

学位論文

ヘビークォークスピン対称性に基づく
エキゾチックハドロンのスピン多重項構造の研究

名古屋大学大学院理学研究科

素粒子宇宙物理学専攻

清水 勇希

目次

第 1 章	イントロダクション	4
第 2 章	ヘビーハドロン有効理論	7
2.1	ヘビークォーク有効理論 (HQET)	7
2.2	ヘビーマeson有効理論	9
2.3	ヘビーバリオン有効理論	12
第 3 章	ペンタクォークの HQS 多重項構造	14
3.1	ハドロンとエキゾチックハドロン	14
3.2	ライトクラウドスピン基底	17
3.3	$\bar{P}^{(*)}\Sigma_Q^{(*)}$ 分子状態の HQS 多重項構造 : S 波の場合	18
3.4	$\bar{P}^{(*)}\Sigma_Q^{(*)}$ 分子状態の HQS 多重項構造 : P 波の場合	29
3.5	まとめ	44
第 4 章	テトラクォークの HQS 多重項構造	46
4.1	HQS 多重項構造	46
4.2	基底変換とポテンシャル	50
4.3	議論とまとめ	61
第 5 章	まとめ	67
付録 A	HM 基底と LCS 基底とのユニタリ変換行列	71
A.1	ヘビーマeson-ヘビーバリオン分子状態における基底変換	71
付録 B	π 中間子交換相互作用のスピン-スピン演算子とテンソル演算子の計算	73
B.1	角運動量演算子	73
B.2	角運動量遷移演算子	75
B.3	OPEP に現れるスピン-スピン演算子、テンソル演算子についての公式	75
B.4	角運動量関連の公式等	81
付録 C	ガウス展開法	83
C.1	概観	83
C.2	Rayleigh-Ritz の変分原理	83
C.3	ガウシアン展開	84
C.4	ガンマ関数	85

C.5	一般化行列固有値問題	86
参考文献		91

第1章

イントロダクション

この世界の物質は原子からできており、さらに原子は電子と原子核からできている。原子核はその種類に応じて複数個の陽子や中性子が束縛して形成される。これら陽子や中性子は3個のクォークの束縛状態であると考えられており、また、陽子と中性子の間の引力の源の一つである π 中間子はクォーク1個とその反粒子である反クォーク1個束縛状態であると考えられている。このように、3個のクォークからなる粒子を「バリオン」、1個のクォークと1個の反クォークからなる粒子を「メソン」と呼んでおり、さらにそれらを総称して「ハドロン」と呼ぶ。以降ではクォークの数とはクォークと反クォークのそれぞれの数を合計したものとする。クォーク間の相互作用は量子色力学 (Quantum Chromodynamics, QCD) によって記述される。しかし QCD は低エネルギー領域において非摂動的に振る舞うため、クォークからハドロンへの形成過程を厳密に計算することはとてつもなく困難である。

ハドロンを記述するモデルの一つにクォークモデル [1,2] がある。標準模型ではアップ (u)、ダウン (d)、ストレンジ (s)、チャーム (c)、ボトム (b)、トップ (t) の6種類のフレーバーのクォークがある。前述したようにバリオンを3クォーク状態、メソンを2クォーク状態として記述するのがクォークモデルであり、このモデルは大きな成功を収めていた。しかし、従来のクォークモデルの予言から外れたハドロンが、特にチャームクォークなどの重いクォークを含む場合に複数見つかっている。クォークモデルの枠組みから外れたハドロンは「エキゾチックハドロン」と呼ばれており、実験、理論の両面から盛んに研究が進められている。重いクォークを含むエキゾチックハドロンが注目されるようになった大きなきっかけの一つが2003年の Belle 実験における $X(3872)$ の発見 [3] である。 $X(3872)$ はチャーモニウムと同様の量子数を持つが、クォークモデルが予言する質量 [4,5] とは異なっている。他にアイソスピンを破る崩壊チャネルを持つなどの性質を持ち、 $X(3872)$ は通常のチャーモニウムだけではなく4クォーク成分を持つハドロンだと考えられている。

現在では $X(3872)$ 以外にも多くのエキゾチックハドロンの候補が見つかっており、その多くが重いクォーク2個と軽いクォーク2個からなる4クォーク状態と示唆されているテトラクォーク X, Y, Z である。2015年には LHCb 実験にて重いクォーク2個と軽いクォーク3個からなる5クォーク状態と考えられているペンタクォーク P_c [6-8] も発見された。その後2019年に新たな実験結果 [9] が公開され、これまでに3種類の P_c ペンタクォークの存在が知られている。4クォーク状態、5クォーク状態といった多クォーク状態が存在する可能性については1964年の時点で Gell-Mann [1] が触れているが、2000年代になり複数のエキゾチックハドロンが実際に見つかったことで、ハドロン形成過程やハドロン間相互作用などにアプローチする新たな視点の

一つとして注目されている。これまでのエキゾチックハドロンの研究の進展については複数のレビュー論文 [5, 10–15] でまとめられている。

X, Y, Z テトラクォークや P_c ペンタクォークの多くはチャームクォークと反チャームクォーク、またはボトムクォークと反ボトムクォークを組成に持っている。チャーム、ボトムクォークの質量は QCD の典型的なエネルギースケールより大きいため、ヘビークォークと呼ばれている。一方でアップ、ダウン、ストレンジクォークは質量が小さいためライトクォークと呼ばれる。ヘビークォークを扱う上で有用となるのがヘビークォーク有効理論 (Heavy Quark Effective Theory, HQET) である。HQET において重要となるのがヘビークォークが持つ対称性の 1 つのヘビークォークスピン対称性 (Heavy Quark Spin Symmetry, HQSS) である。ヘビークォークを含むハドロンの有効理論ではこの HQSS が尊重されており、ヘビークォークスピン多重項 (Heavy Quark Spin 多重項, HQS 多重項) という特徴的な構造が現れる。ヘビークォークの質量が無限大の極限 (ヘビー極限) では異なるスピンを持つヘビーハドロンの質量が縮退する多重項構造である。特にヘビークォークを 1 個のみ含むヘビーマesonやヘビーバリオンでは 2 種類のハドロンの縮退の傾向を見せる HQS 二重項の構造があることが実験的、理論的に知られている。

ところが、 X, Y, Z , テトラクォークや P_c ペンタクォークはヘビークォークと反ヘビークォークを合わせて 2 個のヘビークォークを持つハドロンのようなマルチヘビーハドロンに対する HQS 多重項についてはこれまで系統的に調べられてはいない。すでに複数のエキゾチックハドロンの候補が実験的に観測されており、今後もさらに発見されると予想されているため、対称性に基づく粒子の分類を行うことは非常に重要だと考えられる。

私は 2 個のヘビークォークを含むハドロンの HQS 多重項について研究を行った [16, 17]。 P_c ペンタクォークは 2015 年に LHCb 実験で発見されたペンタクォークの候補である。 $c\bar{c}uud$ のクォーク組成を持つと考えられているためヒドゥンチャームペンタクォークとも呼ばれる。LHCb での発見以前からヒドゥンチャームペンタクォークの理論的な研究はいくつか行われていた [18–21]。LHCb 実験後は多くの理論的解析が行われ、複数のモデルが提唱された。この論文では、2 つのハドロン間で引力が働き、緩い束縛状態が形成されるというハドロン分子模型を用いる。 P_c ペンタクォークの質量は反チャームクォーク 1 個とライトクォーク 1 個からなるチャームメソン及びチャームクォーク 1 個とライトクォーク 2 個からなるチャームバリオンの 2 体の閾値よりわずかに小さいため、これらの束縛状態として P_c を記述できると考えるのが妥当である。

前述の通り、ヘビークォークを 1 個のみ含むハドロンの HQS 二重項構造はよく知られている。またハドロン分子状態に対する HQS 多重項構造については、チャームメソンと核子が束縛した分子状態が HQS 二重項構造を持つことが議論されている [22]。この論文ではヘビーマesonとヘビーバリオンからなる分子状態に注目し、ヘビークォークを 2 個含むエキゾチックハドロンの HQS 多重項を解析する。HQSS はヘビークォークが 1 個だけの系において、ヘビークォーク極限で QCD が持つ対称性であり、有限の質量でも近似的に存在する対称性だと広く知られている。一方で複数のヘビークォークが含まれる系でそれらのスピンの良い対称性であるかは自明ではない。本研究では 2 個のヘビークォークを含むハドロンに対して HQSS を適用するためにライトクラウドスピン (Light-cloud spin, LCS) 基底を定義し、HQS 多重項について議論する。次にパイ中間子交換ポテンシャルを構築し、どの多重項に対して引力が働くかを調べ、可能な束縛状態の縮退構造を明らかにする。LCS 基底ではヘビークォーク極限でポテンシャルが自動的に (ブロック) 対角化され、HQS 多重項ごとに分かれる。つまりその系の固有状態は HQS 多重項で記述されることが明確となる。またヘビークォークのスピンが保存することから、2 個のヘビークォークの合成ス

ピンが0か1かで崩壊チャンネルが異なることが分かる。これらの性質はヘビークォーク極限において存在するものだが、有限質量のヘビークォークでも近似的に HQSS が成立するのならヘビークォークを2個含むエキゾチックハドロンもこのような性質を持ちうる。

本論文は以下のように構成されている。第2章でヘビークォーク有効理論や、ヘビークォークを1個含むハドロンの有効理論を説明する。第3章ではヘビメソンとヘビーバリオンの分子状態としてのペンタクォークについて、HQS 多重項構造を解析する。第4章ではヘビメソン2体の分子状態としてのテトラクォークについて、HQS 多重項構造を解析する。そして第5章は本論文のまとめである。

第 2 章

ヘビーハドロン有効理論

この章ではヘビーマeson及びヘビーバリオンの有効ラグランジアンについて説明する。ここで、ヘビーマesonとはヘビークォークを 1 個含むメソンを指し、ヘビーバリオンとはヘビークォークを 1 個含むバリオンを指す。またヘビーマesonとヘビーバリオンを総称してヘビーハドロンと呼ぶ。チャームクォークは約 1.3GeV、ボトムクォークは約 4.2GeV の質量を持ち、QCD の典型的なエネルギースケール (Λ_{QCD}) よりもはるかに大きいためヘビークォークと呼ばれている。

ヘビークォークを記述する有効理論としてヘビークォーク有効理論 (Heavy Quark Effective Theory, HQET) がある。HQET からヘビークォークスピン対称性 (Heavy Quark Spin Symmetry, HQSS) が導かれ、ヘビーハドロン有効理論を記述する上で非常に重要な役割を果たす。

まずは HQET と HQSS について簡単に解説したあと、これらを用いて記述されるヘビーマeson有効理論、ヘビーバリオン有効理論について解説する。

2.1 ヘビークォーク有効理論 (HQET)

まず初めに HQET [23–25] について簡単に解説する。HQET は粒子の運動量がヘビークォークの質量よりも充分小さい範囲で有効となる。このとき運動量はおおよそ $P_{\text{heavy}} \simeq m_Q v$ と書ける。ここで m_Q はヘビークォーク質量、 v はヘビークォークの速度である。この範囲において粒子の四元速度の変化量は微小量である。特に質量無限大の極限を考えると

$$\Delta v = \frac{\Delta P}{m_Q} \rightarrow 0, \quad (2.1.1)$$

となる。そのため強い相互作用による運動量移行を無視することができ、ヘビークォークを含むハドロンは四元速度 v によってラベルすることができる。

質量 m_Q 、運動量 Q をもつクォークのプロパゲータは

$$\frac{i}{\not{Q} - m_Q + i\epsilon}, \quad (2.1.2)$$

と書ける。クォークの四元速度 v^μ と residual momentum k を用いて運動量 Q^μ を $Q^\mu = m_Q v^\mu + k^\mu$ と分ける。ここで v^μ は $v^2 = 1$ を満たす。クォーク質量が充分重い時、クォークの

プロパゲータは

$$\begin{aligned} \frac{i}{\not{Q} - m_Q} &= \frac{i}{m_Q \not{\psi} + \not{k} - m_Q} \\ &= \frac{i(m_Q \not{\psi} + \not{k} + m_Q)}{(m_Q \not{\psi} + \not{k})^2 - m_Q^2} \\ &\rightarrow \frac{1 + \not{\psi}}{2} \frac{i}{v \cdot k + i\epsilon} \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

と変形される。HQET において プロパゲータ の表記は (2.1.3) を用いる。

速度 v^μ を持つクォーク場は $\psi = v^\mu \gamma_\mu$ を用いて 2つの部分に分けられる。

$$\begin{aligned} \psi &= e^{-im_Q v \cdot x} \left[e^{im_Q v \cdot x} \frac{1 + \not{\psi}}{2} \psi + e^{im_Q v \cdot x} \frac{1 - \not{\psi}}{2} \psi \right] \\ &\equiv e^{-im_Q v \cdot x} [\psi_v + \Psi_v]. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

ここでクォークの large component と small component をそれぞれ

$$\psi_v \equiv e^{im_Q v \cdot x} \frac{1 + \not{\psi}}{2} \psi, \quad (2.1.5)$$

$$\Psi_v \equiv e^{im_Q v \cdot x} \frac{1 - \not{\psi}}{2} \psi, \quad (2.1.6)$$

と定義した。特にクォークの静止系 $v^\mu = (1, \vec{0})$ では $\psi \rightarrow \gamma^0$ となり、 $P_+ = \frac{1 + \not{v}}{2}$ はクォークの正エネルギー部分、 $P_- = \frac{1 - \not{v}}{2}$ はクォークの負エネルギー部分への射影を表す演算子である。これらの射影演算子は

$$P_\pm^2 = P_\pm, \quad P_\pm P_\mp = 0, \quad (2.1.7)$$

を満たす。また ψ_v と Ψ_v は

$$\not{\psi} \psi_v = +\psi_v, \quad \not{\psi} \Psi_v = -\Psi_v, \quad (2.1.8)$$

と変換される。

式 (2.1.4) を用いて QCD ラグランジアンを書き直す。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi} (i\not{D} - m) \psi \\ &= (\bar{\psi}_v + \bar{\Psi}_v) e^{im_Q v \cdot x} (i\not{D} - m) e^{-im_Q v \cdot x} (\psi_v + \Psi_v) \\ &= (\bar{\psi}_v + \bar{\Psi}_v) i\not{D} (\psi_v + \Psi_v) - (\bar{\psi}_v + \bar{\Psi}_v) m (1 - \not{\psi}) (\psi_v + \Psi_v). \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

ヘビークォークのプロパゲータ (2.1.2) は質量無限大極限でクォークの large component のみを持つのでラグランジアンの leading order は式 (2.1.9) の small component を落として

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}_v i\not{D} \psi_v - m \bar{\psi}_v (1 - \not{\psi}) \psi_v \\ &= \bar{\psi}_v \frac{1 + \not{\psi}}{2} i\not{D} \frac{1 + \not{\psi}}{2} \psi_v - m \bar{\psi}_v \frac{1 + \not{\psi}}{2} (1 - \not{\psi}) \frac{1 + \not{\psi}}{2} \psi_v \\ &= \bar{\psi}_v \frac{i}{2} (\not{D} + 2v \cdot D - \not{D} \not{\psi}) \frac{1 + \not{\psi}}{2} \psi_v \\ &= \bar{\psi}_v i v \cdot D \psi_v. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

となる。途中で次の関係式を使った。

$$\psi_v = \frac{1 + \not{v}}{2} \psi, \quad (2.1.11)$$

$$\not{v} \not{D} = 2v \cdot D - \not{D} \not{v}. \quad (2.1.12)$$

ここから得られるプロパゲータは

$$\frac{i}{v \cdot k + i\epsilon}, \quad (2.1.13)$$

であり、関係式 (2.1.11) を併せて式 (2.1.2) に一致する。

有効ラグランジアン (2.1.10) には γ 行列が含まれていない。これはヘビークォークとグルーオンの相互作用においてヘビークォークはそのスピンを変えないことを表しており、グローバルな $SU(2)_S$ スピン対称性が存在する。これはヘビークォークスピン対称性と呼ばれており、次節以降で紹介するヘビーハドロン有効理論の構築において重要な役割を持っている。

2.2 ヘビーマソン有効理論

HQSS を取り入れたヘビーマソンの有効理論について紹介する。ここでヘビーマソンとは 1 個のヘビークォーク Q と 1 個の反ライトクォーク \bar{q} から構成され、形式的に

$$Q_h \bar{q}_l^a, \quad (2.2.1)$$

と書ける。ここで h と l はそれぞれヘビークォークとライトクォークのスピンを、 a はライトクォークのフレーバーを表す添字である。軌道角運動量は $L = 0$ としてスピンに注目すると

$$\frac{1}{2_h} \otimes \frac{1}{2_l} = 0 \oplus 1, \quad (2.2.2)$$

となっているので $J^P = 0^-$ のメソンと $J^P = 1^-$ のメソンが存在する。

HQSS の効果によりヘビークォーク極限ではこの 2 つのメソンの質量は縮退することが知られている。ハドロンの全角運動量を \vec{J} 、ヘビークォークのスピンを \vec{S} 、そしてライトクラウドスピンを \vec{j} とすると、

$$\vec{J} = \vec{S} + \vec{j}, \quad (2.2.3)$$

となる。ここでライトクラウドスピンとはハドロン内の角運動量のうちヘビークォーク以外のすべての成分による角運動量 (ライトクォークスピンや軌道角運動量) を指す。ここでは全角運動量 \vec{J} は保存量であるとする。またヘビークォーク極限ではヘビークォークスピンがフリップしないので \vec{S} も保存量である。すると \vec{j} も保存量となる。つまりヘビーハドロンにおいてはヘビークォークスピンとライトクラウドスピンがそれぞれ独立した保存量になることが分かる。さらにヘビークォーク極限では有効ラグランジアンにヘビークォークのスピンに依存した項が存在しないので、ヘビークォークスピンの向きの違いによるエネルギー差が生じない。ヘビークォーク 1 個のスピンは $1/2$ なので有限のライトクラウドスピン j に対し

$$J_{\pm} = j \pm \frac{1}{2}, \quad (2.2.4)$$

という 2 つのスピン状態は縮退している。このように縮退した 2 種類のスピン状態のことを HQS 二重項と呼ぶ。

現実世界のチャームクォークやボトムクォークの質量は有限のため HQSS は顕に破れており、メソン間の質量差が生まれている。例えばチャームメソン $D(0^-)$ と $D^*(1^-)$ の間の質量差は約 140MeV ある。しかしながらこの差は $\mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}}/m_Q)$ によって抑制されている。実際、ボトムメソン $\bar{B}(0^-)$ と $\bar{B}^*(1^-)$ の場合は対称性がより良く働いたため質量差は約 45MeV とさらに小さくなる。したがって HQSS は現実の有限質量クォークでも近似的に成立していると考えて有効理論を構築する。

ベクターメソンと擬スカラーメソンの縮退を扱う上で便利な表記として次の複合場 H_a を導入する。

$$H_a \equiv \frac{1+\psi}{2} [P_a^* + i\gamma_5 P_a], \quad (2.2.5)$$

$$\bar{H}_a = \gamma_0 H_a^\dagger \gamma_0 = [P_{a\mu}^* \gamma^\mu + i\gamma_5 P_a^\dagger] \frac{1+\psi}{2} \quad (2.2.6)$$

$P_a^{*\mu}, P_a$ はそれぞれベクターメソンと擬スカラーメソンの場を表す。 a はライトクォークのフレーバー (u, d, s) を表す添字である。 $(1+\psi)/2$ は前節の通りヘビークォークの正エネルギー部分を取り出す射影演算子である。 H 場はヘビークォークのスピンの変換 $Q \rightarrow S_Q Q$ 及び反ライトクォークのカイラル変換 $\bar{q} \rightarrow \bar{q} h^\dagger$ に対して

$$H \rightarrow S_Q H h^\dagger, \quad (2.2.7)$$

と変換する。ヘビメソンの有効ラグランジアンはこれら2つの変換に対して不変になるように構築すれば良い。また H 場は $\psi H = +H, H\psi = -H$ という拘束条件を持っている。

ヘビメソンと π 中間子の相互作用項について、 π 中間子の微分の最低次までで考える。非線形表現における π 中間子場は

$$\xi = \exp\left(i \frac{\hat{\pi}}{\sqrt{2}f_\pi}\right), \quad (2.2.8)$$

$$\hat{\pi} = \begin{pmatrix} \pi^0/\sqrt{2} & \pi^+ \\ \pi^- & -\pi^-/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (2.2.9)$$

で定義される。また $f_\pi \simeq 92.4$ MeV は π 中間子の崩壊定数である。ベクトルカレント、および軸性ベクトルカレントはそれぞれ

$$V^\mu = \frac{i}{2} (\xi^\dagger \partial^\mu \xi + \xi \partial^\mu \xi^\dagger), \quad (2.2.10)$$

$$A^\mu = \frac{i}{2} (\xi^\dagger \partial^\mu \xi - \xi \partial^\mu \xi^\dagger), \quad (2.2.11)$$

と与えられ、これらの変換則は

$$V^\mu \rightarrow h V^\mu h^\dagger + i h \partial^\mu h^\dagger, \quad (2.2.12)$$

$$A^\mu \rightarrow h A^\mu h^\dagger, \quad (2.2.13)$$

である。以上より最低次の有効ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{HH\pi} = \text{Tr} [H_b (i v \cdot D)_{ba} \bar{H}_a] + g \text{Tr} [\bar{H}_a H_b \gamma_\mu \gamma_5 A_{ba}^\mu] + \mathcal{O}(1/M), \quad (2.2.14)$$

