4+b^2c^2=0$ (a,b,c実数)	43%
② $(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r)$	$ax+b=0$ が根をもつための条件 $\{(a=0 \wedge b=0) \vee a \neq 0\}$ $=\{(a=0 \vee a \neq 0) \wedge (b=0 \vee a \neq 0)\}$ $=(b=0 \vee a \neq 0)$  	57%
③ $\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$ $\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$	$\sim(x \cdot y=0)$，$\sim(x^2-3x+2)<0$ $\sim(x^2-3x+2<0)$	78% 84%
④ $(p \to q) = (\sim p \vee q) = \sim(p \wedge \sim q)$		85%
⑤ $(p \to q) = \sim q \to \sim p$	**対　偶** $(x>2 \to x>4)$と$(x \leqq 4 \to x \leqq 2)$	89%
⑥ $(p \to q) \neq (q \to p)$	**逆** 犬は四つ足である。　$x>2 \to x>4$	84%

命　　　　　題	具　　体　　例	真偽表正答率
⑦　「必要」と「十分」の説明 $p \to q$	qはpであるための必要条件であるというよりも，女が女らしいための必要条件を考えさせるのも興味がもてる。 pがqであるための十分条件であるというより巨人が優勝するにはあと5勝すれば十分であることをあと5勝すれば巨人は優勝といえばよい。	
⑧　恒直命題（トートロジー） $p \vee p$ $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ $\{(p \to q) \wedge p\} \to q$ $\{(p \to q) \wedge (q \to r)\} \to (p \to r)$ $\{(p \wedge \sim q) \to \sim p\} \leftrightarrow (p \to q)$	人間は男であるかまたは男でないのは当然。 実数aについて $a \geqq 0$ または $a < 0$，もしも一つのaについての命題が正しいことが言えるには，$a \geqq 0$ について正しく，$a < 0$ について正しいことが言えればよい。 テレビとラジオがあれば　テレビまたはラジオがある （背理法）　$ab=0 \to (a=0$ または $b=0)$	85% 87% 82% 56% 78%
⑨　矛盾命題 $p \wedge \sim p$ $\{(p \wedge \sim q) \to (r \wedge \sim r)\} \leftrightarrow (p \to q)$	aが実数 $\to a^2 \geqq 0$ （背理法）　3直線a,b,cが同じ平面上にあって $a /\!/ b$，$a /\!/ c \longrightarrow b /\!/ c$　（矛盾を生じる）	41%

3.　簡単な述語論理について

数学の文章は

$x^2-3x+2=0$　………①

nは5でわると1余る………②

$x-y>3$　………③

のように x，y，n は実際に数値を代入して見ないと，真偽が確定しない。このように高校数学の周辺はいたるところに，変数を含んだ文章がある。変数を含んだ文章についての論理，つまり述語論理の理解は大切である。しかし，あまり理論的すぎると，かえって混乱をまねくおそれがある。次に挙げる事項をごく平易に2時間の指導をした。

1.　真理集合について

変数を含んだ文章を命題関数といい，一般に $p(x)$ で表わす。$p(x)$ を真にするxの集合Pを，

「**命題関数 $p(x)$ の真理集合**」

という。①の真理集合は $\{1,2\}$，②の真理集合は $\{n \mid 5k+1,\ k$ は整数$\}$ である。

$p(x)$，$q(x)$ の真理集合をそれぞれP，Qとすると

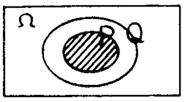
① $p(x) \wedge q(x)$　の真理集合　$P \cap Q$

② $p(x) \vee q(x)$ の真理集合　$P \cup Q$

③ $\sim p(x)$　　の真理集合　$\overline{P}$

2.　簡単な述語論理

命　　　　題	証　明　と　具　体　例
①　全称命題と特称命題 $\forall x\{p(x)\}$	すべての x について　$x^2+1>0 \cdots \forall x(x^2+1>0)$ $\forall x\{p(x)\}$ に対する集合は　$P=\Omega$（Ωは全体集合）
$\exists x\{p(x)\}$	ある x について　$x^2-9>0 \cdots\cdots \exists x(x^2-9>0)$ $\exists x\{p(x)\}$ に対する集合は　$P \neq \phi$
②　否　　定 $\sim[\forall x\{p(x)\}]=\exists x\{\sim p(x)\}$	$\sim[\forall x\{p(x)\}] \rightsquigarrow \overline{P=\Omega} \longleftrightarrow P \neq \Omega \longleftrightarrow \overline{P} \neq \phi$ $\sim[\forall x\{p(x)\}]=\exists x\{\sim p(x)\}$ 「すべての人は勉強家だ。」の否定は「ある人は勉強家でない。」
$\sim[\exists x\{p(x)\}]=\forall x\{\sim p(x)\}$	$\sim[\exists x\{p(x)\}] \rightsquigarrow \overline{P \neq \phi} \longleftrightarrow P=\phi \longleftrightarrow \overline{P}=\Omega$ $\sim[\exists x\{p(x)\}]=\forall x\{\sim p(x)\}$ all x，y について　$ax+by=0 \longrightarrow a=0,\ b=0$ を背理法で証明せよ。