となる。ここで共変微分は $D^\mu H = \partial^\mu H - iV^\mu H$ である。 M はヘビーマソンの質量を表す。運動項の展開は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\text{Tr} [H_b(i\nu \cdot D)_{ba} \bar{H}_a] &= \text{Tr} \left[(\bar{P}_{a\mu}^* \gamma^\mu + i\gamma_5 \bar{P}_a) \frac{1+\psi}{2} \frac{1+\psi}{2} (P_{b\nu}^* \gamma^\nu + i\gamma_5 P_b) (i\nu \cdot D)_{ba} \right] \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\bar{P}_{a\mu}^* P_{b\nu}^* \gamma^\mu \gamma^\nu (i\nu \cdot D)_{ba} + \bar{P}_{a\mu}^* v_\nu P_{b\rho}^* \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho (i\nu \cdot D)_{ba} \right. \\
&\quad + i\bar{P}_{a\mu}^* P_b \gamma^\mu \gamma_5 (i\nu \cdot D)_{ba} + i\bar{P}_{a\mu}^* v_\nu P_b \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5 (i\nu \cdot D)_{ba} \\
&\quad + i\bar{P}_a P_{b\mu}^* \gamma_5 \gamma^\mu (i\nu \cdot D)_{ba} + i\bar{P}_a v_\mu P_{b\nu}^* \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu (i\nu \cdot D)_{ba} \\
&\quad \left. - \bar{P}_a P_b (i\nu \cdot D)_{ba} + \bar{P}_a v_\mu P_b \gamma^\mu (i\nu \cdot D)_{ba} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[4g^{\mu\nu} P_{b\nu}^* (i\nu \cdot D)_{ba} \bar{P}_{a\mu}^* + 0 + 0 + 0 \right. \\
&\quad \left. + 0 + 0 - 4P_b (i\nu \cdot D)_{ba} \bar{P}_a - 0 \right] \\
&= 2P_{b\mu}^* (i\nu \cdot D)_{ba} \bar{P}_a^{\mu} - 2P_b (i\nu \cdot D)_{ba} \bar{P}_a . \tag{2.2.15}
\end{aligned}$$

現実のヘビーハドロンの質量は有限なので定量的な解析の際に最低次だけでなく高次項まで取り入れる場合があり、reparametrization invariance を用いた $\mathcal{O}(1/M)$ の導入が知られている [26–28]。

式 (2.2.14) 第一項のベクトルカレントからは偶数個の NG ボソンとヘビーマソンの相互作用が、第二項の軸性カレントからは奇数個の NG ボソンとヘビーマソンの相互作用が得られる。1 個のパイ中間子との相互作用は A^μ について展開することで得られ、 g がその結合定数である。 A^μ の展開の一次は

$$\begin{aligned}
A^\mu &= \frac{i}{2} (\xi^\dagger \partial^\mu \xi - \xi \partial^\mu \xi^\dagger) \\
&\sim \frac{i}{2} \left[\left(1 - i \frac{\hat{\pi}}{\sqrt{2}f_\pi} \right) \partial^\mu \left(1 + i \frac{\hat{\pi}}{\sqrt{2}f_\pi} \right) - \left(1 + i \frac{\hat{\pi}}{\sqrt{2}f_\pi} \right) \partial^\mu \left(1 - i \frac{\hat{\pi}}{\sqrt{2}f_\pi} \right) \right] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}f_\pi} \partial^\mu \hat{\pi} . \tag{2.2.16}
\end{aligned}$$

である。式 (2.2.14) の第二項を展開する。

$$\begin{aligned}
&\text{Tr} \left[\bar{H}_a H_b \gamma_\mu \gamma_5 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}f_\pi} \partial^\mu \hat{\pi} \right) \right] \\
&= \text{Tr} \left[(\bar{P}_{a\mu}^* \gamma^\mu + i\gamma_5 \bar{P}_a) \frac{1+\psi}{2} \frac{1+\psi}{2} (P_{b\nu}^* \gamma^\nu + i\gamma_5 P_b) \gamma^\rho \gamma_5 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}f_\pi} \partial_\rho \hat{\pi}_{ba} \right) \right] \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}f_\pi} \text{Tr} \left[\bar{P}_{a\mu}^* \gamma^\mu P_{b\nu}^* \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_5 \partial_\rho \hat{\pi}_{ba} + \bar{P}_{a\mu}^* \gamma^\mu \psi P_{b\nu}^* \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_5 \partial_\rho \hat{\pi}_{ba} \right. \\
&\quad + \bar{P}_{a\mu}^* \gamma^\mu i\gamma_5 P_b \gamma^\rho \gamma_5 \partial_\rho \hat{\pi}_{ba} + \bar{P}_{a\mu}^* \gamma^\mu \psi i\gamma_5 P_b \gamma^\rho \gamma_5 \partial_\rho \hat{\pi}_{ba} \\
&\quad + i\gamma_5 \bar{P}_a P_{b\nu}^* \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_5 \partial_\rho \hat{\pi}_{ba} + i\gamma_5 \bar{P}_a \psi P_{b\nu}^* \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_5 \partial_\rho \hat{\pi}_{ba} \\
&\quad \left. - \gamma_5 \bar{P}_a \gamma_5 P_b \gamma^\rho \gamma_5 \partial_\rho \hat{\pi}_{ba} - \gamma_5 \bar{P}_a \psi \gamma_5 P_b \gamma^\rho \gamma_5 \partial_\rho \hat{\pi}_{ba} \right] \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}f_\pi} \text{Tr} \left[\bar{P}_{a\mu}^* P_{b\nu}^* \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_5 \partial_\rho \hat{\pi}_{ba} + \bar{P}_{a\mu}^* v_\nu P_{b\rho}^* \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_5 \partial_\sigma \hat{\pi}_{ba} \right. \\
&\quad - i\bar{P}_{a\mu}^* P_b \gamma^\mu \gamma^\rho \partial_\rho \hat{\pi}_{ba} - i\bar{P}_{a\mu}^* v_\nu P_b \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \partial_\rho \hat{\pi}_{ba} \\
&\quad + i\bar{P}_a P_{b\nu}^* \gamma^\nu \gamma^\rho \partial_\rho \hat{\pi}_{ba} - i\bar{P}_a v_\mu P_{b\nu}^* \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \partial_\rho \hat{\pi}_{ba} \\
&\quad \left. - \bar{P}_a P_b \gamma^\rho \gamma_5 \partial_\rho \hat{\pi}_{ba} + \bar{P}_a v_\mu P_b \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_5 \partial_\rho \hat{\pi}_{ba} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}f_\pi} \left[0 - 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{P}_{a\mu} v_\nu P_{b\rho}^* \partial_\sigma \hat{\pi}_{ba} - 4ig^{\mu\rho} \bar{P}_{a\mu} P_b \partial_\rho \hat{\pi}_{ba} - 0 \right. \\
&\quad \left. + 4ig^{\mu\rho} \bar{P}_a P_{b\mu}^* \partial_\rho \hat{\pi}_{ba} - 0 + 0 + 0 \right] \\
&= \frac{\sqrt{2}i}{f_\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{P}_{a\mu} P_{b\nu}^* \partial_\rho \hat{\pi}_{ba} v_\sigma + \frac{\sqrt{2}i}{f_\pi} \bar{P}_{a\mu} P_b \partial^\mu \hat{\pi}_{ba} - \frac{\sqrt{2}i}{f_\pi} \bar{P}_a P_{b\mu}^* \partial^\mu \hat{\pi}_{ba} . \tag{2.2.17}
\end{aligned}$$

$PP\pi$ バートックスはパリティを破るのでラグランジアンに現れないことが見て取れる。

このようにヘビークォークとライトクォークの両方を含むハドロンの有効模型ではヘビークォークスピン対称性とカイラル対称性を同時に考慮することによりラグランジアンへの大きな制限をつけることができる。

2.3 ヘビーバリオンの有効理論

前節ではヘビークォークスピン対称性とカイラル対称性を用いてヘビーマソン ($\sim Q\bar{q}$) 有効理論を構築した。同様の方法でヘビーバリオン ($\sim Qqq$) と π 中間子の有効相互作用を構築できる [29, 30]。

S 波のヘビーバリオンについて考える。ライトクォークを2個含むため内部のライトクラウドスピンは $j = 0, 1$ の2通りがある。そのため実現しうるハドロンスピンとしては

$$\frac{1}{2}_h \otimes 0_l = \frac{1}{2}, \tag{2.3.1}$$

$$\frac{1}{2}_h \otimes 1_l = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}, \tag{2.3.2}$$

となり、スピンパートナーが存在しない HQS 一重項とパートナーが存在する二重項の二種類がある。フレーバー空間で見ると各ライトクォークはフレーバー SU(3) の三重項に属するのでライトダイクォークには

$$3 \otimes 3 = \bar{3} \oplus 6 \tag{2.3.3}$$

という2種類のフレーバー多重項がある。フレーバー反対称の場合ライトダイクォークのスピンは0であり、フレーバー対称の場合スピンは1である。

$j = 0$ の場合、ヘビーバリオンの有効場はヘビークォーク Q_v とスピン0のライトダイクォーク場 S^{ab} を用いて

$$\psi_v^{ab} = S^{ab} Q_v, \tag{2.3.4}$$

と書ける。ここで a, b はライトクォークのフレーバーの添字である。これは式 (2.1.5) より $\psi\psi_v = \psi_v$ を満たす。 ψ_v はライトクォーク部分 qq についての SU(3) フレーバー反三重項に相当し $B_{\bar{3}}$ と書かれる。チャームバリオンの場合、

$$B_{\bar{3}} = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_c^+ & \Xi_c^+ \\ -\Lambda_c^+ & 0 & \Xi_c^0 \\ -\Xi_c^+ & -\Xi_c^0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3.5}$$

と定義される。

$j = 1$ の場合の有効場は、スピン1のベクトル場を A^μ とすると

$$\psi_v^{\mu, ab} = A^{\mu, ab} Q_v, \tag{2.3.6}$$

と書ける。スピン 1 のライトクォークスピンとスピン 1/2 のヘビークォークスピンとの組み合わせなので全スピンとして 1/2 と 3/2 の両方を含む複合場である。スピン 3/2 の Rarita-Schwinger 場は以下の拘束条件を持つ。

$$\gamma_\mu \psi_{\text{RS}}^\mu = 0, \quad (2.3.7)$$

$$\partial_\mu \psi_{\text{RS}}^\mu = 0. \quad (2.3.8)$$

これと同等の拘束条件をヘビーバリオン場 ψ_v^μ のうちのスピン 3/2 成分 $\psi_{v,3/2}^\mu$ も持つと考えると

$$\gamma_\mu \psi_{v,3/2}^\mu = 0, \quad (2.3.9)$$

$$v_\mu \psi_{v,3/2}^\mu = 0, \quad (2.3.10)$$

となる。これらの拘束条件、及び $\psi \psi_{v,3/2}^\mu = \psi_{v,3/2}^\mu$ を満たすように $\psi_{v,3/2}^\mu$ を定義すると次のようになる。

$$\psi_{v,3/2}^\mu = \left(g_\nu^\mu - \frac{1}{3} (\gamma^\mu + v^\mu) \gamma_\nu \right) \psi_v^\nu. \quad (2.3.11)$$

スピン 1/2 成分 $\psi_{v,1/2}$ は $\psi_{v,3/2}^\mu$ と直交し、かつ $\psi \psi_{v,1/2} = \psi_{v,1/2}$ を満たすように

$$\psi_{v,1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_5 \gamma_\nu \psi_v^\nu, \quad (2.3.12)$$

と定義する。結局、 ψ_v^μ をスピン 3/2 成分とスピン 1/2 成分に分離すると

$$\psi_v^\mu = \psi_{v,3/2}^\mu + \frac{1}{\sqrt{3}} (\gamma^\mu + v^\mu) \gamma_5 \psi_{v,1/2}, \quad (2.3.13)$$

と書ける。複合場 ψ_v^μ はしばしば super field と呼ばれ、 S^μ と書かれる。また $\psi_{v,3/2}^\mu$ と $\psi_{v,1/2}$ はフレーバー六重項に相当しそれぞれ $B_6^{*\mu}$, B_6 と書かれる。

$$S^\mu = B_6^{*\mu} + \frac{1}{\sqrt{3}} (\gamma^\mu + v^\mu) \gamma_5 B_6. \quad (2.3.14)$$

B_6 はチャームバリオンの場合、

$$B_6 = \begin{pmatrix} \Sigma_c^{++} & \frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma_c^+ & \frac{1}{\sqrt{2}} \Xi_c^{\prime+} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma_c^+ & \Sigma_c^0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \Xi_c^{\prime0} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \Xi_c^{\prime+} & \frac{1}{\sqrt{2}} \Xi_c^{\prime0} & \Omega_c^0 \end{pmatrix}, \quad (2.3.15)$$

と定義できる。 $B_6^{*\mu}$ は B_6 をスピン 3/2 のバリオンに置き換えた行列で表される。

B_3, S^μ はカイラル変換 h 及びヘビークォークスピン変換 S_Q のもとで

$$B_3 \rightarrow S_Q h B_3 h^T, \quad (2.3.16)$$

$$S^\mu \rightarrow S_Q h S^\mu h^T, \quad (2.3.17)$$

と変換する。軸性ベクトルカレント A_μ を導入するとヘビーバリオンと π 中間子の相互作用を表す最低次のラグランジアンは次のように書ける。

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{3}{2} i g_1 v_\sigma \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr} [\bar{S}_\mu A_\nu S_\rho] + g_4 (\text{Tr} [\bar{S}^\mu A_\mu B_3 + H.c.]) . \quad (2.3.18)$$

g_1, g_4 は結合定数である。トレースはフレーバー空間に対して取っている。また $B_3 B_3 \pi$ 相互作用はアイソスピンの保存を破るため禁止されている。

第3章

ペンタクォークの HQS 多重項構造

第2章ではヘビメソンとヘビバリオンの有効理論について説明した。ヘビハドロンに対してはヘビクォークスピン対称性 (HQSS) が重要な役割を持っており、HQS 多重項構造が形成されることを示した。例えばヘビクォークを1個のみ含むハドロンでは HQS 一重項または二重項のみが存在し、この構造は実験的にも理論的にも確かめられている。

一方、 P_c ペンタクォークや X, Y, Z テトラクォークといったエキゾチックハドロンは2個のヘビクォークを持っていると考えられている。一般にヘビクォークが複数ある系ではヘビクォーク間の相対的な運動が HQSS を破ってしまう。特にヘビクォークコニウムでは軌道角運動量励起を考えると、有効理論の最低次でも対称性が破れている。しかし、近年発見されているペンタクォークやテトラクォークはヘビクォーク・反ヘビクォーク対の他に複数の軽いクォークを含んでいる。我々はこの軽い自由度に着目し、角運動量励起や相対運動は軽い自由度が持つとしてヘビクォーク間の相対運動を禁止する系を仮定する。この系では2つのヘビクォークが同じ速度でラベルされるためヘビクォーク極限で HQSS が存在する。この論文ではヘビメソンとヘビバリオンの分子状態へ HQSS を適用した結果として得られる HQS 多重項構造を調べる。

この章ではまず、エキゾチックハドロンについて簡単に紹介した後、HQSS に基づいたペンタクォークの HQS 多重項構造について解析した結果 [16, 17, 31] を説明する。

3.1 ハドロンとエキゾチックハドロン

素粒子の一種であるクォークは現在判明している中で最も基本的な物質を構成する粒子の一つである。このクォークが複数集まってできる粒子を総じてハドロンと呼ぶ。素粒子の標準理論においてクォークは6種類のフレーバが存在すると考えられている。アップ (u)、ダウン (d)、ストレンジ (s)、チャーム (c)、ボトム (b)、トップ (t) である。通常環境下においてクォークは単独では存在せず、複数のクォークが集まったハドロンとして存在する。しかしクォーク間の相互作用を記述する QCD は低エネルギー領域で非摂動的に振る舞うのでハドロン形成過程を厳密に計算することは難しい。そのためハドロンの性質の理解を通して、素粒子であるクォークの性質やクォークがどのように集まってハドロンを形成するかを解明するというアプローチがある。構成子クォークを用いてハドロンを分類するクォークモデルに基づく通常ハドロンは大きく分けて2種類が存在する。3つのクォークから構成されるバリオンと、2つのクォークから構成されるメソンである。例えば陽子は uud 、中性子は udd で出来ているためバリオンである。また、核子

間の引力の起源の一種であるパイ中間子は $u\bar{d}$, $d\bar{u}$ などからできているメソンである。クォークモデルによるハドロンの解析は大きな成功をおさめ、多くのハドロンは2個、または3個のクォークによって理解されてきた。

しかし、ハドロンが持つクォークは3個以下に限るという理論的な制約はなく、より多彩な組み合わせも研究されてきた。例えば4個のクォークからなるテトラクォーク、5個のクォークからなるペンタクォークである。そのような多クォーク状態はエキゾチックハドロン (異種ハドロン) と呼ばれ、古くはクォークモデルを提唱した Gell-Mann [1] によって存在を指摘されている。また現象論的にも軽いスカラーメソン [32, 33] などで考察されてきた。

近年ではヘビークォークを含むエキゾチックハドロンの存在がハドロン物理学の中でも注目される一つのトピックとなっている。そのきっかけとなったのが2003年に Belle 実験 [3] で発見された $X(3872)$ と呼ばれるハドロンである。アップ、ダウクォークをまとめて q と表記すると、 $X(3872)$ は $c\bar{c}q\bar{q}$ という4つのクォークからなると考えられるテトラクォークの候補である。 $X(3872)$ の特徴の一つとして、その質量がハドロン2体の閾値に近いことが挙げられる。Particle Data Group (PDG) [34] によると $X(3872)$ の質量は $3871.69 \pm 0.17 \text{ MeV}$ である。一方 D^0 中間子と \bar{D}^{*0} 中間子を合わせた閾値は $3871.80 \pm 0.12 \text{ MeV}$ 、 D^\pm 中間子と $D^{*\mp}$ 中間子の閾値は $3879.87 \pm 0.12 \text{ MeV}$ と $X(3872)$ の質量のすぐ上である。そのため素朴には2つのハドロンがゆるく束縛して形成されると考えられ、ハドロン分子状態と呼ばれる。

この他にもチャームクォークと反チャームクォーク、またはボトムクォークと反ボトムクォークを含んだテトラクォークの候補が複数発見され、それらは X, Y, Z_c, Z_b と呼ばれている。これらの実験結果や理論研究の詳細については複数のレビュー論文にまとめられている [5, 10–15]。

X, Y, Z テトラクォークの他に注目されているエキゾチックハドロンとして P_c ペンタクォークがある。これは2015年に LHCb 実験 [6–8] で発見された $c\bar{c}qqq$ という組成を持つ5クォーク状態の候補であり、ヒドンチャームペンタクォーク (hidden-charm pentaquark) と呼ばれている。この実験では $P_c(4380)$ と $P_c(4450)$ という2種類のペンタクォークが報告された。それぞれの質量は $M_{P_c(4380)} = 4380 \pm 8 \pm 28 \text{ MeV}$ 、 $M_{P_c(4450)} = 4449.8 \pm 1.7 \pm 2.5 \text{ MeV}$ である。チャームメソンとチャームバリオンの2体の閾値に近いため、 $X(3872)$ と同じくハドロン分子状態の候補である。 $\bar{D}\Sigma_c^*$ の閾値は 4385.3 MeV 、 $\bar{D}^*\Sigma_c$ の閾値は 4462.2 MeV なので図3.1のようにそれら2体による束縛状態を形成しているのではと考えられる。

LHCb からの報告以前にもヒドンチャームペンタクォークについていくつかの理論的な研究があった [18–21]。LHCb で P_c ペンタクォークが発見されて以降、様々な理論研究が盛んに行われた。有力なモデルであるハドロン分子描像 [35–46] の他、コンパクトペンタクォーク [47–49]、ダイクォーク描像 [50–54]、クォーク-クラスターモデル [55]、バリオチャーモニウムモデル [56]、 \bar{D} -ソリトンモデル [57]、など様々なモデルでの解析が行われている。

2019年には LHCb から P_c ペンタクォークについての新たな実験結果 [9] が報告された。これ

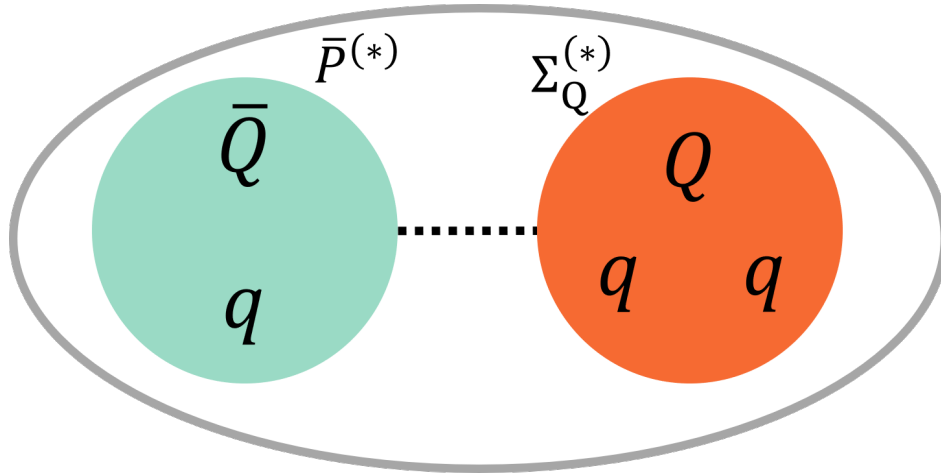


図 3.1 ヘビーメソン \bar{P}, \bar{P}^* とヘビーバリオン Σ_Q, Σ_Q^* の 2 体によるハドロン分子状態

らの質量と崩壊幅は以下の通りである。

$$\begin{aligned}
 P_c(4312) \quad M &= 4311.9 \pm 0.7_{-0.6}^{+6.8} \text{ MeV}, \\
 &\Gamma = 9.8 \pm 2.7_{-4.5}^{+3.7} \text{ MeV}, \\
 P_c(4440) \quad M &= 4440.3 \pm 1.3_{-4.7}^{+4.1} \text{ MeV}, \\
 &\Gamma = 20.6 \pm 4.9_{-10.1}^{+8.7} \text{ MeV}, \\
 P_c(4457) \quad M &= 4457.3 \pm 0.6_{-1.7}^{+4.1} \text{ MeV}, \\
 &\Gamma = 6.4 \pm 2.0_{-1.9}^{+5.7} \text{ MeV}.
 \end{aligned}$$

2015 年に報告された $P_c(4450)$ は 2 つの細いピークに分かれた。一方、 $P_c(4380)$ は新しい実験からは明確なピークは見えていないがその存在は未だ否定されていない。また新たに $P_c(4312)$ が発見され、その質量は $\bar{D}\Sigma_c$ の閾値 4320.7 MeV の近傍である。そのためこれもまたハドロン分子状態の候補とされている。この新たな実験結果を受けて更に多くの理論研究が行われている [31, 58–70]。これまでの P_c ペンタクォークについての研究は複数のレビュー論文 [11, 13–15] にまとめられている。

このように 2000 年代に入って以降重いクォークを含むさまざまなエキゾチックハドロンが発見され、ハドロン物理学の新たなトピックとして注目を集めている。エキゾチックハドロンという多クォーク状態が内部でどのような構造を持っているかは依然として明らかにはなっていないが、発見されたエキゾチックハドロンの中にはヘビーハドロン 2 体の閾値近傍の質量を持っているものがあることから、それらはハドロン 2 体の束縛状態であるハドロン分子描像を用いた研究が盛んに進められている。

一方、テトラクォークやペンタクォークが HQSS の観点からどのような HQS 多重項に分類できるかはほとんど知られていない。分子状態を形成するヘビーメソン $\sim Q\bar{q}$ やヘビーバリオン $\sim Qqq$ のそれぞれには HQS 二重項または一重項が存在することは理論的にも実験的にも分かっており、現実の有限質量クォークでも近似的に HQSS が成り立っていると考えられている。しかしハドロン全体として $Q\bar{Q}q\bar{q}$ や $Q\bar{Q}qqq$ というクォーク組成を持つエキゾチックハドロンが持ちうる HQS 多重項は自明ではない。そこで本章はハドロン分子状態のペンタクォークに対して HQSS を用いて HQS 多重項の構造を解析する。

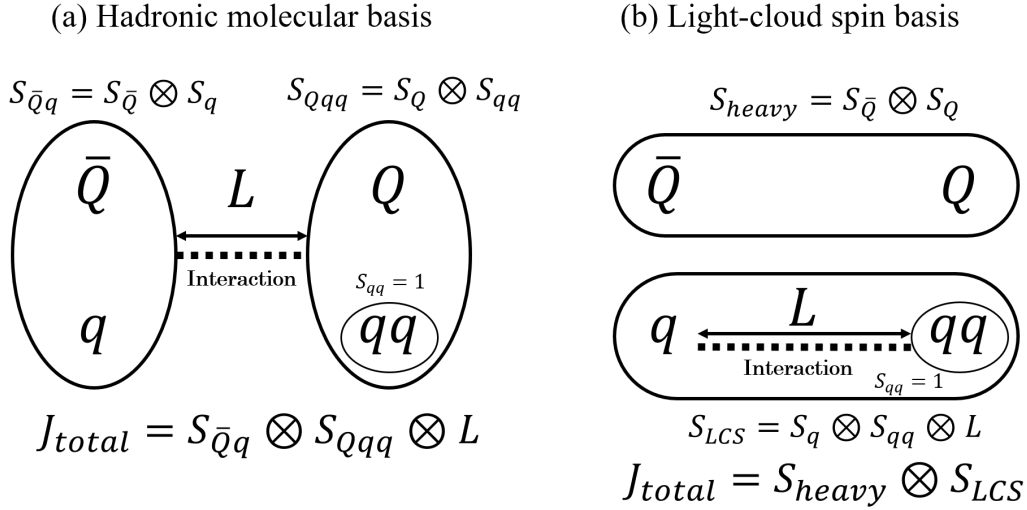


図 3.2 ヘビーマesonとヘビーバリオンの分子描像におけるハドロン分子基底 (図 (a)) とライトクラウドスピン基底 (図 (b)) のイメージ図。クォークやダイクォークなどを囲んでいる円はスピン合成の組を意味している。これらはカラーシングレットハドロンのクォーク成分を表してはいない。つまり図 (b) の円で囲まれた $\bar{Q}Q$ や qqq は必ずしもカラーシングレットのヘビークォークoniumや核子という意味ではない。図内の S_α は α のスピン、 L は軌道角運動量である。この軌道角運動量はライトクラウド内のクォークとダイクォーク間に存在する。

3.2 ライトクラウドスピン基底

本節ではハドロン分子状態のエキゾチックハドロンに対してどのように HQSS を適用するかについて議論する。

ハドロン分子状態に対して HQSS を適用した先行研究として、ヘビーマeson $\bar{P}^{(*)}$ と核子 N の束縛状態としての $\bar{Q}qqqq$ ペンタクォークについての研究 [22, 71, 72] がある。これらの研究ではハドロン分子の内部スピンをヘビークォークスピンとそれ以外の軽い自由度のスピンに分離することで HQSS を議論している。その結果、ヘビークォーク極限においてシングルヘビーハドロンと同様に HQS 二重項が存在することを示している。この手法をヘビークォークが 2 個の場合へ拡張することで実験で見つかった $Q\bar{Q}qqq$ ペンタクォークについて議論できる。

またヘビークォークを 2 個含むハドロンについての有効理論の先行研究として、ヘビークォーク 1 個と反ヘビークォーク 1 個からなるヘビークォークonium有効理論 [73, 74] がある。ヘビークォーク間での相対的な動きが存在する場合はたとえ有効理論の最低次であっても HQSS が破れてしまう。特に軌道角運動量による励起がある場合は 2 つのヘビークォークを相対的に静止させることは不可能である。そのためヘビークォークonium有効理論では HQSS の破れを取り入れることが必要になる。

我々はヘビークォークを 2 個含む、ハドロン分子状態のペンタクォークに対して HQSS を適用するために図 3.2 のようにハドロン分子基底 (Hadronic molecular basis, HM 基底) とライトクラウドスピン基底 (Light-cloud spin basis, LCS 基底) を定義する。HM 基底での全角運動量は $\bar{Q}q$ メソンのスピン $S_{\bar{Q}q}$ と Qqq バリオンのスピン S_{Qqq} 、そして相対軌道角運動量 L の結合とし

て次のように与えられる。

$$\left[L \left[[S_{\bar{Q}} S_q]_{S_{\bar{Q}q}} [S_Q S_{qq}]_{S_{Qqq}} \right]_S \right]_{J_{total}} . \quad (3.2.1)$$

ここで $S_Q(S_{\bar{Q}})$ はヘビークォーク (反ヘビークォーク) のスピン、 $S_q(S_{qq})$ はライトクォーク (ライトダイクォーク) のスピン、そして J_{total} はハドロン分子の全角運動量を表す。特に P_c ペンタクォークを構成すると考えられるヘビーバリオン Σ_c ではライトダイクォークのスピンが 1 であるため、 $S_{qq} = 1$ とする。LCS 基底は HM 基底のスピンを組み替えることで得られ、これらの基底は互いにユニタリ変換によって移行できる。LCS 基底はヘビークォーク成分のスピン $S_{heavy} = S_{\bar{Q}} \otimes S_Q$ とライトクラウド成分のスピン $S_{LCS} = S_q \otimes S_{qq} \otimes L$ の結合として次のように与えられる。

$$\left[[S_{\bar{Q}} S_Q]_{S_{heavy}} \left[L [S_q S_{qq}]_{S_{qqq}} \right]_{S_{LCS}} \right]_{J_{total}} . \quad (3.2.2)$$

ここでライトクラウドスピンとは系全体からヘビークォークスピンを除いた残りの成分の角運動量を意味し、ライトクォーク、ライトダイクォーク、相対軌道角運動量の全ての結合から得られる。図 3.2 において、クォークやダイクォークを囲んでいる円はクォークスピンの組を表しているのであり、カラーシングレットのハドロンを意味してはいないことに注意する。カラーシングレットハドロンになっているのはヘビーメソンとヘビーバリオン、そして $\bar{Q}Qqqq$ 系全体なので、図 3.2(b) の $\bar{Q}Q$ や qqq は必ずしもクォークコニウムや核子といったハドロンではない。

ヘビークォークコニウム有効理論ではヘビークォーク間の相対速度が無視できず、最低次でも HQSS を破ると述べた。しかしこのペンタクォークの研究ではヘビークォークと反ヘビークォークを同時に静止できると仮定する。軌道角運動量の励起などによる相対速度はヘビーメソン内のライトクォークと、ヘビーバリオン内のライトダイクォークの間にあるとする。これはあたかもヘビークォークを覆う雲のような軽い自由度が存在し、軽い雲の間で相互作用や相対的な軌道角運動量が生じるように見える。よって我々はこの描像をライトクラウドスピン (LCS) 基底と名付けた。本研究では LCS 基底というモデルによってヘビークォーク極限では HQSS が成立しているという仮定の下で $Q\bar{Q}qqq$ ペンタクォークの HQS 多重項構造について議論する。

3.3 $\bar{P}^{(*)}\Sigma_Q^{(*)}$ 分子状態の HQS 多重項構造 : S 波の場合

この節ではヘビーメソン $\bar{P}^{(*)}$ とヘビーバリオン $\Sigma_Q^{(*)}$ の分子状態として最も簡単な相対軌道角運動量が S 波 ($L = 0$) の場合を解析する。

3.3.1 HQS 多重項構造

まずはハドロン分子基底 (HM 基底) におけるスピン構造を考える。相対軌道角運動量 S 波の $\bar{P}^{(*)}\Sigma_Q^{(*)}$ 分子状態が取りうるスピン・パリティの組み合わせを表 3.1 に示す。 $\bar{P}^{(*)}\Sigma_Q^{(*)}$ 分子状態

表 3.1 S 波の $\bar{P}^{(*)}\Sigma_Q^{(*)}$ 分子状態が取りうるスピンとパリティ (J^P) の組。 ($^{2S+1}L_J$) はメソンとバリオンの合成スピン S 、軌道角運動量 L 、全角運動量 J を表す。

J^P	
$\frac{1}{2}^-$	$\bar{P}\Sigma_Q (^2S_{1/2}), \bar{P}^*\Sigma_Q (^2S_{1/2}), \bar{P}^*\Sigma_Q^* (^2S_{1/2})$
$\frac{3}{2}^-$	$\bar{P}\Sigma_Q^* (^4S_{3/2}), \bar{P}^*\Sigma_Q (^4S_{3/2}), \bar{P}^*\Sigma_Q^* (^4S_{3/2})$
$\frac{5}{2}^-$	$\bar{P}^*\Sigma_Q^* (^6S_{5/2})$

が HM 基底で持つスピン構造は

$$\bar{P}\Sigma_Q = [\bar{Q}q]_0 \otimes [Q[qq]_1]_{1/2} = \frac{1}{2}, \quad (3.3.1)$$

$$\bar{P}\Sigma_Q^* = [\bar{Q}q]_0 \otimes [Q[qq]_1]_{3/2} = \frac{3}{2}, \quad (3.3.2)$$

$$\bar{P}^*\Sigma_Q = [\bar{Q}q]_1 \otimes [Q[qq]_1]_{1/2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}, \quad (3.3.3)$$

$$\bar{P}^*\Sigma_Q^* = [\bar{Q}q]_1 \otimes [Q[qq]_1]_{3/2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \oplus \frac{5}{2}, \quad (3.3.4)$$

である。 $\Sigma_Q^{(*)}$ バリオン内のライトダイクォークはスピン 1 なので $[qq]_1$ となっている。 HM 基底の全角運動量は単にヘビーメソンとヘビーバリオンのスピン、そして相対軌道角運動量 (今は $L=0$) の合成となる。

しかしながら HM 基底では式 (2.2.3) のようにヘビースピンとライトクラウドスピンの分離されていないため HQS 多重項を議論するには不適當である。そこで第 3.2 節で議論した LCS 基底へ変換する。

LCS 基底における $\bar{P}^{(*)}\Sigma_Q^{(*)}$ 分子状態のスピン構造は以下のように与えられる。

$$[\bar{Q}Q]_0 \otimes [q[qq]_1]_{1/2} = \frac{1}{2} \quad (\text{singlet}), \quad (3.3.5)$$

$$[\bar{Q}Q]_0 \otimes [q[qq]_1]_{3/2} = \frac{3}{2} \quad (\text{singlet}), \quad (3.3.6)$$

$$[\bar{Q}Q]_1 \otimes [q[qq]_1]_{1/2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \quad (\text{doublet}), \quad (3.3.7)$$

$$[\bar{Q}Q]_1 \otimes [q[qq]_1]_{3/2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \oplus \frac{5}{2} \quad (\text{triplet}). \quad (3.3.8)$$

スピン 1/2 一重項、スピン 3/2 一重項、スピン (1/2, 3/2) 二重項、スピン (1/2, 3/2, 5/2) 三重項の全 4 種類の HQS 多重項が存在することが分かる。これらの多重項はヘビークォークスピン $S=0, 1$ とライトクラウドスピン $j=1/2, 3/2$ の組み合わせで分類される。 HQS 三重項はヘビークォークが 1 個だけの系には現れない多重項で、複数のヘビークォークを含む場合に現れる。ヘビークォーク 1 個の場合ヘビースピンは 1/2 しかとれず、スピンの方向として $\pm 1/2$ の 2 通りしかない。一方ヘビークォークが 2 個ある場合はその合成スピンとして 0 と 1 があり得る。合成スピン 1 を取るとその方向として $+1, 0, -1$ の 3 通りがあるのでそれに対応した三重項が現れる。

次に HM 基底と LCS 基底の間の変換について考える。これらの基底は内部のスピン自由度を組み替えるユニタリ変換でつながっている。 HM 基底では $J^P = 1/2^-$ の波動関数は次のような 3

成分からなる。

$$\psi_{1/2^-}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} |\bar{P}\Sigma_Q\rangle_{1/2^-} \\ |\bar{P}^*\Sigma_Q\rangle_{1/2^-} \\ |\bar{P}^*\Sigma_Q^*\rangle_{1/2^-} \end{pmatrix}. \quad (3.3.9)$$

この HM 基底での波動関数にユニタリ変換行列 U を作用させることで LCS 基底での波動関数が得られる。

$$\begin{aligned} \psi_{1/2^-}^{\text{LCS}} &= U_{1/2^-}^{-1} \psi_{1/2^-}^{\text{HM}} \\ &= \begin{pmatrix} \left| [\bar{Q}Q]_0 \otimes [qq]_1 \right\rangle_{1/2^-}^{\text{singlet}} \\ \left| [\bar{Q}Q]_1 \otimes [qq]_1 \right\rangle_{1/2^-}^{\text{doublet}} \\ \left| [\bar{Q}Q]_1 \otimes [qq]_1 \right\rangle_{1/2^-}^{\text{triplet}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

$$U_{1/2^-} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{5}{6} & \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \quad (3.3.11)$$

同様にして $J^P = 3/2^-, 5/2^-$ の基底変換を行う。

$$\psi_{3/2^-}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} |\bar{P}\Sigma_Q^*\rangle_{3/2^-} \\ |\bar{P}^*\Sigma_Q\rangle_{3/2^-} \\ |\bar{P}^*\Sigma_Q^*\rangle_{3/2^-} \end{pmatrix}, \quad (3.3.12)$$

$$\begin{aligned} \psi_{3/2^-}^{\text{LCS}} &= U_{3/2^-}^{-1} \psi_{3/2^-}^{\text{HM}} \\ &= \begin{pmatrix} \left| [\bar{Q}Q]_0 \otimes [qq]_1 \right\rangle_{3/2^-}^{\text{singlet}} \\ \left| [\bar{Q}Q]_1 \otimes [qq]_1 \right\rangle_{3/2^-}^{\text{doublet}} \\ \left| [\bar{Q}Q]_1 \otimes [qq]_1 \right\rangle_{3/2^-}^{\text{triplet}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

$$U_{3/2^-} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{15}}{6} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\sqrt{15}}{6} & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad (3.3.14)$$

$$\psi_{5/2^-}^{\text{HM}} = \left(|\bar{P}^*\Sigma_Q^*\rangle_{5/2^-} \right). \quad (3.3.15)$$

$$\begin{aligned} \psi_{5/2^-}^{\text{LCS}} &= U_{5/2^-}^{-1} \psi_{5/2^-}^{\text{HM}} \\ &= \left(\left| [\bar{Q}Q]_1 \otimes [qq]_1 \right\rangle_{5/2^-}^{\text{triplet}} \right), \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

$$U_{5/2^-} = 1. \quad (3.3.17)$$

変換行列の行列要素はスピンの組み換えに伴うクレブシュ-ゴルダン係数から求めることができる。9- j 記号を用いた導出方法を付録 A で解説している。

3.3.2 有効ラグランジアンとポテンシャル

第 3.3.1 節で示した多重項構造は HQSS が成り立っているならばモデルに依存しない。しかし、どの多重項が束縛状態になるかを議論するにはモデルの詳細による。ここではパイ中間子交換ポテンシャル (One-pion exchange potential, OPEP) を用いてヘビーマeson-ヘビーバリオン束縛状態について議論する。

ヘビーマeson $P^{(*)}$ とパイ中間子の相互作用ラグランジアンは式 (2.2.14) より

$$\mathcal{L} = g \text{Tr} [\bar{H}_a H_b \gamma_\mu \gamma_5 A_{ba}^\mu], \quad (3.3.18)$$

である。各場の定義は第 2.2 節と同様に

$$H_a \equiv \frac{1 + \psi}{2} [P_a^* + i\gamma_5 P_a], \quad (3.3.19)$$

$$\bar{H}_a = \gamma_0 H_a^\dagger \gamma_0 = [P_{a\mu}^{*\dagger} \gamma^\mu + i\gamma_5 P_a^\dagger] \frac{1 + \psi}{2} \quad (3.3.20)$$

$$A^\mu = \frac{i}{2} (\xi^\dagger \partial^\mu \xi - \xi \partial^\mu \xi^\dagger), \quad (3.3.21)$$

$$\xi = \exp\left(i \frac{\hat{\pi}}{\sqrt{2} f_\pi}\right), \quad (3.3.22)$$

$$\hat{\pi} = \begin{pmatrix} \pi^0/\sqrt{2} & \pi^+ \\ \pi^- & -\pi^-/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (3.3.23)$$

である。ここでパイ中間子の崩壊定数は $f_\pi \simeq 92.4$ MeV である。また結合定数 g はチャームメソンの崩壊 $D^* \rightarrow D\pi$ から $|g| = 0.59$ と決まる [34]。ヘビークォークのフレーバー対称性があると考えるとヘビークォーク極限でも同じ値を用いる。

ヘビーバリオン $\Sigma_Q^{(*)}$ とパイ中間子の相互作用ラグランジアンは式 (2.3.18) より

$$\mathcal{L} = \frac{3}{2} i g_1 v_\sigma \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr} [\bar{S}_\mu A_\nu S_\rho], \quad (3.3.24)$$

$$S^\mu = B_6^{*\mu} + \frac{1}{\sqrt{3}} (\gamma^\mu + v^\mu) \gamma_5 B_6, \quad (3.3.25)$$

と書ける。結合定数 g_1 をチャームバリオン Σ_c^* の崩壊から直接は決定できないため、クォークモデルによる評価 [30] を用いて $g_1 = 0.94$ とし、ヘビークォーク極限でも同じ値を使う。