命　　　　題	証　明　と　具　体　例
③　p(x)→q(x) が真であること	$\forall x\{p(x)\to q(x)\}=\forall x\{\sim p(x)\vee q(x)\}$ 〰 $\overline{P}\cup Q=\Omega\longleftrightarrow P\subseteqq Q$ となり，ベン図で  でかける形になる。
④　反　　例	$\forall x\{p(x)\to q(x)\}$ が正しくない。つまり $p(x)\to q(x)$ が正しくないことを示すには $\sim[\forall x\{p(x)\to q(x)\}]=\sim[\forall x\{\sim p(x)\vee q(x)\}]$ $=\exists x[\sim\{\sim p(x)\vee q(x)\}]=\exists x\{p(x)\wedge\sim q(x)\}$ $p(x)$ が真で $q(x)$ が真でない x が存在することを言えばよい。 $a>b,\ c>d\to a-c>b-d$ が正しくない反例をあげよ。 （正答率　73%）

4. 証明の記号化、流れ図の作成について

命題論理や述語論理の学習によって，論証が必ずしも出来るものではないと思う。論証の形式がこうあるべきだということを示し，誤まった論証をしないためには役立つ。実際に論証をする場合に，その流れを確認しつつ，目標に向うこととは別である。

最近電子計算機の発達によって，プログラミングの問題が重要視され，その前提として，流れ図の作成は是非とも必要になって来た。

数学の学習課程にも，この流れ図による計画がなされている。平生いろいろの問題に直面し，その解法を考える場合においても，可能性を検討し，論理的に扱い，単純化し，簡潔化していくために，この考えは基本となると同時に，きわめて有用なことである。そこでいろいろの問題の証明に，記号化と流れ図による論証を試みて見た。

1. 記号化の証明例

（例１）　ある託児所の子供について，兄弟姉妹の有無を調べたところ，
①　兄のある子は弟がない。　②　兄のない子は妹がある。　③　姉のない子は弟か妹がある。
というがわかった。これから「妹のない子は姉か……」あることを証明せよ。

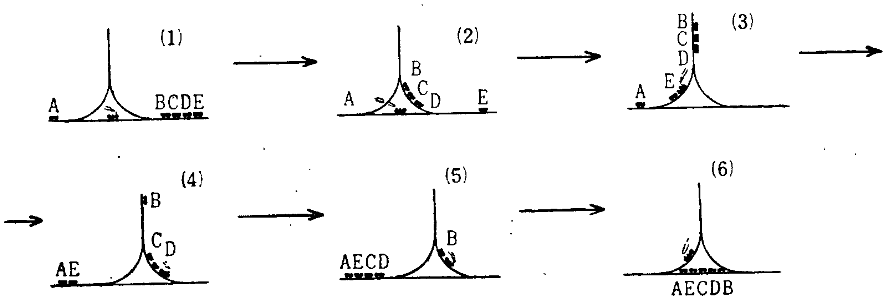
（証明）　A……兄がある。
B……弟がある。
C……姉がある。
D……妹がある。として

(1)　$A\to\sim B$
(2)　$\sim A\to D$
(3)　$\sim C\to(B\vee D)=C\vee(B\vee D)=(C\vee B)\vee(C\vee D)=(\sim C\to B)\vee(\sim C\to D)$

(i)　(3)より $\sim C\to D$ の対偶をとると　$\sim D\to C$
(ii)　(3)より $\sim C\to B$　(1)の対偶 $B\to\sim A$　(2)より $\sim A\to D$　$(\sim C\to B)\wedge(B\to\sim A)\wedge(\sim A\to D)$
より $\sim C\to D$
この対偶をとれば　$\sim D\to C$
(i)(ii)より　$\sim D\to C$　「妹がないならば姉がある。」
（正答率　23%）

2. 流れ図による証明例

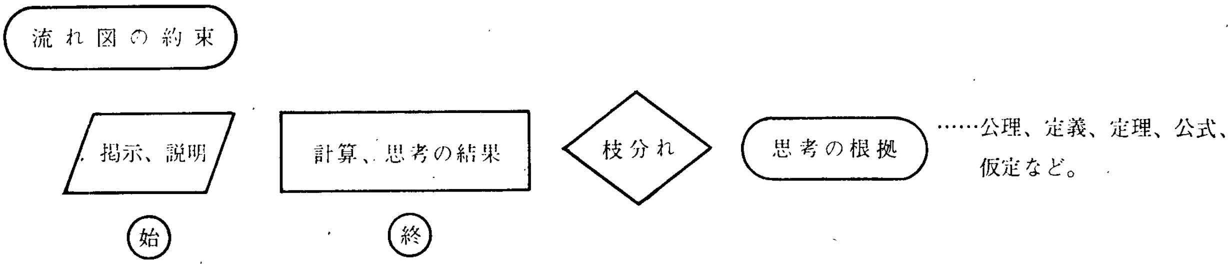
（例２）　左の図のように，１台の機関車によって入替作業をおこない。ＢとＥを入れかえよ。



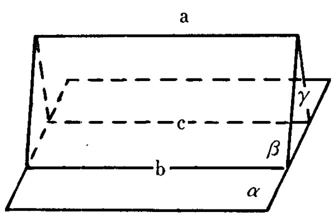
(例 3)　一つの平面αに平行な直線を含む、二つの異なる平面が平面αと二直線a、b で交われば

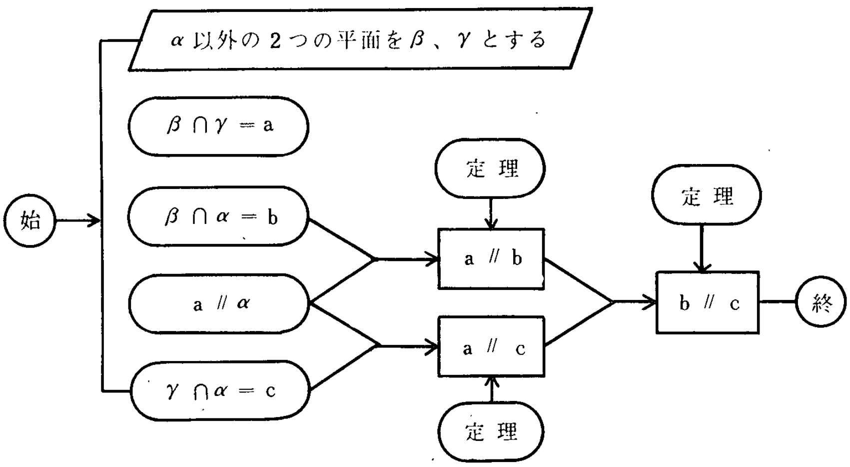
a // b

である。



(証明)