これらの有効ラグランジアンから OPEP を構成する際、各バーテックスに以下のモノポール型形状因子を通じてカットオフパラメータ Λ が導入される。

$$F(q) = \frac{\Lambda^2 - m_\pi^2}{\Lambda^2 - q^2}, \quad (3.3.26)$$

ここで m_π は交換されるパイ中間子の質量、 q はその運動量である。簡単のため $\bar{P}^{(*)}\bar{P}^{(*)}\pi$ バーテックスと $\Sigma_Q^{(*)}\Sigma_Q^{(*)}\pi$ バーテックスで同じ値のカットオフパラメータを使う。陽子と中性子の束縛状態である重陽子 (deuteron) の束縛エネルギーを OPEP で再現するには $\Lambda \sim 900$ MeV である。ここではそれを参考に $\Lambda = 1000, 1500$ MeV に固定して解析する。OPEP では有限の軌道角運動量を持つ成分との結合が寄与するテンソル力が強い引力を生むと知られているが、この解析では最も簡単な S 波状態のみを考えているためテンソル力が含まれていない。本研究の目的は観測された質量をモデルで再現することではなく、引力下での HQS 多重項の振る舞いを理論的に調べることなので、テンソル力の効果を考慮してカットオフパラメータを大きめに取る。

ヘビークォークの質量は強い相互作用のスケールより十分に重く非相対論的に扱えるとして 4 元ベクトルの第 0 成分を無視する近似を取る。また、発見された P_c ペンタクォークのアイソスピンが $1/2$ なので以下の計算では全てアイソスピン $1/2$ へ射影している。

HM 基底における各 J^P の OPEP は

$$V_{\pi,1/2^-}^{\text{HM}}(r) = \frac{gg_1}{f_\pi^2} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} C_\pi(r), \quad (3.3.27)$$

$$V_{\pi,3/2^-}^{\text{HM}}(r) = \frac{gg_1}{f_\pi^2} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{5}{2\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6\sqrt{5}} \\ -\frac{5}{2\sqrt{15}} & \frac{5}{6\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} C_\pi(r), \quad (3.3.28)$$

$$V_{\pi,5/2^-}^{\text{HM}}(r) = -\frac{gg_1}{2f_\pi^2} C_\pi(r), \quad (3.3.29)$$

と書ける。関数 $C_\pi(r)$ の定義は

$$C_\pi(r) = \frac{m_\pi^2}{4\pi} \left[\frac{e^{-m_\pi r} - e^{-\Lambda r}}{r} - \frac{\Lambda^2 - m_\pi^2}{2\Lambda} e^{-\Lambda r} \right], \quad (3.3.30)$$

であり、スピン-スピン力によるポテンシャル (中心力ポテンシャル) を表す。OPEP は長距離の核力の振る舞いを表すポテンシャルなので、伝統的な手法にのっとり、デルタ関数部分をポテンシャルから引き去っている [75, 76]。 $J^P = 1/2^-, 3/2^-$ はそれぞれ表 3.1 にある 3 チャンネルの結合があるのでポテンシャルは 3×3 の行列で得られる。

これらのポテンシャルを用いてシュレディンガー方程式を解くことで束縛状態を調べることができるが、本研究では HQS 多重項に基づいた解析を行うため、第 3.3.1 で行った LCS 基底への変換を行う。LCS 基底でのポテンシャルはユニタリ変換行列 U を用いて以下のように得られる。

$$\begin{aligned} V_{\pi,1/2^-}^{\text{LCS}}(r) &= U_{1/2^-}^{-1} V_{1/2^-}^{\text{HM}} U_{1/2^-} \\ &= \frac{gg_1}{f_\pi^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} C_\pi(r), \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

$$\begin{aligned} V_{\pi,3/2^-}^{\text{LCS}}(r) &= U_{3/2^-}^{-1} V_{3/2^-}^{\text{HM}} U_{3/2^-} \\ &= \frac{gg_1}{f_\pi^2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} C_\pi(r), \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

$$\begin{aligned} V_{\pi,5/2^-}^{\text{LCS}}(r) &= U_{5/2^-}^{-1} V_{5/2^-}^{\text{HM}} U_{5/2^-} \\ &= -\frac{gg_1}{2f_\pi^2} C_\pi(r). \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

LCS 基底ではポテンシャルが対角化されることが分かる。この対角成分は LCS 基底における波動関数の成分に対応している。例えば (3.3.31) の $J^P = 1/2^-$ のポテンシャルは左上から順に式 (3.3.10) の一重項、二重項、三重項である。HM 基底ではポテンシャルに非対角項がある 3 チャンネル結合問題になっていたが、LCS 基底へ変換することで HQS 多重項ごとに分離される。

運動項も同様に HM 基底から LCS 基底へ変換できる。まず HM 基底での運動項は以下のようになる。

$$K_{1/2-}^{\text{HM}} = \text{diag} \left[K_{\bar{P}\Sigma_Q}^0, K_{\bar{P}^*\Sigma_Q}^0, K_{\bar{P}^*\Sigma_Q^*}^0 \right], \quad (3.3.34)$$

$$K_{3/2-}^{\text{HM}} = \text{diag} \left[K_{\bar{P}\Sigma_Q^*}^0, K_{\bar{P}^*\Sigma_Q}^0, K_{\bar{P}^*\Sigma_Q^*}^0 \right], \quad (3.3.35)$$

$$K_{5/2+}^{\text{HM}} = K_{\bar{P}^*\Sigma_Q^*}^0. \quad (3.3.36)$$

K の定義は

$$K_i^L = -\frac{1}{2\mu_i} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L(L+1)}{r^2} \right), \quad (3.3.37)$$

である。 i はチャンネルを表す添字、 L は軌道角運動量、 μ_i はチャンネル i の換算質量を意味する。LCS 基底への変換は変換行列 U を用いて

$$K_{JP}^{\text{LCS}} = U_{JP}^{-1} K_{JP}^{\text{HM}} U_{JP}, \quad (3.3.38)$$

と変換される。注意が必要なのは、ヘビークォーク極限では K_{JP}^{LCS} の非対角項は無いが、ヘビークォークの質量が有限の場合には非対角項が存在することである。これはクォーク質量が有限であることからくる HQSS の破れの効果である。つまりヘビークォーク極限では HQS 多重項ごとの単一チャンネル問題を解けばよいが、有限質量で計算する場合は HM 基底と同様に結合チャンネル問題になっている。ただしこの運動項での HQSS の破れからくる多重項の混合効果は小さいことを後ほど示す。

3.3.3 数値計算

ここでは第 3.3.2 節で得た OPEP を用いて質量を変えながらシュレディンガー方程式を解き、エネルギーの縮退を数値的に見る。シュレディンガー方程式を解く際にガウス展開法 [77, 78] を用いる。ガウス展開法の詳細は付録 C で解説している。

ここで結合定数の符号について考える。ヘビーメソンとパイ中間子の結合定数は $D^* \rightarrow D\pi$ の崩壊より絶対値が $|g| = 0.59$ と決まる。多くの研究でその符号は正に取られているが、崩壊からの評価には符号の不定性^{*1} がある。この符号の選び方によって束縛状態になりうる HQS 多重項の種類が変わる。式 (3.3.31) - (3.3.33) の OPEP において係数が $-1/2$ になっているチャンネルは $g = +0.59$ の時に引力で、 $g = -0.59$ の時に斥力である。係数が $+1$ のチャンネルはその逆になる。多重項の振る舞いを調べるにあたってどちらの符号を使うかが重要になってくる。 g の符号として正が採用されることが一般的だが、本研究では多重項の縮退の様子を調べるという理論的興味のために正と負両方の場合を調べる。

ヘビークォーク極限でのハドロンを扱うためにヘビーメソン (\bar{P}, \bar{P}^*) とヘビーバリオン

^{*1} 本来は g とヘビーバリン-パイ中間子結合定数 g_1 の相対符号の不定性である。ただしここでは g_1 の符号を正に固定し、不定性は g が持つとする。

表 3.2 チャームハドロンとボトムハドロンの質量 [34]。

	\bar{D}	\bar{D}^*	B	B^*
Mass[MeV]	1867.21	2008.56	5279.48	5324.65
	Σ_c	Σ_c^*	Σ_b	Σ_b^*
Mass[MeV]	2453.54	2518.13	5813.4	5833.6

表 3.3 表 3.2 のハドロン質量を再現するように決めた、式 (3.3.39)-(3.3.42) のパラメータの値。

$a[\text{GeV}^2]$	$b[\text{GeV}^2]$	$c[\text{GeV}^2]$	$d[\text{GeV}^2]$	$w[\text{GeV}^3]$	$x[\text{GeV}^3]$	$y[\text{GeV}^3]$	$z[\text{GeV}^3]$
-2.0798	-1.8685	1.9889	2.0814	2.9468	3.1677	-3.1729	-3.0629

(Σ_Q, Σ_Q^*) の質量を次のようにパラメータ化 [16] する。

$$M_{\bar{P}} = 2\mu + \frac{a}{2\mu} + \frac{w}{(2\mu)^2}, \quad (3.3.39)$$

$$M_{\bar{P}^*} = 2\mu + \frac{b}{2\mu} + \frac{x}{(2\mu)^2}, \quad (3.3.40)$$

$$M_{\Sigma_Q} = 2\mu + \frac{c}{2\mu} + \frac{y}{(2\mu)^2}, \quad (3.3.41)$$

$$M_{\Sigma_Q^*} = 2\mu + \frac{d}{2\mu} + \frac{z}{(2\mu)^2}. \quad (3.3.42)$$

μ は $\bar{P}\Sigma_Q, \bar{P}\Sigma_Q^*, \bar{P}^*\Sigma_Q, \bar{P}^*\Sigma_Q^*$ の 4 種類のチャネルの換算質量を平均化したものであり、ヘビークォーク質量をコントロールする質量パラメータである。 a, b, c, d, w, x, y, z の 8 つのパラメータは表 3.2 の 8 つのチャームハドロン、ボトムハドロンの質量を再現するように決定する。これらのパラメータの値は表 3.3 にまとめている。 $\mu = 1.102 \text{ GeV}$ の時チャームハドロンの質量を、 $\mu = 2.779 \text{ GeV}$ の時ボトムハドロンの質量を再現する。 μ の値を大きくすることはヘビークォークの質量を大きくすることに対応する。本研究では $\mu = 1-100 \text{ GeV}$ の範囲で解析を行う。 $\mu = 100 \text{ GeV}$ の時、 \bar{P} と \bar{P}^* の質量差は 1.0 MeV 、 Σ_Q と Σ_Q^* の質量差は 0.4 MeV という小さな値であり、本研究ではこれをヘビークォーク極限として扱う。 μ の値が小さい場合は式 (3.3.38) の LCS 基底での運動項に非対角項が残るので多重項の混合が起こる。

まず $g = +0.59$ の結果を示す。図 3.3 はこの時の引力ポテンシャル

$$V(r) = -\frac{gg_1}{2f_\pi^2} C_\pi(r) \quad (3.3.43)$$

の概形である。図 3.4 はシュレディンガー方程式を解いて得られた固有エネルギーである。横軸は質量パラメータ $\mu [\text{GeV}]$ で、縦軸は $\bar{P}\Sigma_Q$ のしきい値から測った束縛解のエネルギーである。それぞれのラベルは得られた固有状態の中で最も主要な成分の名前で定義している。ヘビークォーク極限では $\bar{P}\Sigma_Q, \bar{P}\Sigma_Q^*, \bar{P}^*\Sigma_Q, \bar{P}^*\Sigma_Q^*$ の 4 チャネルのしきい値は全て同じだが有限質量では HQSS の破れの効果によりそれぞれのしきい値が異なる。スピン $3/2$ では $\bar{P}\Sigma_Q^*$ が、スピン $5/2$ では $\bar{P}^*\Sigma_Q^*$ が最低のしきい値を持つチャネルなので、 μ が小さい範囲ではエネルギーが正になっているがいずれも束縛状態を表している。 $\mu = 100 \text{ GeV}$ で 4 つの束縛状態は全て縮退しており、束縛エネルギーは $\Lambda = 1000 \text{ MeV}$ の時 -13.7 MeV 、 $\Lambda = 1500 \text{ MeV}$ の時 -22.3 MeV である。

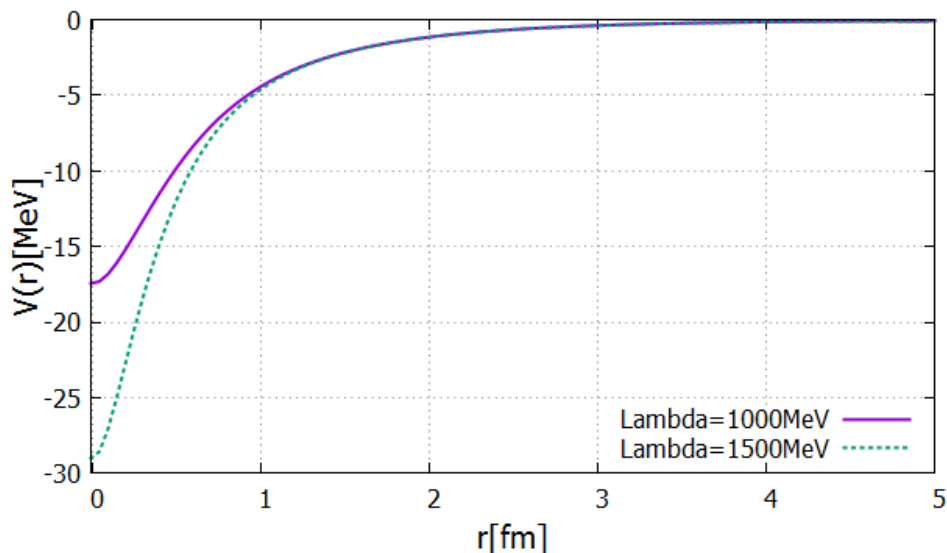


図 3.3 $g = +0.59$ とした時の引力ポテンシャル $V(r) = -\frac{gg_1}{2f_\pi^2} C_\pi(r)$ の概形。紫実線は $\Lambda = 1000$ MeV、緑点線は $\Lambda = 1500$ MeV の場合。

表 3.4 $g = +0.59, \Lambda = 1000$ MeV で得られた束縛解の波動関数の成分比 (%)。"- " は束縛解が得られなかったパラメータを意味する。

μ [GeV]	Spin1/2 triplet			Spin3/2 singlet			Spin3/2 triplet		
	singlet	doublet	triplet	singlet	doublet	triplet	singlet	doublet	triplet
1	0.8	0	99.2	-	-	-	1.6	0	98.4
2	0	0	100	-	-	-	0.9	0	99.1
3	0	0	100	100	0	0	0	0	100

図 3.4 を見ると μ が小さい時は HQSS の破れによって質量の縮退が解けている。また運動項の非対角項があるために多重項の混合が起こる。 $\mu = 1-3$ GeV、 $\Lambda = 1000$ MeV の時の多重項の成分比を表 3.4 にまとめている。ただし $J^P = 5/2^-$ は三重項成分のみで自明なため書いていない。 $\mu = 1-2$ GeV ではわずかに異なる多重項成分が混ざっているがその割合は小さい。 $\mu \geq 3$ GeV では多重項が完全に分離している。このことから有限質量であっても運動項の非対角成分による HQSS の破れの効果は非常に小さいことが分かる。

次に $g = -0.59$ の場合の結果を示す。引力を持つ多重項は $J^P = 1/2^-$ 一重項と $J^P = (1/2^-, 3/2^-)$ 二重項であり、その引力ポテンシャルは

$$V(r) = \frac{gg_1}{f_\pi^2} C_\pi(r) \quad (3.3.44)$$

と書かれる。 $g = +0.59$ の場合と比べてポテンシャルは 2 倍大きい。得られた固有エネルギーを図 3.5 に示す。 $\mu = 100$ GeV で全ての束縛状態が縮退しており、その束縛エネルギーは $\Lambda = 1000$ MeV で -29.5 MeV、 $\Lambda = 1500$ MeV で -48.1 MeV である。 μ が小さくなると縮退が解ける点は $g = +0.59$ の場合と同じだが、引力が強いため $\mu = 1$ GeV でもすべての状態が束縛している点異なる。波動関数の成分比は表 3.5 のようになった。こちらも、HQSS の破れによる運動項の非対角項の効果は小さい事がわかる。

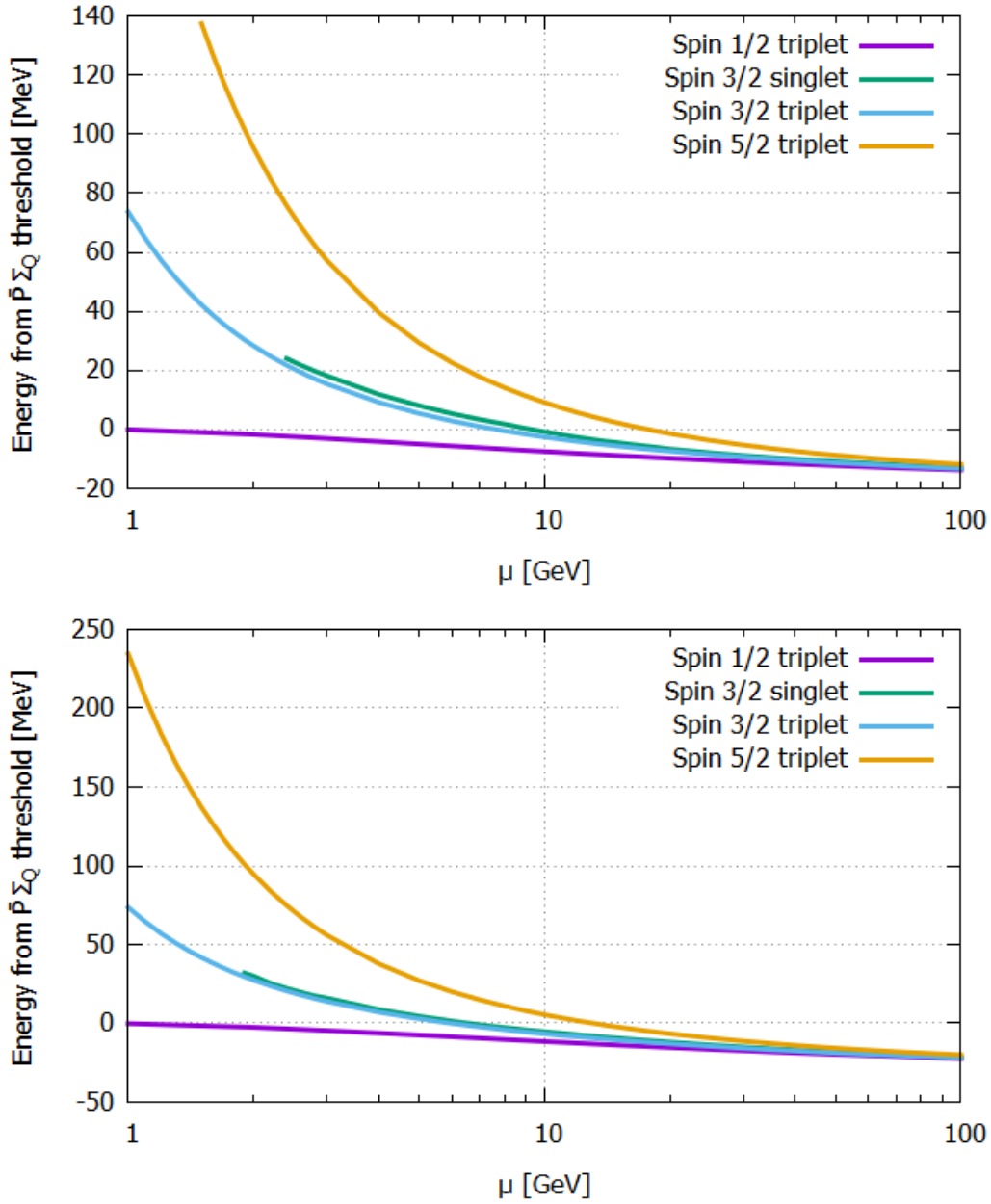


図 3.4 $g = +0.59$ の時の $\bar{P}^{(*)}\Sigma_Q^{(*)}$ 分子状態の固有エネルギー。上図は $\Lambda = 1000$ MeV の場合、下図は $\Lambda = 1500$ MeV の場合。これらのエネルギーは $\bar{P}\Sigma_Q$ のしきい値から測っている。

表 3.5 $g = -0.59, \Lambda = 1000$ MeV で得られた束縛解の波動関数の成分比 (%)。

μ [GeV]	Spin1/2 singlet			Spin1/2 doublet			Spin3/2 doublet		
	singlet	doublet	triplet	singlet	doublet	triplet	singlet	doublet	triplet
1	96.1	3.9	0	3.4	96.5	0.1	0	99.9	0.1
2	99.8	0.2	0	0.1	99.9	0	0	100	0
3	100	0	0	0	100	0	0	100	0

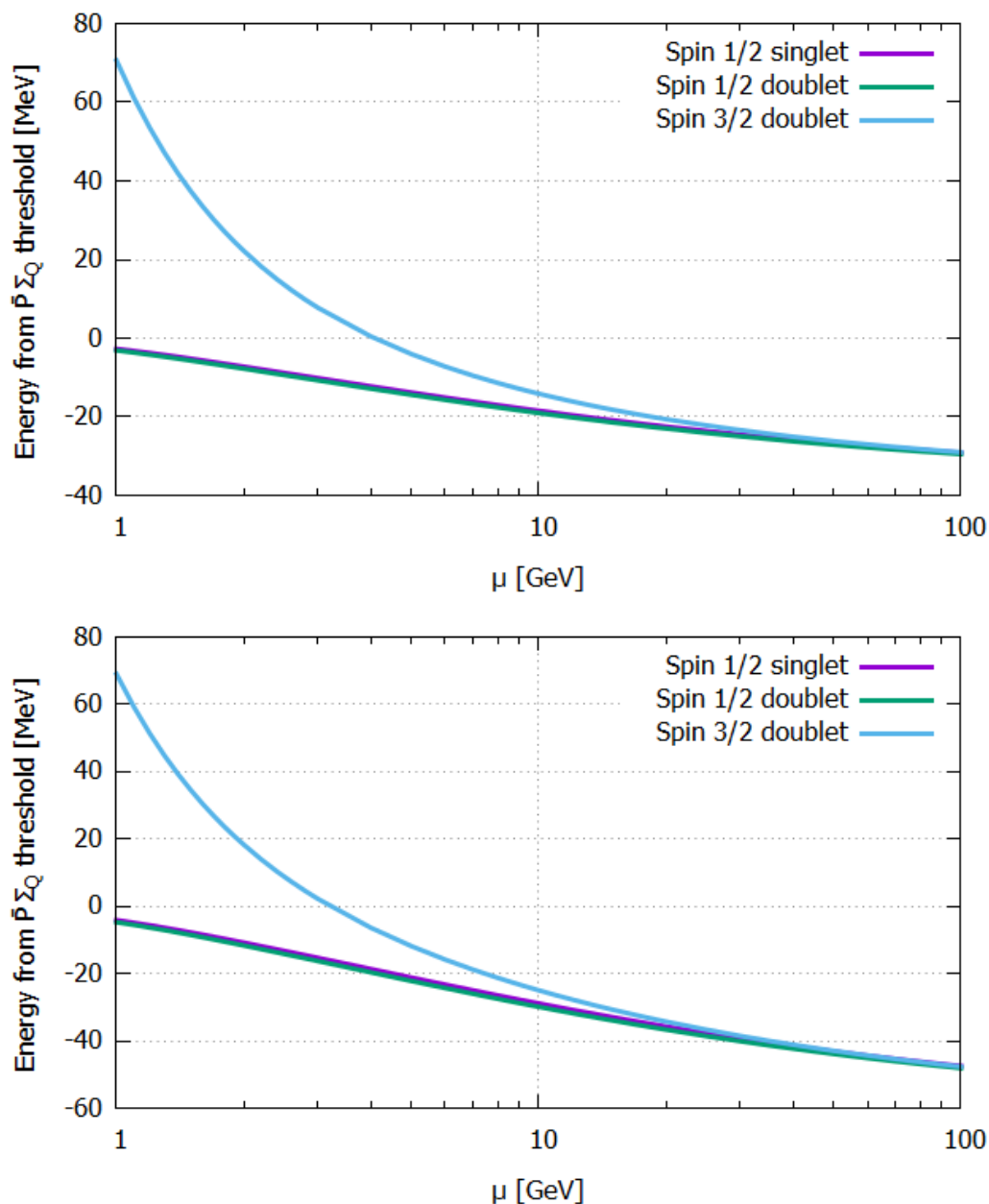


図 3.5 $g = -0.59$ の時の $\bar{P}^{(*)}\Sigma_Q^{(*)}$ 分子状態の固有エネルギー。上図は $\Lambda = 1000$ MeV の場合、下図は $\Lambda = 1500$ MeV の場合。これらのエネルギーは $\bar{P}\Sigma_Q$ のしきい値から測っている。

3.3.4 議論

第 3.3.3 節では結合定数の符号によって束縛状態になる多重項が異なること、束縛状態のエネルギーはヘビークォーク極限で縮退することをシュレディンガー方程式を解くことで示した。 $g = +0.59$ の場合は $J^P = 3/2^-$ 一重項と $J^P = (1/2^-, 3/2^-, 5/2^-)$ 三重項が、 $g = -0.59$ の場合は $J^P = 1/2^-$ 一重項と $J^P = (1/2^-, 3/2^-)$ 二重項が引力チャンネルであった。これらの多重項は LCS 基底でのポテンシャルの係数を見ると $-1/2$ のチャンネルと $+1$ のチャンネルに分かれている。

係数が $-1/2$ になっているのは $J^P = 3/2^-$ 一重項と $J^P = (1/2^-, 3/2^-, 5/2^-)$ 三重項である。同一のポテンシャルを持つためヘビークォーク極限ではこの一重項と三重項の縮退が起こり、四重

項として振る舞うことになる。この2つの多重項の共通点はライトクラウドスピンの構造である。どちらも $[q[qq]_1]_{3/2}$ という構造を持っている。現在考えているポテンシャルは軽いクォークで構成されたパイ中間子の交換であるため、相互作用に寄与するのは軽いクォークのみでありヘビークォークのスピンの構造に依存しない。従って同じライトクラウドスピンを持つ2つの多重項は同じポテンシャルになる。同様に $[q[qq]_1]_{1/2}$ というライトクラウドスピンを持つ $J^P = 1/2^-$ 一重項と $J^P = (1/2^-, 3/2^-)$ 二重項はどちらもポテンシャルの係数が +1 である。ここで考えているポテンシャルは OPEP のみだが、パイ中間子以外の交換相互作用を導入してもそれが軽いクォークからなる中間子交換であればその振る舞いはライトクラウドスピンの構造にのみ依存する。

上記の理由から、HQS 一重項と三重項 (または一重項と二重項) が縮退している。しかし、HQSS の効果によりそれぞれの多重項で崩壊先が異なるため区別することができる。一重項の場合 $Q\bar{Q}$ のスピンは 0 であり、三重項 (二重項) の場合はスピン 1 である。このスピンが保存されることから、それぞれが結合するヘビークォークコニウムのスピンの異なる。よって一重項はスピン 0 のクォークコニウム (チャーモニウムなら η_c) のチャンネルへ、三重項 (二重項) はスピン 1 のクォークコニウム (チャーモニウムなら J/ψ) のチャンネルへ崩壊することが分かる。現実ではクォーク質量が有限なので HQSS は破れているが、その破れが小さいならばスピン 0 と 1 のクォークコニウムへの崩壊分岐比からそのスピン構造を類推することができる。

図 3.6 は $g = +0.59$, $\Lambda = 1000$ MeV の場合の数値計算結果と実験で測定された P_c ペンタクォークの質量との比較である。上図は 2015 年の実験結果 [6]、下図は 2019 年の実験結果 [9] と比較している。2015 年の結果との比較から、 $P_c(4380)$ は HQS 三重項に属する $J^P = 3/2^-$ の束縛状態に対応している。そのスピンパートナーとなる $J^P = 1/2^-$ の束縛状態も解が存在し、4320MeV 付近の質量を持つ P_c ペンタクォークの存在を予言できる。一方、 $5/2^-$ の束縛状態はチャームクォーク領域には存在しない。また $P_c(4450)$ に対応する束縛状態もこの計算からは得られていない。2019 年の結果と比較すると、束縛状態の存在を予言していた 4320MeV 付近に $P_c(4312)$ が発見された。これは HQS 三重項の内の $J^P = 1/2^-$ の状態に対応し、 $P_c(4380)$ のスピンパートナーだと推測できる。 $P_c(4440)$, $P_c(4457)$ についてはやはり本研究の計算からは束縛状態が得られない。これらの解析には共鳴状態の取り扱いが必要である。

チャームハドロンに対応するパラメータでは HQS 三重項に属する $J^P = 1/2^-, 3/2^-$ しか束縛状態が存在しないが、ボトムハドロンに対応するパラメータならば三重項に属する全てと一重項の計 4 種類の束縛状態が存在する。よって hidden-bottom ペンタクォークが将来の実験で発見される場合には三重項の全ての状態が発見されると期待される。そして一重項の束縛状態を発見できる可能性がある。すでに述べたとおり HQSS の破れがなければ一重項と三重項では粒子の崩壊先が異なるため、ボトモニウムへの崩壊から多重項構造を推測することができる。 P_c ペンタクォークがスピン 1 のチャーモニウムである J/ψ へ崩壊すると同様にスピン 1 のボトモニウムである Υ へ崩壊していれば HQS 三重項に属すると考えられる。さらに、スピン 0 の η_b へ崩壊が観測されれば一重項の束縛状態の可能性が高い。これらの測定からスピン多重項構造を確認することができれば本研究で提案するライトクラウドスピン基底によるモデルの検証が進むと期待できる。

本節では相対軌道角運動量 S 波の場合を解析した。しかし有限の軌道角運動量へ拡張した議論も必要である。LHCb 実験で発見されたペンタクォークのパリティは不明であるが、正パリティの解析をするには P 波分子状態を考える必要がある。また、パリティが負であったとしても OPEP ではテンソル力の効果が重要である。テンソル力は有限の軌道角運動量を持つチャンネルとの結合から現れ、強い引力ポテンシャルを生む。例えば重陽子では S 波チャンネルと D 波チャネ

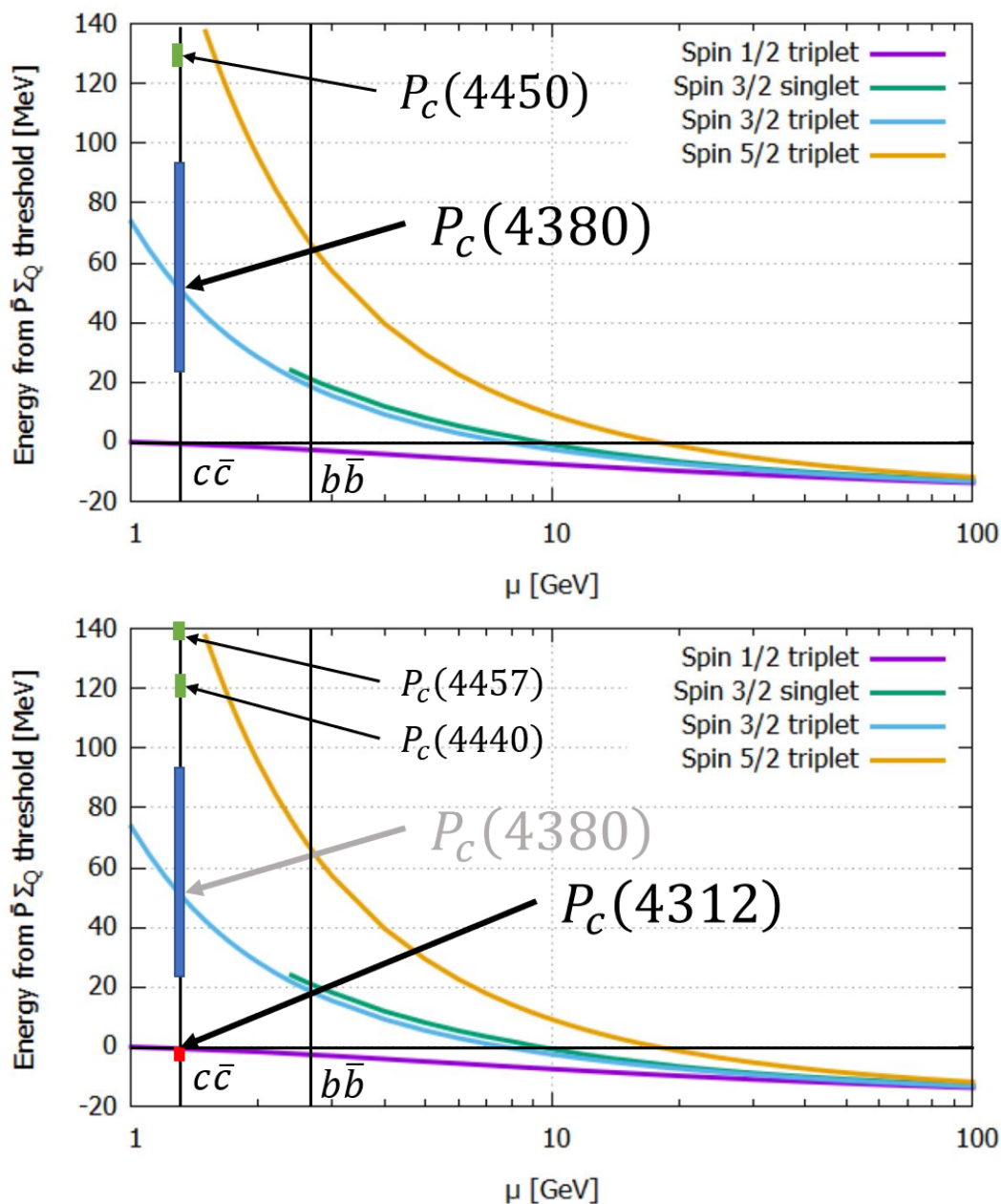


図 3.6 $g = +0.59, \Lambda = 1000$ MeV の時の $\bar{P}^{(*)}\Sigma_Q^{(*)}$ 分子状態の固有エネルギーと LHCb から報告された実験結果との比較。 $\mu = 1.102, 2.779$ GeV でそれぞれ、チャームハドロン分子状態とボトムハドロン分子状態に対応する。 $\mu = 1.102$ を表す縦線上の四角は実験で測定された P_c ペンタクォークの質量の値を誤差を含めて示している。上図は 2015 年の実験結果 [6]、下図は 2019 年の実験結果 [9] と比較している。

ルの結合によるテンソル力の寄与が大きいことが知られている。よって軌道角運動量を導入した LCS 基底の議論として、次節では P 波分子状態について解析する。

3.4 $\bar{P}^{(*)}\Sigma_Q^{(*)}$ 分子状態の HQS 多重項構造 : P 波の場合

相対軌道角運動量を持つ分子状態を LCS 基底で扱うため、既に第 3.2 節でも解説している通り、軌道角運動量はライトクラウド内にあると仮定する。複数のヘビークォークがある系ではヘ

表 3.6 P 波の $\bar{P}^{(*)}\Sigma_Q^{(*)}$ 分子状態が取りうるスピンとパリティ (J^P) の組。($^{2S+1}L_J$) はメソンとバリオンの合成スピン S 、軌道角運動量 L 、全角運動量 J を表す。

J^P	
$\frac{1}{2}^+$	$\bar{P}\Sigma_Q(^2P_{1/2}), \bar{P}\Sigma_Q^*(^4P_{1/2}), \bar{P}^*\Sigma_Q(^2P_{1/2}), \bar{P}^*\Sigma_Q(^4P_{1/2}), \bar{P}^*\Sigma_Q^*(^2P_{1/2}), \bar{P}^*\Sigma_Q^*(^4P_{1/2})$
$\frac{3}{2}^+$	$\bar{P}\Sigma_Q(^2P_{3/2}), \bar{P}\Sigma_Q^*(^4P_{3/2}), \bar{P}^*\Sigma_Q(^2P_{3/2}), \bar{P}^*\Sigma_Q(^4P_{3/2}),$ $\bar{P}^*\Sigma_Q^*(^2P_{3/2}), \bar{P}^*\Sigma_Q^*(^4P_{3/2}), \bar{P}^*\Sigma_Q^*(^6P_{3/2})$
$\frac{5}{2}^+$	$\bar{P}\Sigma_Q^*(^4P_{5/2}), \bar{P}^*\Sigma_Q(^4P_{5/2}), \bar{P}^*\Sigma_Q^*(^4P_{5/2}), \bar{P}^*\Sigma_Q^*(^6P_{5/2})$
$\frac{7}{2}^+$	$\bar{P}^*\Sigma_Q^*(^6P_{7/2})$

ビークォークの励起を考えると有効理論の最低次でも HQSS が破れてしまう [73, 74]。チャームニウムやボトムニウムの励起状態は存在するので現実のペンタクォークの質量などを定量的に議論する場合はこの破れの効果は重要になるだろうが、本研究はヘビークォーク極限での HQS 多重項構造を調べることを主目的としているためヘビークォークの励起は考慮しない。

3.4.1 HQS 多重項構造

P 波分子状態が取りうるスピン・パリティの組を表 3.6 に示す。これらの状態の HM 基底でのスピン構造は

$$\bar{P}\Sigma_Q(^2P) = \left[P \left[[\bar{Q}q]_0 [Q [qq]_1]_{1/2} \right]_{1/2} \right] = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}, \quad (3.4.1)$$

$$\bar{P}\Sigma_Q^*(^4P) = \left[P \left[[\bar{Q}q]_0 [Q [qq]_1]_{3/2} \right]_{3/2} \right] = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \oplus \frac{5}{2}, \quad (3.4.2)$$

$$\bar{P}^*\Sigma_Q(^2P) = \left[P \left[[\bar{Q}q]_1 [Q [qq]_1]_{1/2} \right]_{1/2} \right] = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}, \quad (3.4.3)$$

$$\bar{P}^*\Sigma_Q(^4P) = \left[P \left[[\bar{Q}q]_1 [Q [qq]_1]_{3/2} \right]_{3/2} \right] = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \oplus \frac{5}{2}, \quad (3.4.4)$$

$$\bar{P}^*\Sigma_Q^*(^2P) = \left[P \left[[\bar{Q}q]_1 [Q [qq]_1]_{3/2} \right]_{1/2} \right] = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}, \quad (3.4.5)$$

$$\bar{P}^*\Sigma_Q^*(^4P) = \left[P \left[[\bar{Q}q]_1 [Q [qq]_1]_{3/2} \right]_{3/2} \right] = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \oplus \frac{5}{2}, \quad (3.4.6)$$

$$\bar{P}^*\Sigma_Q^*(^6P) = \left[P \left[[\bar{Q}q]_1 [Q [qq]_1]_{3/2} \right]_{5/2} \right] = \frac{3}{2} \oplus \frac{5}{2} \oplus \frac{7}{2}, \quad (3.4.7)$$

となる。次に S 波の場合と同じように LCS 基底でのスピン構造を考えると以下ようになる。

$$(s-1) : \left[[\bar{Q}Q]_0 \left[P [qq]_1 \right]_{1/2} \right]_{1/2} = \frac{1}{2}, \quad (3.4.8)$$

$$(s-2) : \left[[\bar{Q}Q]_0 \left[P [qq]_1 \right]_{3/2} \right]_{1/2} = \frac{1}{2}, \quad (3.4.9)$$

$$(s-3) : \left[[\bar{Q}Q]_0 \left[P [qq]_1 \right]_{1/2} \right]_{3/2} = \frac{3}{2}, \quad (3.4.10)$$

$$(s-4) : \left[[\bar{Q}Q]_0 \left[P [qq]_1 \right]_{3/2} \right]_{3/2} = \frac{3}{2}, \quad (3.4.11)$$

$$(s-5) : \left[[\bar{Q}Q]_0 \left[P [qq]_1 \right]_{3/2} \right]_{5/2} = \frac{5}{2}, \quad (3.4.12)$$

$$(d-1) : \left[[\bar{Q}Q]_1 \left[P [qq]_1 \right]_{1/2} \right]_{1/2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}, \quad (3.4.13)$$

$$(d-2) : \left[[\bar{Q}Q]_1 \left[P [qq]_1 \right]_{3/2} \right]_{1/2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}, \quad (3.4.14)$$

$$(t-1) : \left[[\bar{Q}Q]_1 \left[P [qq]_1 \right]_{1/2} \right]_{3/2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \oplus \frac{5}{2}, \quad (3.4.15)$$

$$(t-2) : \left[[\bar{Q}Q]_1 \left[P [qq]_1 \right]_{3/2} \right]_{3/2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \oplus \frac{5}{2}, \quad (3.4.16)$$

$$(t-3) : \left[[\bar{Q}Q]_1 \left[P [qq]_1 \right]_{3/2} \right]_{5/2} = \frac{3}{2} \oplus \frac{5}{2} \oplus \frac{7}{2}. \quad (3.4.17)$$