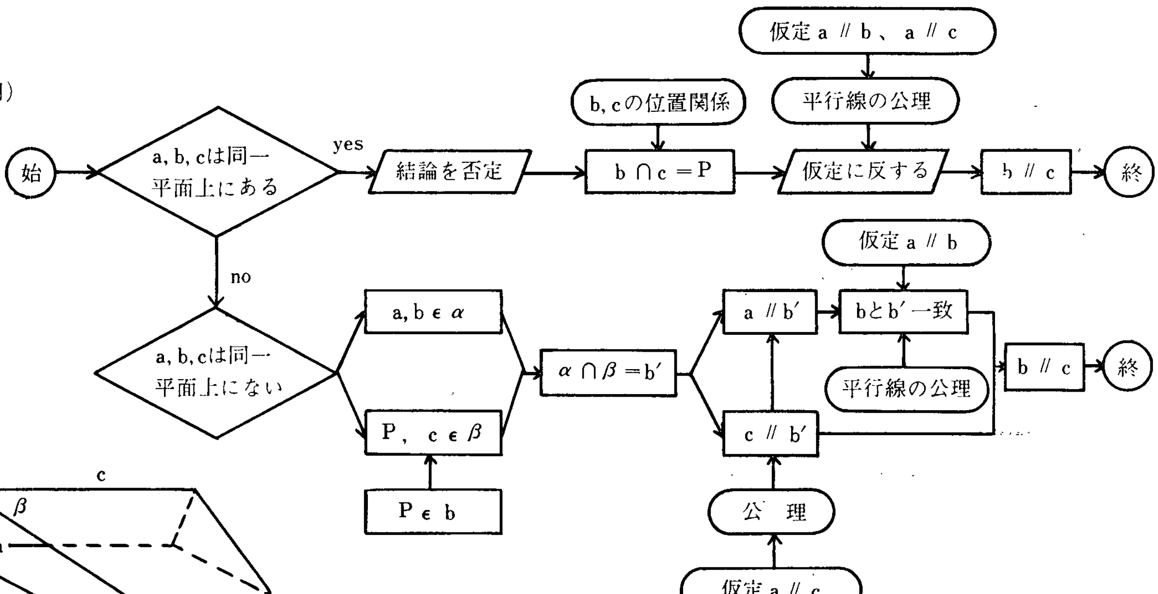


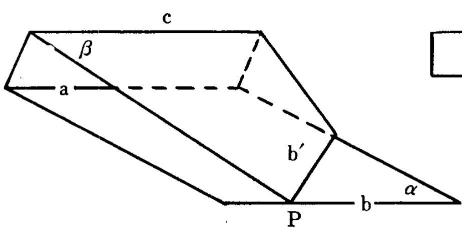


(例 4)　3直線a、b、cについて

a // b、a // c　　→ b // c

(証明)