全部で 10 種類の HQS 多重項があり、s-1 から s-5 は一重項、d-1 と d-2 二重項、t-1 から t-3 は三重項である。HM 基底と LCS 基底間の変換も S 波の場合と同様にユニタリ行列 U を用いて $\psi_{JP}^{\text{LCS}} = U_{JP}^{-1} \psi_{JP}^{\text{HM}}$ と変換する。

$$\psi_{1/2^+}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} \bar{P}\Sigma_Q \left({}^2P_{1/2} \right) \\ \bar{P}\Sigma_Q^* \left({}^4P_{1/2} \right) \\ \bar{P}^*\Sigma_Q \left({}^2P_{1/2} \right) \\ \bar{P}^*\Sigma_Q \left({}^4P_{1/2} \right) \\ \bar{P}^*\Sigma_Q^* \left({}^2P_{1/2} \right) \\ \bar{P}^*\Sigma_Q^* \left({}^4P_{1/2} \right) \end{pmatrix}, \quad (3.4.18)$$

$$\psi_{1/2^+}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} \left[[\bar{Q}Q]_0 \left[P [qq]_1 \right]_{1/2} \right]_{1/2}^{\text{singlet-1}} \\ \left[[\bar{Q}Q]_0 \left[P [qq]_1 \right]_{3/2} \right]_{1/2}^{\text{singlet-2}} \\ \left[[\bar{Q}Q]_1 \left[P [qq]_1 \right]_{1/2} \right]_{1/2}^{\text{doublet-1}} \\ \left[[\bar{Q}Q]_1 \left[P [qq]_1 \right]_{3/2} \right]_{1/2}^{\text{doublet-2}} \\ \left[[\bar{Q}Q]_1 \left[P [qq]_1 \right]_{1/2} \right]_{3/2}^{\text{triplet-1}} \\ \left[[\bar{Q}Q]_1 \left[P [qq]_1 \right]_{3/2} \right]_{1/2}^{\text{triplet-2}} \end{pmatrix}, \quad (3.4.19)$$

$$U_{1/2^+} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{18} & \frac{2\sqrt{6}}{9} & \frac{\sqrt{6}}{9} & \frac{\sqrt{30}}{9} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2\sqrt{6}}{9} & \frac{5\sqrt{3}}{18} & -\frac{\sqrt{3}}{9} & -\frac{\sqrt{15}}{9} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & -\frac{5}{18} & \frac{2\sqrt{2}}{9} & -\frac{5\sqrt{2}}{9} & \frac{\sqrt{10}}{9} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{9} & \frac{5}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2\sqrt{5}}{9} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{\sqrt{5}}{9} \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{6} & -\frac{2\sqrt{10}}{9} & \frac{\sqrt{5}}{18} & \frac{\sqrt{5}}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}, \quad (3.4.20)$$

$$\psi_{3/2^+}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} \bar{P}\Sigma_Q \left({}^2P_{3/2} \right) \\ \bar{P}\Sigma_Q^* \left({}^4P_{3/2} \right) \\ \bar{P}^*\Sigma_Q \left({}^2P_{3/2} \right) \\ \bar{P}^*\Sigma_Q \left({}^4P_{3/2} \right) \\ \bar{P}^*\Sigma_Q^* \left({}^2P_{3/2} \right) \\ \bar{P}^*\Sigma_Q^* \left({}^4P_{3/2} \right) \\ \bar{P}^*\Sigma_Q^* \left({}^6P_{3/2} \right) \end{pmatrix}, \quad (3.4.21)$$

$$\psi_{3/2^+}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} \left[[\bar{Q}Q]_0 \left[P [qq]_1 \right]_{1/2} \right]_{3/2} \begin{matrix} \text{singlet-3} \\ 3/2 \end{matrix} \\ \left[[\bar{Q}Q]_0 \left[P [qq]_1 \right]_{3/2} \right]_{3/2} \begin{matrix} \text{singlet-4} \\ 3/2 \end{matrix} \\ \left[[\bar{Q}Q]_1 \left[P [qq]_1 \right]_{1/2} \right]_{1/2} \begin{matrix} \text{doublet-1} \\ 3/2 \end{matrix} \\ \left[[\bar{Q}Q]_1 \left[P [qq]_1 \right]_{3/2} \right]_{1/2} \begin{matrix} \text{doublet-2} \\ 3/2 \end{matrix} \\ \left[[\bar{Q}Q]_1 \left[P [qq]_1 \right]_{1/2} \right]_{3/2} \begin{matrix} \text{triplet-1} \\ 3/2 \end{matrix} \\ \left[[\bar{Q}Q]_1 \left[P [qq]_1 \right]_{1/2} \right]_{3/2} \begin{matrix} \text{triplet-2} \\ 3/2 \end{matrix} \\ \left[[\bar{Q}Q]_1 \left[P [qq]_1 \right]_{3/2} \right]_{3/2} \begin{matrix} \text{triplet-3} \\ 3/2 \end{matrix} \\ \left[[\bar{Q}Q]_1 \left[P [qq]_1 \right]_{3/2} \right]_{5/2} \begin{matrix} \text{triplet-3} \\ 3/2 \end{matrix} \end{pmatrix}, \quad (3.4.22)$$

$$U_{3/2^+} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{9} & \frac{\sqrt{6}}{18} & -\frac{\sqrt{15}}{18} & \frac{2\sqrt{3}}{9} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{15}}{9} & \frac{\sqrt{30}}{18} & \frac{2\sqrt{3}}{9} & \frac{11\sqrt{15}}{90} & -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & \frac{5}{9} & \frac{\sqrt{2}}{18} & \frac{5\sqrt{5}}{18} & \frac{2}{9} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{5}}{9} & \frac{\sqrt{10}}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{11\sqrt{5}}{45} & -\frac{\sqrt{30}}{15} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{9} & -\frac{1}{18} & \frac{\sqrt{10}}{9} & -\frac{\sqrt{2}}{9} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{6} & \frac{5}{9} & \frac{\sqrt{2}}{18} & -\frac{2\sqrt{5}}{9} & \frac{11}{90} & -\frac{\sqrt{6}}{30} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}, \quad (3.4.23)$$

$$\psi_{5/2^+}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} \bar{P}\Sigma_Q^* \left({}^4P_{5/2} \right) \\ \bar{P}^*\Sigma_Q \left({}^4P_{5/2} \right) \\ \bar{P}^*\Sigma_Q^* \left({}^4P_{5/2} \right) \\ \bar{P}^*\Sigma_Q^* \left({}^6P_{5/2} \right) \end{pmatrix}, \quad (3.4.24)$$

$$\psi_{5/2^+}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} \left[\begin{array}{c} [\bar{Q}Q]_0 [P [qq]_1]_{3/2} \\ \left[\begin{array}{c} \text{singlet-5} \\ 5/2 \\ \text{triplet-1} \end{array} \right]_{5/2} \end{array} \right]_{5/2} \\ \left[\begin{array}{c} [\bar{Q}Q]_1 [P [qq]_1]_{1/2} \\ \left[\begin{array}{c} \text{triplet-1} \\ 5/2 \\ \text{triplet-2} \end{array} \right]_{3/2} \end{array} \right]_{5/2} \\ \left[\begin{array}{c} [\bar{Q}Q]_1 [P [qq]_1]_{3/2} \\ \left[\begin{array}{c} \text{triplet-2} \\ 5/2 \\ \text{triplet-3} \end{array} \right]_{3/2} \end{array} \right]_{5/2} \\ \left[\begin{array}{c} [\bar{Q}Q]_1 [P [qq]_1]_{3/2} \\ \left[\begin{array}{c} \text{triplet-3} \\ 5/2 \end{array} \right]_{5/2} \end{array} \right]_{5/2} \end{pmatrix}, \quad (3.4.25)$$

$$U_{5/2^+} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{15}}{15} & \frac{\sqrt{35}}{10} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{\sqrt{105}}{15} \\ \frac{\sqrt{15}}{6} & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{1}{15} & \frac{\sqrt{21}}{30} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{21}}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}, \quad (3.4.26)$$

$$\psi_{7/2^+}^{\text{HM}} = (\bar{P}^* \Sigma_Q^* ({}^6P_{7/2})). \quad (3.4.27)$$

$$\psi_{7/2^+}^{\text{LCS}} = \left[[\bar{Q}Q]_1 [P [qq]_1]_{3/2} \right]_{5/2}^{\text{triplet-3}} \Big|_{7/2}, \quad (3.4.28)$$

$$U_{7/2^+} = 1. \quad (3.4.29)$$

3.4.2 ポテンシャル

次に第 3.3.2 節と同様の有効ラグランジアンから OPEP を導出して議論する。HM 基底と LCS 基底での OPEP はそれぞれ以下のように得られる。

$$V_{1/2^+}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3}C & \frac{\sqrt{6}}{3}T & \frac{\sqrt{6}}{6}C & \frac{\sqrt{30}}{30}T \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6}T & -\frac{\sqrt{3}}{6}C - \frac{\sqrt{3}}{6}T & -\frac{\sqrt{3}}{6}T & -\frac{\sqrt{15}}{6}C + \frac{2\sqrt{15}}{15}T \\ -\frac{\sqrt{3}}{3}C & \frac{\sqrt{6}}{6}T & \frac{2}{3}C & \frac{\sqrt{2}}{3}T & \frac{\sqrt{2}}{6}C & \frac{2\sqrt{10}}{15}T \\ \frac{\sqrt{6}}{3}T & -\frac{\sqrt{3}}{6}C - \frac{\sqrt{3}}{6}T & \frac{\sqrt{2}}{3}T & -\frac{1}{3}C + \frac{2}{3}T & \frac{1}{6}T & \frac{\sqrt{5}}{6}C - \frac{\sqrt{5}}{30}T \\ \frac{\sqrt{6}}{6}C & -\frac{\sqrt{3}}{6}T & \frac{\sqrt{2}}{6}C & \frac{1}{6}T & \frac{5}{6}C & -\frac{7\sqrt{5}}{30}T \\ \frac{\sqrt{30}}{30}T & -\frac{\sqrt{15}}{6}C + \frac{2\sqrt{15}}{15}T & \frac{2\sqrt{10}}{15}T & \frac{\sqrt{5}}{6}C - \frac{\sqrt{5}}{30}T & -\frac{7\sqrt{5}}{30}T & \frac{1}{3}C + \frac{8}{15}T \end{pmatrix} \frac{gg_1}{f_\pi^2}, \quad (3.4.30)$$

$$\begin{aligned} V_{1/2^+}^{\text{LCS}} &= U_{1/2^+}^{-1} V_{1/2^+}^{\text{HM}} U_{1/2^+} \\ &= \begin{pmatrix} C & -\frac{\sqrt{2}}{2}T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}T & -\frac{1}{2}C + T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & -\frac{\sqrt{2}}{2}T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}T & -\frac{1}{2}C + T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & \frac{\sqrt{5}}{10}T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{10}T & -\frac{1}{2}C - \frac{4}{5}T \end{pmatrix} \frac{gg_1}{f_\pi^2}, \quad (3.4.31) \end{aligned}$$

$$V_{3/2^+}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3}C & -\frac{\sqrt{15}}{15}T & \frac{\sqrt{6}}{6}C & -\frac{\sqrt{3}}{30}T & \frac{3\sqrt{2}}{10}T \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{15}}{30}T & -\frac{\sqrt{3}}{6}C + \frac{2\sqrt{3}}{15}T & \frac{\sqrt{30}}{60}T & -\frac{\sqrt{15}}{6}C - \frac{8\sqrt{15}}{75}T & \frac{21\sqrt{10}}{100}T \\ -\frac{\sqrt{3}}{3}C & -\frac{\sqrt{15}}{30}T & \frac{2}{3}C & -\frac{\sqrt{5}}{15}T & \frac{\sqrt{2}}{6}C & -\frac{2}{15}T & -\frac{\sqrt{6}}{10}T \\ -\frac{\sqrt{15}}{15}T & -\frac{\sqrt{3}}{6}C + \frac{2\sqrt{3}}{15}T & -\frac{\sqrt{5}}{15}T & -\frac{1}{3}C - \frac{8}{15}T & -\frac{\sqrt{10}}{60}T & \frac{\sqrt{5}}{6}C + \frac{2\sqrt{5}}{75}T & \frac{7\sqrt{30}}{100}T \\ \frac{\sqrt{6}}{6}C & \frac{\sqrt{30}}{60}T & \frac{\sqrt{2}}{6}C & -\frac{\sqrt{10}}{60}T & \frac{5}{6}C & \frac{7\sqrt{2}}{60}T & -\frac{\sqrt{3}}{5}T \\ -\frac{\sqrt{3}}{30}T & -\frac{\sqrt{15}}{6}C - \frac{8\sqrt{15}}{75}T & -\frac{2}{15}T & \frac{\sqrt{5}}{6}C + \frac{2\sqrt{5}}{75}T & \frac{7\sqrt{2}}{60}T & \frac{1}{3}C - \frac{32}{75}T & -\frac{7\sqrt{6}}{100}T \\ \frac{3\sqrt{2}}{10}T & \frac{21\sqrt{10}}{100}T & -\frac{\sqrt{6}}{10}T & \frac{7\sqrt{30}}{100}T & -\frac{\sqrt{3}}{5}T & -\frac{7\sqrt{6}}{100}T & -\frac{1}{2}C + \frac{14}{25}T \end{pmatrix} \frac{gg_1}{f_\pi^2} \quad (3.4.32)$$

$$V_{3/2^+}^{\text{LCS}} = U_{3/2^+}^{-1} V_{3/2^+}^{\text{HM}} U_{3/2^+} = \begin{pmatrix} C & \frac{\sqrt{5}}{10}T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{10}T & -\frac{1}{2}C - \frac{4}{5}T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & -\frac{\sqrt{2}}{2}T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}T & -\frac{1}{2}C + T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & \frac{\sqrt{5}}{10}T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{10}T & -\frac{1}{2}C - \frac{4}{5}T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}C + \frac{1}{5}T \end{pmatrix} \frac{gg_1}{f_\pi^2}, \quad (3.4.33)$$

$$V_{5/2^+}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{6}C - \frac{\sqrt{3}}{30}T & -\frac{\sqrt{15}}{6}C + \frac{2\sqrt{15}}{75}T & -\frac{3\sqrt{35}}{50}T \\ -\frac{\sqrt{3}}{6}C - \frac{\sqrt{3}}{30}T & -\frac{1}{3}C + \frac{2}{15}T & \frac{\sqrt{5}}{6}C - \frac{\sqrt{5}}{150}T & -\frac{\sqrt{105}}{50}T \\ -\frac{\sqrt{15}}{6}C + \frac{2\sqrt{15}}{75}T & \frac{\sqrt{5}}{6}C - \frac{\sqrt{5}}{150}T & \frac{1}{3}C + \frac{8}{75}T & \frac{\sqrt{21}}{50}T \\ -\frac{3\sqrt{35}}{50}T & -\frac{\sqrt{105}}{50}T & \frac{\sqrt{21}}{50}T & -\frac{1}{2}C - \frac{16}{25}T \end{pmatrix} \frac{gg_1}{f_\pi^2}, \quad (3.4.34)$$

$$V_{5/2^+}^{\text{LCS}} = U_{5/2^+}^{-1} V_{5/2^+}^{\text{HM}} U_{5/2^+} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}C + \frac{1}{5}T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & \frac{\sqrt{5}}{10}T & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{10}T & -\frac{1}{2}C - \frac{4}{5}T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}C + \frac{1}{5}T \end{pmatrix} \frac{gg_1}{f_\pi^2}, \quad (3.4.35)$$

$$V_{7/2^+}^{\text{HM}} = \frac{gg_1}{f_\pi^2} \left[-\frac{1}{2}C + \frac{1}{5}T \right], \quad (3.4.36)$$

$$V_{7/2^+}^{\text{LCS}} = U_{7/2^+}^{-1} V_{7/2^+}^{\text{HM}} U_{7/2^+} = \frac{gg_1}{f_\pi^2} \left[-\frac{1}{2}C + \frac{1}{5}T \right]. \quad (3.4.37)$$

ここで $C_\pi(r)$ は式 (3.3.30) と同じスピン-スピン力ポテンシャル、 $T_\pi(r)$ はテンソル力ポテンシャルで

$$T_\pi(r) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{m_\pi^2 r^2 + 3m_\pi r + 3}{r^3} e^{-m_\pi r} - \frac{\Lambda^2 r^2 + 3\Lambda r + 3}{r^3} e^{-\Lambda r} - \frac{\Lambda^2 - m_\pi^2}{2r} e^{-\Lambda r} - \frac{\Lambda^3 - \Lambda m_\pi^2}{2} e^{-\Lambda r} \right], \quad (3.4.38)$$

と書ける。なお上記のポテンシャルの式の中では添字や引数を省略して C, T としている。図 3.7 はこれらの概形である。テンソル力が深い引力ポケットを持つことが見て取れる。

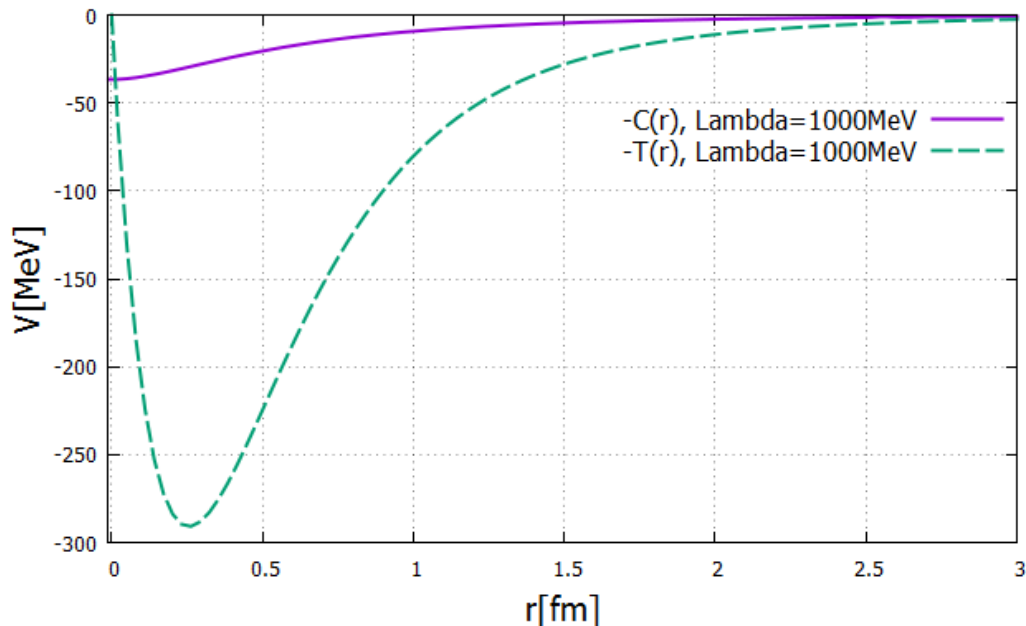


図 3.7 カットオフパラメータ $\Lambda = 1000$ MeV でのスピン-スピン力ポテンシャル $C_\pi(r)$ とテンソル力ポテンシャル $T_\pi(r)$ の概形。引力ポテンシャルとなるように符号を負に取っている。

HM 基底での運動項は式 (3.3.37) の定義を用いると次のように書ける。

$$K_{1/2^+}^{\text{HM}} = \text{diag} \left[K_{\bar{P}\Sigma_Q}^1, K_{\bar{P}\Sigma_Q^*}^1, K_{\bar{P}^*\Sigma_Q}^1, K_{\bar{P}^*\Sigma_Q^*}^1, K_{\bar{P}^*\Sigma_Q^*}^1 \right], \quad (3.4.39)$$

$$K_{3/2^+}^{\text{HM}} = \text{diag} \left[K_{\bar{P}\Sigma_Q}^1, K_{\bar{P}\Sigma_Q^*}^1, K_{\bar{P}^*\Sigma_Q}^1, K_{\bar{P}^*\Sigma_Q^*}^1, K_{\bar{P}^*\Sigma_Q^*}^1, K_{\bar{P}^*\Sigma_Q^*}^1 \right], \quad (3.4.40)$$

$$K_{5/2^+}^{\text{HM}} = \text{diag} \left[K_{\bar{P}\Sigma_Q^*}^1, K_{\bar{P}^*\Sigma_Q}^1, K_{\bar{P}^*\Sigma_Q^*}^1, K_{\bar{P}^*\Sigma_Q^*}^1 \right], \quad (3.4.41)$$

$$K_{7/2^+}^{\text{HM}} = K_{\bar{P}^*\Sigma_Q^*}^1. \quad (3.4.42)$$

LCS 基底への変換は S 波と同様に

$$K_{JP}^{\text{LCS}} = U_{JP}^{-1} K_{JP}^{\text{HM}} U_{JP}, \quad (3.4.43)$$

と変換する。ヘビークォーク極限では LCS 基底の運動項も対角化されているが、有限質量では非対角成分があることも S 波と同様である。

3.4.3 計算結果

第 3.3.3 節の質量パラメータ μ を用いて $\mu = 1 - 100$ GeV の範囲でシュレディンガー方程式を解く。S 波の計算ではテンソル力が無いことからカットオフパラメータを大きめに $\Lambda = 1000, 1500$ MeV と取ったが、P 波ではテンソル力が含まれるので $\Lambda = 800, 900, 1000$ MeV として計算する。図 3.8- 3.12 は各ライトクラウドスピンの構造ごとに得られた固有エネルギーである。また表 3.7 -3.11 はいくつかの μ の値を取った時の多重項の成分比である。この比は束縛

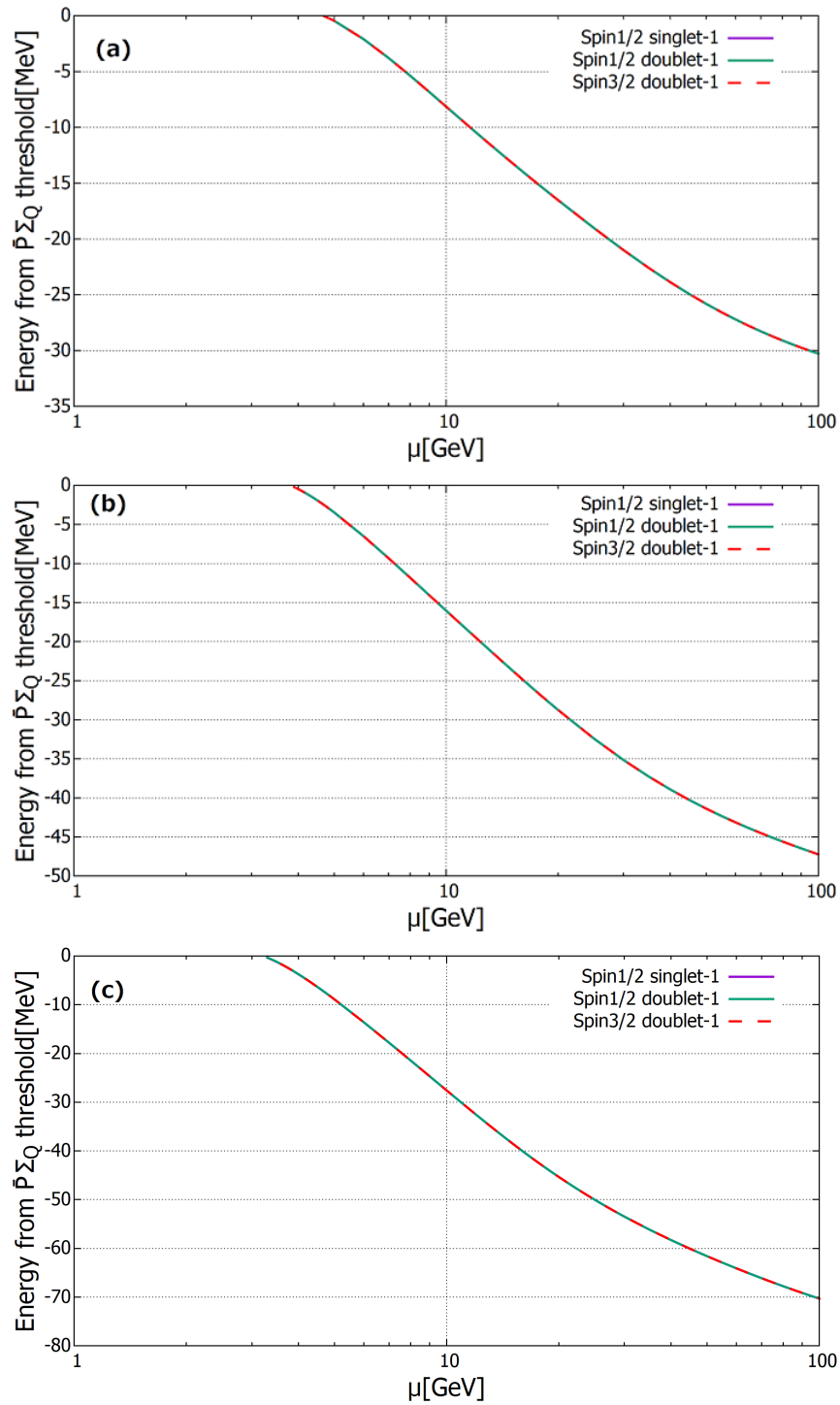


図 3.8 $g = +0.59$ の時の (s-1) と (d-1) のエネルギー。これらはライトクラウドスピン $\left[P [q [qq]_1]_{1/2} \right]_{1/2}$ を持つ。カットオフパラメータはそれぞれ (a) 800 MeV, (b) 900 MeV and (c) 1000 MeV である。エネルギーは $\bar{P}\Sigma_Q$ のしきい値から測っている。各ラベルは波動関数の最も主要な成分から定義されている。

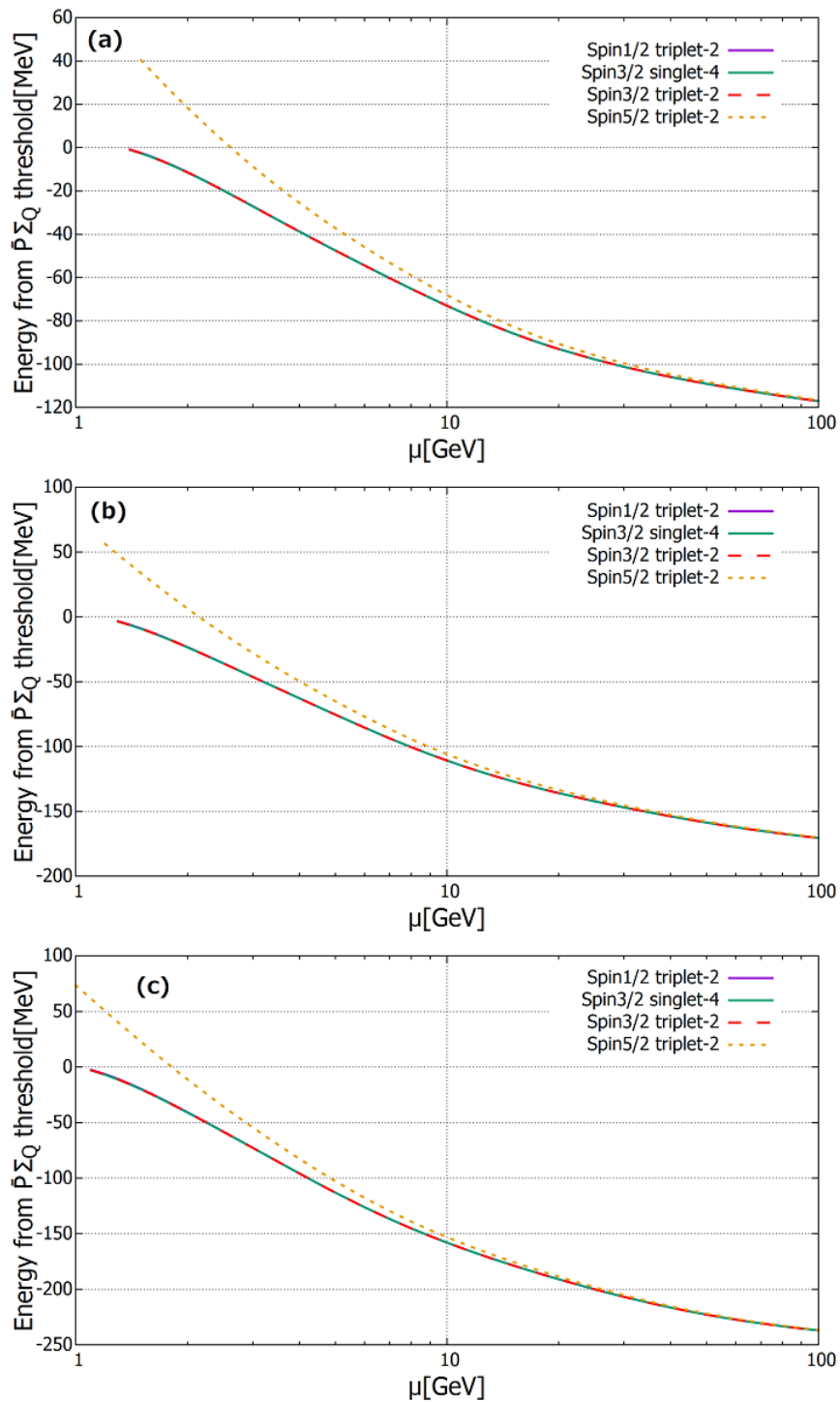


図 3.9 $g = +0.59$ の時の (s-4) と (t-2) のエネルギー。これらはライトクラウドスピン $\left[P [q [qq]_1]_{3/2} \right]_{3/2}$ を持つ。カットオフパラメータはそれぞれ (a) 800 MeV, (b) 900 MeV and (c) 1000 MeV である。エネルギーは $\bar{P}\Sigma_Q$ のしきい値から測っている。各レベルは波動関数の最も主要な成分から定義されている。

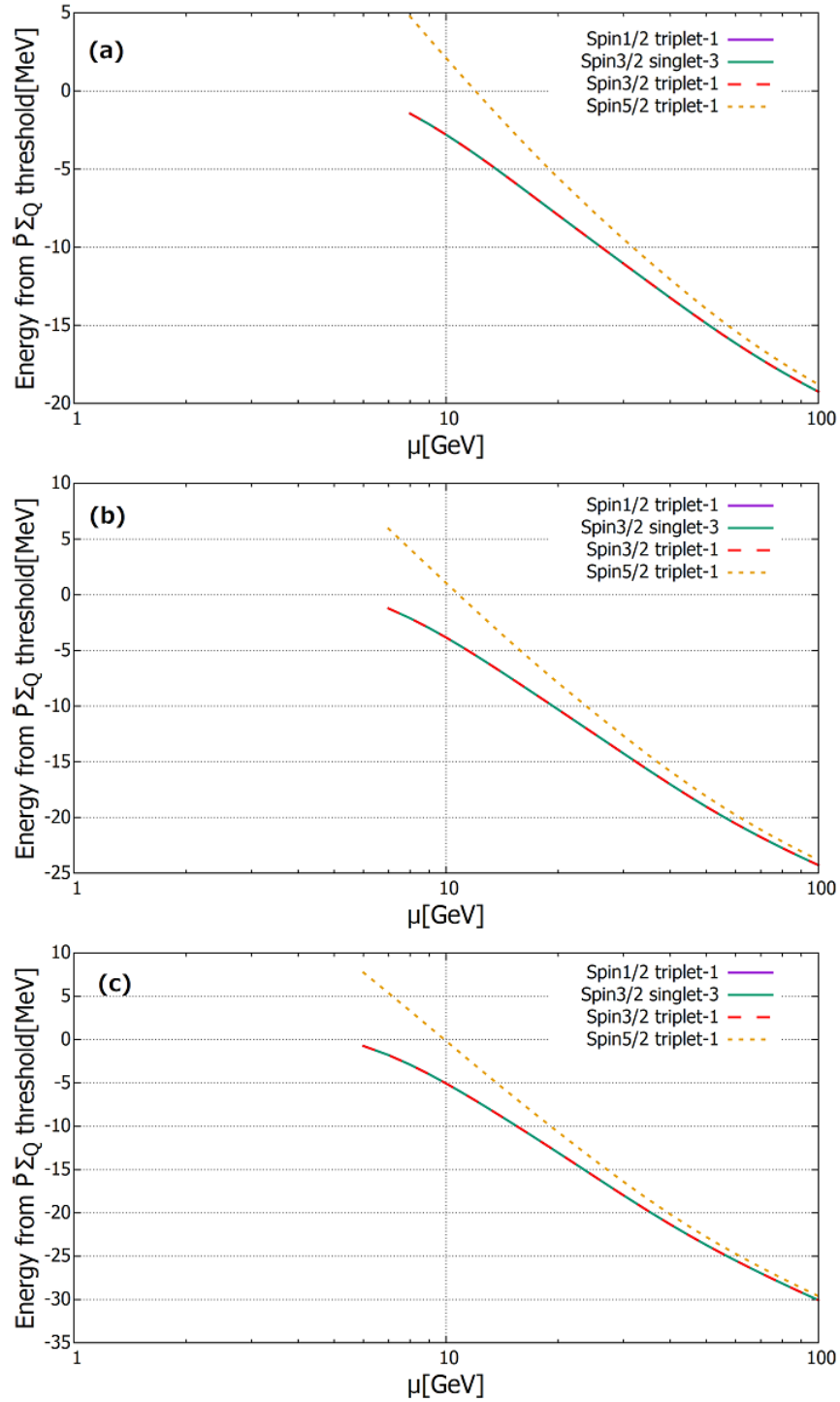


図 3.10 $g = -0.59$ の時の (s-3) と (t-1) のエネルギー。これらはライトクラウドスピン $\left[P [q [qq]_1]_{1/2} \right]_{3/2}$ を持つ。カットオフパラメータはそれぞれ (a) 800 MeV, (b) 900 MeV and (c) 1000 MeV である。エネルギーは $\bar{P}\Sigma_Q$ のしきい値から測っている。各ラベルは波動関数の最も主要な成分から定義されている。

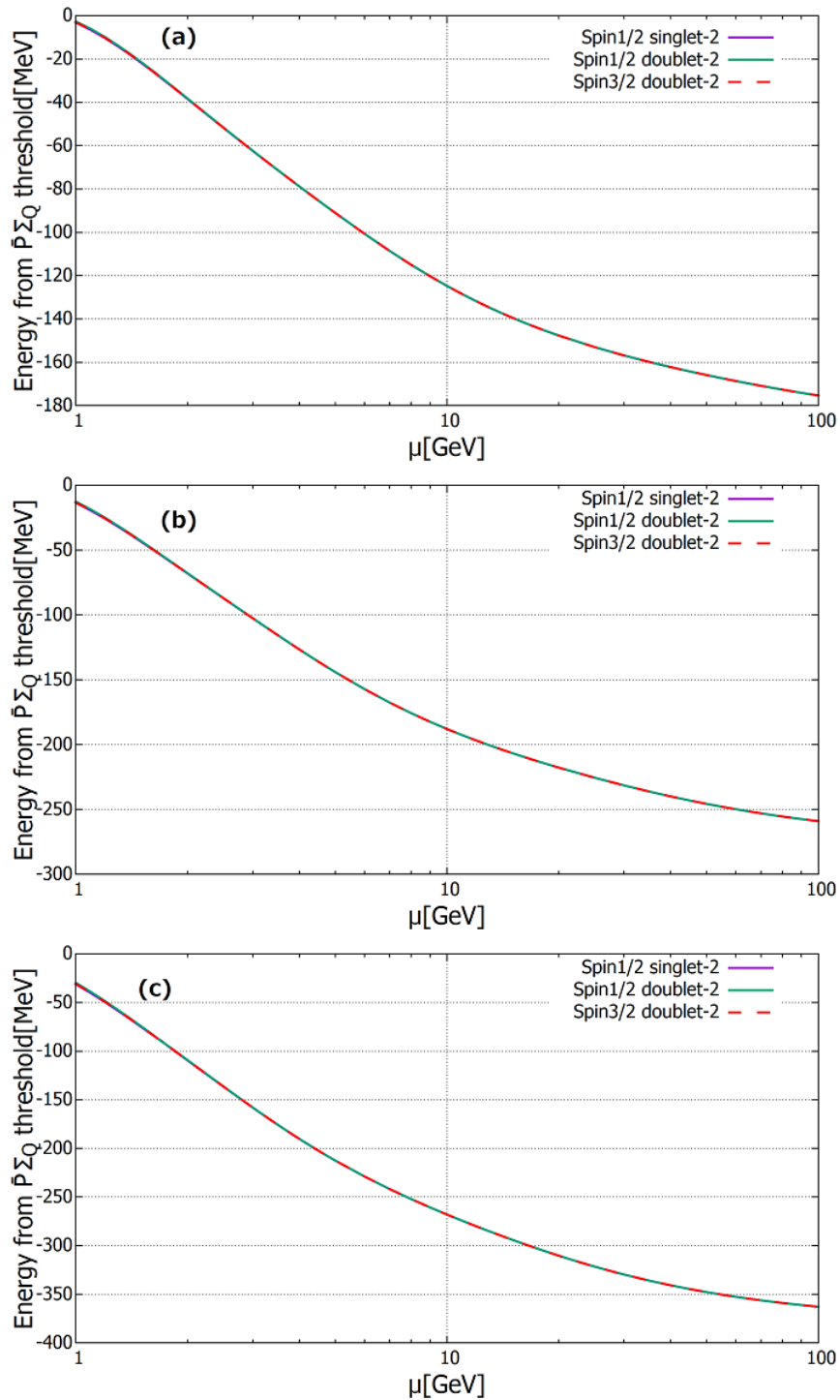


図 3.11 $g = -0.59$ の時の (s-2) と (d-2) のエネルギー。これらはライトクラウドスピン $\left[P [q [qq]_{1/2}]_{3/2} \right]_{1/2}$ を持つ。カットオフパラメータはそれぞれ (a) 800 MeV, (b) 900 MeV and (c) 1000 MeV である。エネルギーは $\bar{P}\Sigma_Q$ のしきい値から測っている。各レベルは波動関数の最も主要な成分から定義されている。

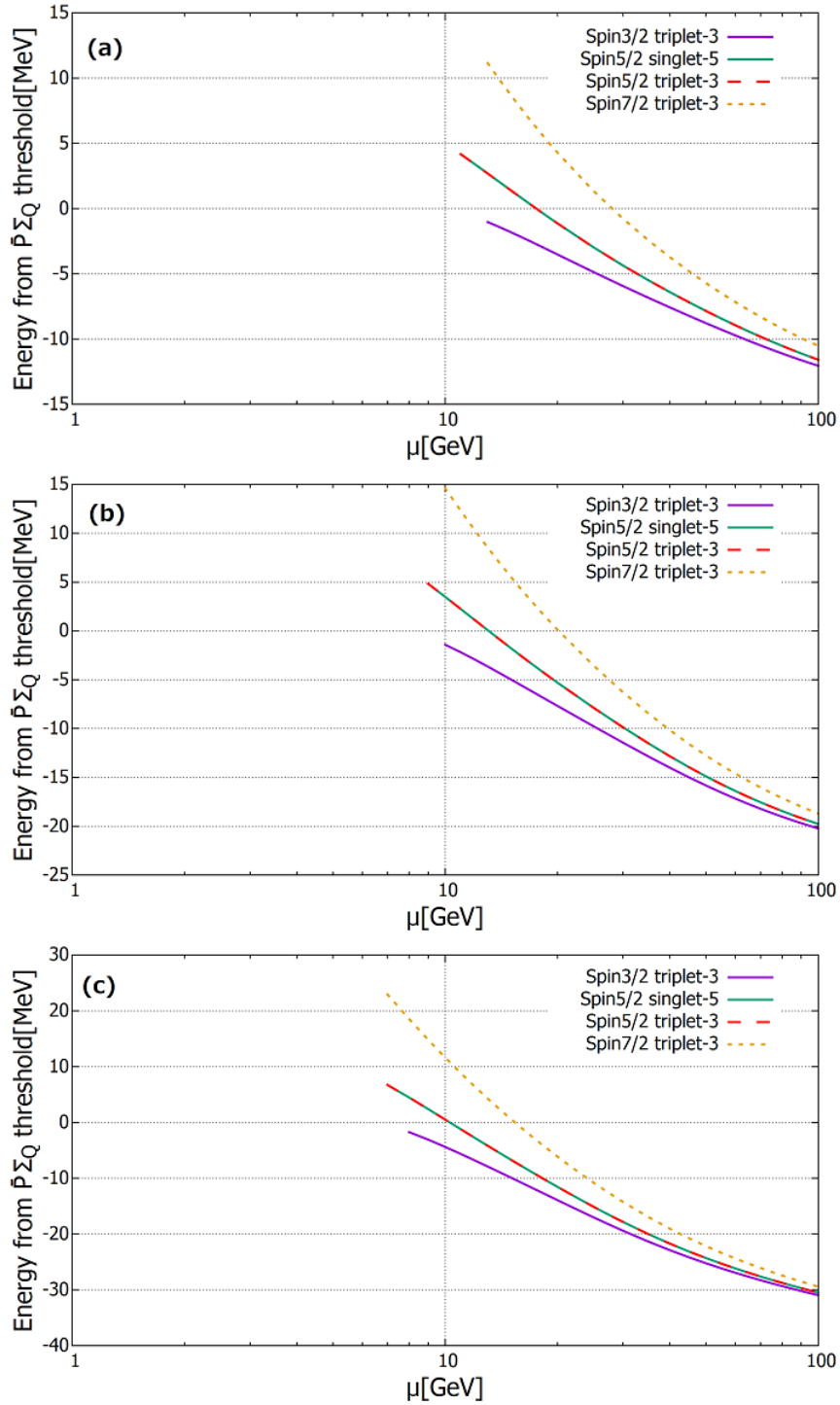


図 3.12 $g = -0.59$ の時の (s-5) と (t-3) のエネルギー。これらはライトクラウドスピン $\left[P [q [qq]_1]_{3/2} \right]_{5/2}$ を持つ。カットオフパラメータはそれぞれ (a) 800 MeV, (b) 900 MeV and (c) 1000 MeV である。エネルギーは $\bar{P}\Sigma_Q$ のしきい値から測っている。各ラベルは波動関数の最も主要な成分から定義されている。

表 3.7 $\Lambda = 900$ MeV の時の図 3.8 における singlet-1 と doublet-1 の波動関数の成分比。"-" は束縛状態が得られなかったことを意味する。

μ [GeV]	Spin1/2 singlet-1						Spin1/2 doublet-1					
	s-1	s-2	d-1	d-2	t-1	t-2	s-1	s-2	d-1	d-2	t-1	t-2
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	75.1	24.3	0.5	0.1	0.0	0.0	0.5	0.1	75.1	24.3	0.0	0.0
5	75.4	24.4	0.2	0.0	0.0	0.0	0.2	0.0	75.4	24.4	0.0	0.0
10	75.9	24.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	75.9	24.1	0.0	0.0
100	76.0	24.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	76.0	24.0	0.0	0.0
μ [GeV]	Spin3/2 doublet-1											
	s-1	s-2	d-1	d-2	t-1	t-2	t-3					
1	-	-	-	-	-	-	-					
2	-	-	-	-	-	-	-					
3	-	-	-	-	-	-	-					
4	0.0	0.0	74.9	25.1	0.0	0.0	0.0					
5	0.0	0.0	75.5	24.5	0.0	0.0	0.0					
10	0.0	0.0	76.0	24.0	0.0	0.0	0.0					
100	0.0	0.0	76.0	24.0	0.0	0.0	0.0					

状態の波動関数より

$$\frac{\int dr |\psi_i|^2}{\sum_i \int dr |\psi_i|^2}, \quad (3.4.44)$$

と定義している。添字 i は波動関数の成分を意味する。図 3.8- 3.12 の束縛解のラベルは波動関数の最も主要な成分の名前で付けている。例えば表 3.7 のスピン 1/2 一重項は式 (3.4.8) で定義された一重項 (s-1) がメインである。したがって図 3.8 でのこの束縛状態のラベルは "Spin1/2 singlet-1" と付けられている。