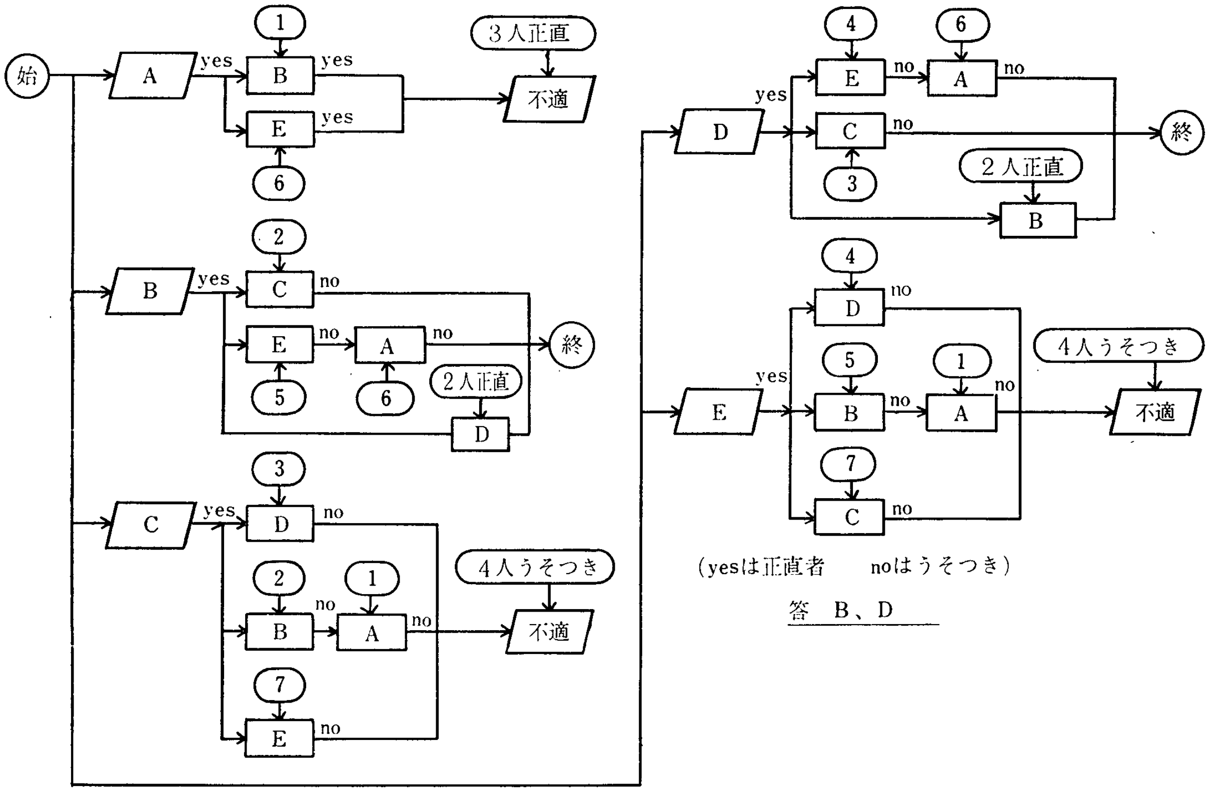




（例 5） A、B、C、D、Eの5人のうち、3人はうそつきで、2人はうそをつかぬ正直者である。かれらはつぎのように話した。

1	A「Bはうそつきでない。」	2	B「Cはうそつきだ。」
3	C「Dはうそつきだ。」	4	D「Eはうそつきだ。」
5	E「Bはうそつきだ。」	6	A「Eはうそつきでない。」
7	E「Cはうそつきだ。」		

さて、うそつきでないのはどの2人か。うそつきは必ずしもうそばかりいうとは限らない。



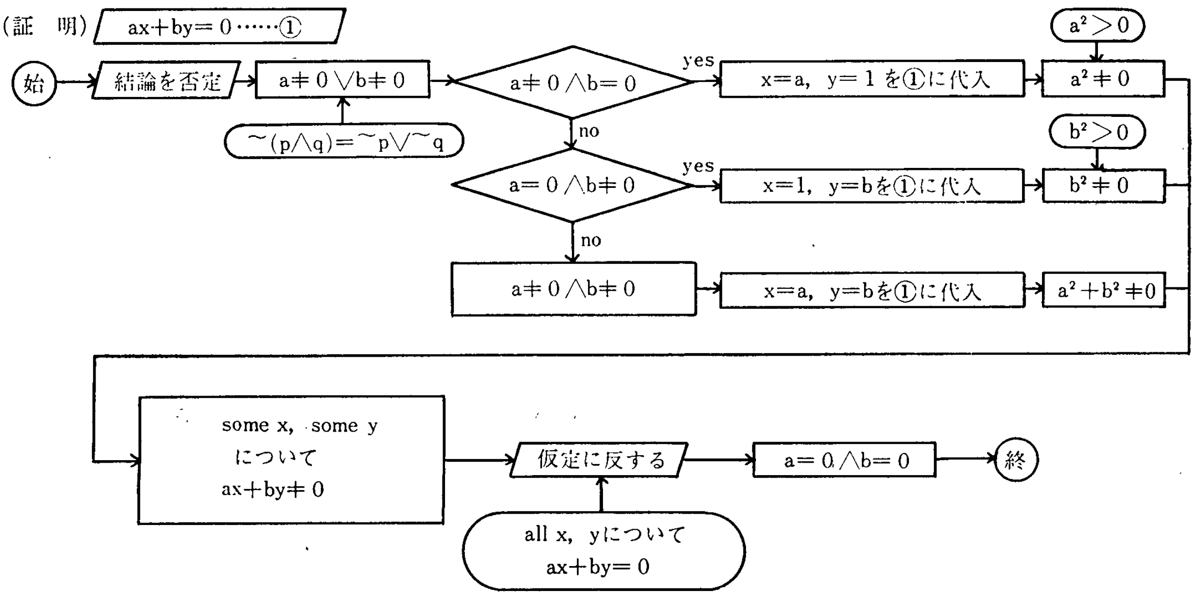
（yesは正直者　noはうそつき）

答　B、D

（例 6） all x, yについて　ax＋by＝0 → a＝0，b＝0

を背理法を用いて証明せよ。（a，bは実数とする）

（証　明）



(例 7) 位数が4位の群は循環群かまたはKlein群である

下図は循環群及びKlein群の群表で単位元はℓである

循　環　群

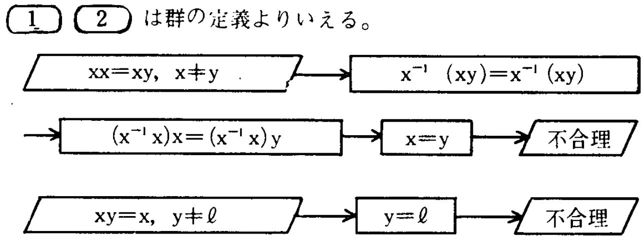
	ℓ	p	q	r
ℓ	ℓ	p	q	r
p	p	r	ℓ	q
q	q	ℓ	r	p
r	r	q	p	ℓ

(図　1)

Klein群

	ℓ	p	q	r
ℓ	ℓ	p	q	r
p	p	ℓ	r	q
q	q	r	ℓ	p
r	r	q	p	ℓ

(図　2)



	ℓ	p	q	r
ℓ	ℓ	p	q	r
p	p	①	②	③
q	q	④	⑤	⑥
r	r	⑦	⑧	⑨

(図　3)

	ℓ	p	q	r
ℓ	ℓ	p	q	r
p	p	ℓ	r	q
q	q	r	p	ℓ
r	r	q	ℓ	p

→

	ℓ	r	q	p
ℓ	ℓ	r	q	p
r	r	p	ℓ	q
q	q	ℓ	p	r
p	p	q	r	ℓ

(図　4)

	ℓ	p	q	r
ℓ	ℓ	p	q	r
p	p	q	r	ℓ
q	q	r	ℓ	p
r	r	ℓ	p	q

→

	ℓ	p	r	q
ℓ	ℓ	p	r	q
p	p	q	ℓ	r
r	r	ℓ	q	p
q	q	r	p	ℓ

(図　5)

(証　明)