$g = +0.59$ の場合、ライトクラウドが $\left[P [q [qq]_1]_{1/2} \right]_{1/2}$ と $\left[P [q [qq]_1]_{3/2} \right]_{3/2}$ である多重項が引力ポテンシャルを持つ。図 3.8 はライトクラウド $\left[P [q [qq]_1]_{1/2} \right]_{1/2}$ のエネルギーで式 (3.4.8) の $J^P = 1/2^+$ 一重項と式 (3.4.13) の $J^P = (1/2^+, 3/2^+)$ 二重項に対応する。これらのエネルギーは $\bar{P}\Sigma_Q$ のしきい値から測られており μ の全範囲でほぼ縮退している。図 3.9 はライトクラウド $\left[P [q [qq]_1]_{3/2} \right]_{3/2}$ のエネルギーで式 (3.4.11) の $J^P = 3/2^+$ 一重項と式 (3.4.16) の $J^P = (1/2^+, 3/2^+, 5/2^+)$ 三重項に対応する。スピン 1/2 と 3/2 の状態は最も小さいしきい値が $\bar{P}\Sigma_Q$ だがスピン 5/2 状態は $\bar{P}\Sigma_Q^*$ である。そのため、スピン 5/2 状態は束縛状態であってもエネルギーが正の値をとっている。

$g = -0.59$ の場合、 $\left[P [q [qq]_1]_{3/2} \right]_{3/2}$, $\left[P [q [qq]_1]_{3/2} \right]_{1/2}$, $\left[P [q [qq]_1]_{3/2} \right]_{5/2}$ の 3 種類のライトクラウドスピン構造が引力になる。図 3.10 はライトクラウド $\left[P [q [qq]_1]_{1/2} \right]_{3/2}$ のエネルギーで式 (3.4.10) の $J^P = 3/2^+$ 一重項と式 (3.4.15) の $J^P = (1/2^+, 3/2^+, 5/2^+)$ 三重項に対応する。

表 3.8 $\Lambda = 900 \text{ MeV}$ の時の図 3.9 における singlet-4 と triplet-2 の波動関数の成分比。"-”は束縛状態が得られなかったことを意味する。

$\mu[\text{GeV}]$	Spin1/2 triplet-2						Spin3/2 singlet-4						
	s-1	s-2	d-1	d-2	t-1	t-2	s-3	s-4	d-1	d-2	t-1	t-2	t-3
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	0.0	0.0	0.0	0.0	4.8	95.2	4.7	94.0	0.0	0.0	0.0	1.3	0.0
3	0.0	0.0	0.0	0.0	4.8	95.2	4.8	95.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	0.0	0.0	4.8	95.2	4.8	95.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	0.0	0.0	0.0	0.0	4.8	95.2	4.8	95.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
10	0.0	0.0	0.0	0.0	4.8	95.2	4.8	95.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
100	0.0	0.0	0.0	0.0	4.8	95.2	4.9	95.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\mu[\text{GeV}]$	Spin3/2 triplet-2							Spin5/2 triplet-2					
	s-3	s-4	d-1	d-2	t-1	t-2	t-3	s-5	t-1	t-2	t-3		
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
2	0.0	1.3	0.0	0.0	4.7	94.0	0.0	0.0	4.7	95.3	0.0		
3	0.0	0.0	0.0	0.0	4.8	95.2	0.0	0.0	4.8	95.2	0.0		
4	0.0	0.0	0.0	0.0	4.8	95.2	0.0	0.0	4.8	95.2	0.0		
5	0.0	0.0	0.0	0.0	4.8	95.2	0.0	0.0	4.8	95.2	0.0		
10	0.0	0.0	0.0	0.0	4.8	95.2	0.0	0.0	4.8	95.2	0.0		
100	0.0	0.0	0.0	0.0	4.8	95.2	0.0	0.0	4.8	95.2	0.0		

表 3.9 $\Lambda = 900 \text{ MeV}$ の時の図 3.10 における singlet-3 と triplet-1 の波動関数の成分比。"-”は束縛状態が得られなかったことを意味する。

$\mu[\text{GeV}]$	Spin1/2 triplet-1						Spin3/2 singlet-3						
	s-1	s-2	d-1	d-2	t-1	t-2	s-3	s-4	d-1	d-2	t-1	t-2	t-3
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	0.0	0.0	0.0	0.0	95.5	4.5	95.4	4.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
100	0.0	0.0	0.0	0.0	95.1	4.9	95.1	4.9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\mu[\text{GeV}]$	Spin3/2 triplet-1							Spin5/2 triplet-1					
	s-3	s-4	d-1	d-2	t-1	t-2	t-3	s-5	t-1	t-2	t-3		
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
10	0.0	0.0	0.0	0.0	95.4	4.6	0.0	95.3	4.7	0.0			
100	0.0	0.0	0.0	0.0	95.2	4.8	0.0	95.3	4.7	0.0			

表 3.10 $\Lambda = 900$ MeV の時の図 3.11 における singlet-2 と doublet-2 の波動関数の成分比。"- " は束縛状態が得られなかったことを意味する。

μ [GeV]	Spin1/2 singlet-2						Spin1/2 doublet-2					
	s-1	s-2	d-1	d-2	t-1	t-2	s-1	s-2	d-1	d-2	t-1	t-2
1	23.0	73.0	1.2	2.8	0.0	0.0	1.2	2.8	23.0	73.0	0.0	0.0
2	23.2	74.8	0.6	1.4	0.0	0.0	0.6	1.4	23.2	74.8	0.0	0.0
3	24.0	75.1	0.1	0.8	0.0	0.0	0.1	0.8	23.9	75.1	0.0	0.0
4	23.9	75.7	0.0	0.4	0.0	0.0	0.0	0.4	23.9	75.7	0.0	0.0
5	24.0	75.9	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.1	24.0	75.9	0.0	0.0
10	24.1	75.9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	24.1	75.9	0.0	0.0
100	24.1	75.9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	24.1	75.9	0.0	0.0

μ [GeV]	Spin3/2 doublet-2						
	s-1	s-2	d-1	d-2	t-1	t-2	t-3
1	0.0	0.0	24.3	75.7	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.0	24.1	75.9	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	24.0	76.0	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	23.9	76.1	0.0	0.0	0.0
5	0.0	0.0	23.9	76.1	0.0	0.0	0.0
10	0.0	0.0	24.1	75.9	0.0	0.0	0.0
100	0.0	0.0	24.1	75.9	0.0	0.0	0.0

表 3.11 $\Lambda = 900$ MeV の時の図 3.12 における singlet-5 と triplet-3 の波動関数の成分比。"- " は束縛状態が得られなかったことを意味する。

μ [GeV]	Spin3/2 triplet-3							Spin5/2 singlet-5			
	s-3	s-4	d-1	d-2	t-1	t-2	t-3	s-5	t-1	t-2	t-3
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	100	99.8	0.0	0.0	0.2
100	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	100	100	0.0	0.0	0.0

μ [GeV]	Spin5/2 triplet-3				Spin7/2 triplet-3
	s-5	t-1	t-2	t-3	t-3
1	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	-
4	-	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-
10	0.0	0.0	0.0	100	100
100	0.0	0.0	0.0	100	100

最小のしきい値はスピン $1/2$ と $3/2$ が $\bar{P}\Sigma_Q$ 、スピン $5/2$ は $\bar{P}\Sigma_Q^*$ である。 $\left[P[q[qq]_1]_{3/2} \right]_{1/2}$ のエネルギーは図 3.11 で、式 (3.4.9) の $J^P = 1/2^+$ 一重項と式 (3.4.14) の $J^P = (1/2^+, 3/2^+)$ 二重項に対応する。最後に図 3.12 がライトクラウド $\left[P[q[qq]_1]_{3/2} \right]_{5/2}$ のエネルギーで、式 (3.4.12) の $J^P = 5/2^+$ 一重項と式 (3.4.17) の $J^P = (3/2^+, 5/2^+, 7/2^+)$ 三重項に対応する。スピン $7/2$ 状態の最小のしきい値は $\bar{P}^*\Sigma_Q^*$ である。 $\mu = 100$ GeV では $\bar{P}\Sigma_Q$ 、 $\bar{P}\Sigma_Q^*$ 、 $\bar{P}^*\Sigma_Q^*$ のしきい値はほぼ縮退しているが、 $\mu = 1$ GeV では $\bar{P}\Sigma_Q$ と $\bar{P}\Sigma_Q^*$ の差は 73.774 MeV、 $\bar{P}\Sigma_Q$ と $\bar{P}^*\Sigma_Q^*$ の差は 234.63 MeV ある。

3.4.4 議論

軌道角運動量 P 波の $\bar{P}^{(*)}\Sigma_Q^{(*)}$ 分子状態には 10 種類の HQS 多重項があり、OPEP のもとでシュレディンガー方程式を解いてそれぞれのエネルギーの振る舞いを見た。S 波の場合と同様にその振る舞いはライトクラウドスピンの構造によって分類される。

S 波の場合と異なるのは LCS 基底でのポテンシャルは完全には対角化されず、ブロック対角になっていることである。それぞれのブロックは多重項の種類ごとに分かれている。例えば式 (3.4.31) の $J^P = 1/2^+$ のポテンシャルは左上のブロックから順に、式 (3.4.19) の波動関数成分の一重項、二重項、三重項となっている。同じブロック行列内の 2 成分を見るとライトクラウド全体の角運動量は同じだが、内部のスピン構造が異なる。HQSS の観点から意味があるのはライトクラウド全体のみなので、その内部構造が違っていても区別されずにそれらの成分が混ざり合う。ブロックの非対角成分はテンソル力であることから、テンソル力はスピン構造が異なる成分同士を結合させる効果があることが分かる。これは重陽子において、テンソル力により S 波成分と D 波成分が混合していることに類似する。実際に、表 3.7 を見ると singlet-1 と singlet-2 はどの μ の値でも混ざっている。

一方、HQS 一重項と二重項、一重項と三重項のような、異なる多重項同士の混合は μ が小さいときにしか起こっていない。このように異なる多重項が混ざっているのは S 波の場合と同様に、運動項での有限質量による HQSS の破れの効果であるが、混ざり具合が小さいことからこの効果は小さいと言える。

ライトクラウドスピンが同じ構造ならば一重項と二重項 (または三重項) がヘビークォーク極限で縮退するが、ヘビークォークスピンの構造によって崩壊先が異なるので区別可能であることは S 波の場合と同じである。よってクォーコニウムの崩壊分岐比が実験から分かればそのスピン構造を類推でき、またスピン 0 よりもスピン 1 のクォーコニウムへの崩壊がメインならばヘビークォークスピンパートナーの粒子が存在する可能性を指摘できる。

3.5 まとめ

ヘビメソン $\bar{P}^{(*)} \sim \bar{Q}q$ とヘビーバリオン $\Sigma_Q^{(*)} \sim Qqq$ の分子状態としてのペンタクォークに HQSS を適用した際に現れる HQS 多重項の構造を解析した。一般には複数のヘビークォークが存在する系ではヘビークォーク間の相対運動によって対称性が破れている。本研究では 2 つのヘビークォークが同じ速度でラベルされるという仮定をおいた LCS 基底を定義して HQSS に基づく議論を行った。その結果、軌道角運動量 S 波の場合は 4 種類の HQS 多重項が、P 波の場合は 10 種類の HQS 多重項が存在することが分かった。

これらの内どの多重項が束縛状態を持ちうるかはモデルの詳細に依存する。ここではシンプルなポテンシャルモデルとして OPEP を用い、HM 基底では多くの非対角成分が存在する結合チャンネル問題であったが、LCS 基底ではポテンシャル行列が自動的に (ブロック) 対角化されチャンネルの結合が単純化された。各対角成分は HQS 多重項の種類によって分かれており、物理的な固有状態が分かりやすくなっている。HM 基底と LCS 基底はユニタリ変換でつながっているため、どちらの基底でシュレディンガー方程式を解いても得られる固有値、固有状態は同じものである。LCS 基底への変換は、得られる固有状態が物理的には HQS 多重項で分類されることをあらわに示しており、対称性に基づいた理解が容易になることが利点である。

負パリティの解析では最も単純な軌道角運動量 S 波しか取り入れていなかった。しかし P 波の解析ではテンソル力がある場合ポテンシャルは完全な対角化はされていないブロック行列となり、異なるライトクラウドスピン構造を混ぜる効果があることが分かった。そもそも S 波と D 波の混合によるテンソル力が強い引力を生むことが知られている。よって S-D 混合を取り入れた再解析を行うべきである。

しかしながら本研究、そして S-D 混合を考慮するだけでは実験で見つかった P_c ペンタクォークの定量的な解析を行うことは難しい。我々は相互作用として OPEP のみを用いたが、他の中間子の交換相互作用や、さらに近距離の相互作用を考慮していない。また数値計算ではシュレディンガー方程式を解いて束縛状態の解のみを調べているが、発見された P_c ペンタクォークのいくつかはきい値が最小の $\bar{D}\Sigma_c$ より大きな質量を持つ。そのためこれらのペンタクォークにアプローチするには共鳴状態の解を調べる必要がある。共鳴解の解析手法として例えば複素スケーリング法 [79] がある。ヘビークォークのスピンをフリップさせる相互作用を導入しない限りは LCS 基底では HQSS が保たれるので、より詳細なポテンシャルを導入したり共鳴状態を調べることは今後の課題である。

第 4 章

テトラクォークの HQS 多重項構造

第 3 章ではヘビーマesonとヘビーバリオンの分子状態としてのペンタクォーク $\sim \bar{Q}Qqqq$ に HQSS を適用するために LCS 基底を定義し、HQS 多重項構造を調べた。この手法はペンタクォーク以外の系でも適用できる。この章ではヘビーマesonと反ヘビーマesonの分子状態としてのテトラクォーク $\sim \bar{Q}Q\bar{q}q$ に HQSS を適用する。このようなテトラクォークは 2003 年に Belle 実験で発見された $X(3872)$ [3] をはじめとした X, Y, Z テトラクォークがある。これらの多くはチャームクォークを含んでいるが、ボトムクォークを含んだ Z_b テトラクォークも発見されている [80]。 X, Y, Z テトラクォークに関する研究は非常に盛んに行われており、テトラクォークのこれまでの研究がまとめられたレビュー論文も複数出版されている [5, 11–15]。

本章では、第 3 章で考えていたヘビーバリオン内のスピン 1 のライトダイクォークをスピン 1/2 の反ライトクォークに置き換えてスピン構造を調べる。なおここでも HM 基底から LCS 基底への変換を行い、HQS 多重項構造を調べて結合チャンネル問題の OPEP がブロック対角化されることを見るが、シュレディンガー方程式を数値的に解いて束縛エネルギーを得ることまではしない。

4.1 HQS 多重項構造

まず $J \leq 3$ で取りうる J^{PC} の組を表 4.1 に示す。HM 基底における軌道角運動量 S 波から G 波までのそれぞれの状態のスピン構造は以下の通りである。

$$P\bar{P} (^1S_0) = \left[S \left[[Q\bar{q}]_0 [Qq]_0 \right]_0 \right] = 0, \quad (4.1.1)$$

$$P\bar{P}^* (^3S_1) = \left[S \left[[Q\bar{q}]_0 [Qq]_{11} \right]_1 \right] = 1, \quad (4.1.2)$$

$$P^*\bar{P} (^3S_1) = \left[S \left[[Q\bar{q}]_1 [Qq]_{01} \right]_1 \right] = 1, \quad (4.1.3)$$

$$P^*\bar{P}^* (^1S_0) = \left[S \left[[Q\bar{q}]_1 [Qq]_{10} \right]_0 \right] = 0, \quad (4.1.4)$$

$$P^*\bar{P}^* (^3S_1) = \left[S \left[[Q\bar{q}]_1 [Qq]_{11} \right]_1 \right] = 1, \quad (4.1.5)$$

$$P^*\bar{P}^* (^5S_2) = \left[S \left[[Q\bar{q}]_1 [Qq]_{12} \right]_2 \right] = 2, \quad (4.1.6)$$

表 4.1 $P^{(*)}\bar{P}^{(*)}(2S+1L_J)$ が取りうる J^{PC} の一覧。 S は $P^{(*)}$ と $\bar{P}^{(*)}$ の合成スピン、 L は軌道角運動量、 J は全角運動量。 ”Exoticness” に \surd マークが付いている量子数は純粋なクォークonium $\bar{Q}Q$ で実現できない量子数。 実現できる場合は $\bar{Q}Q$ 状態の $2S+1L_J$ が書かれている。

J^{PC}	Components	Exoticness	
		$I = 0$	$I = 1$
0^{+-}	—	\surd	\surd
0^{++}	$P\bar{P}(^1S_0), P^*\bar{P}^*(^1S_0, ^5D_0)$	3P_0	\surd
0^{--}	$\frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* + P^*\bar{P})(^3P_0)$	\surd	\surd
0^{-+}	$\frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* - P^*\bar{P})(^3P_0), P^*\bar{P}^*(^3P_0)$	1S_0	\surd
1^{+-}	$\frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* - P^*\bar{P})(^3S_1, ^3D_1), P^*\bar{P}^*(^3S_1, ^3D_1)$	1P_1	\surd
1^{++}	$\frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* + P^*\bar{P})(^3S_1, ^3D_1), P^*\bar{P}^*(^5D_1)$	3P_1	\surd
1^{--}	$P\bar{P}(^1P_1), \frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* + P^*\bar{P})(^3P_1), P^*\bar{P}^*(^1P_1, ^5P_1, ^5F_1)$	$^3S_1, ^3D_1$	\surd
1^{-+}	$\frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* - P^*\bar{P})(^3P_1), P^*\bar{P}^*(^3P_1)$	\surd	\surd
2^{+-}	$\frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* - P^*\bar{P})(^3D_2), P^*\bar{P}^*(^3D_2)$	\surd	\surd
2^{++}	$P\bar{P}(^1D_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* + P^*\bar{P})(^3D_2), P^*\bar{P}^*(^5S_2, ^1D_2, ^5D_2, ^5G_2)$	$^3P_2, ^3F_2$	\surd
2^{--}	$\frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* + P^*\bar{P})(^3P_2, ^3F_2), P^*\bar{P}^*(^5P_2, ^5F_2)$	3D_2	\surd
2^{-+}	$\frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* - P^*\bar{P})(^3P_2, ^3F_2), P^*\bar{P}^*(^3P_2, ^3F_2)$	1D_2	\surd
3^{+-}	$\frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* - P^*\bar{P})(^3D_3, ^3G_3), P^*\bar{P}^*(^3D_3, ^3G_3)$	1F_3	\surd
3^{++}	$\frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* + P^*\bar{P})(^3D_3, ^3G_3), P^*\bar{P}^*(^5D_3, ^5G_3)$	3F_3	\surd
3^{--}	$P\bar{P}(^1F_3), \frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* + P^*\bar{P})(^3F_3), P^*\bar{P}^*(^5P_3, ^1F_3, ^5F_3, ^5H_3)$	$^3D_3, ^3G_3$	\surd
3^{-+}	$\frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* - P^*\bar{P})(^3F_3), P^*\bar{P}^*(^3F_3)$	\surd	\surd

$$P\bar{P}(^1P_1) = \left[P \left[[Q\bar{q}]_0 \left[\bar{Q}q \right]_0 \right]_0 \right] = 1, \quad (4.1.7)$$

$$P\bar{P}^*(^3P_{0,1,2}) = \left[P \left[[Q\bar{q}]_0 \left[\bar{Q}q \right]_1 \right]_1 \right] = 0 \oplus 1 \oplus 2, \quad (4.1.8)$$

$$P^*\bar{P}(^3P_{0,1,2}) = \left[P \left[[Q\bar{q}]_1 \left[\bar{Q}q \right]_0 \right]_1 \right] = 0 \oplus 1 \oplus 2, \quad (4.1.9)$$

$$P^*\bar{P}^*(^1P_1) = \left[P \left[[Q\bar{q}]_1 \left[\bar{Q}q \right]_1 \right]_0 \right] = 1, \quad (4.1.10)$$

$$P^*\bar{P}^*(^3P_{0,1,2}) = \left[P \left[[Q\bar{q}]_1 \left[\bar{Q}q \right]_1 \right]_1 \right] = 0 \oplus 1 \oplus 2, \quad (4.1.11)$$

$$P^*\bar{P}^*(^5P_{1,2,3}) = \left[P \left[[Q\bar{q}]_1 \left[\bar{Q}q \right]_1 \right]_2 \right] = 1 \oplus 2 \oplus 3, \quad (4.1.12)$$

$$P\bar{P}({}^1D_2) = \left[D \left[[Q\bar{q}]_0 [\bar{Q}q]_{0,0} \right] \right] = 2, \quad (4.1.13)$$

$$P\bar{P}^*({}^3D_{1,2,3}) = \left[D \left[[Q\bar{q}]_0 [\bar{Q}q]_{1,1} \right] \right] = 1 \oplus 2 \oplus 3, \quad (4.1.14)$$

$$P^*\bar{P}({}^3D_{1,2,3}) = \left[D \left[[Q\bar{q}]_1 [\bar{Q}q]_{0,1} \right] \right] = 1 \oplus 2 \oplus 3, \quad (4.1.15)$$

$$P^*\bar{P}^*({}^1D_2) = \left[D \left[[Q\bar{q}]_1 [\bar{Q}q]_{1,0} \right] \right] = 2, \quad (4.1.16)$$

$$P^*\bar{P}^*({}^3D_{1,2,3}) = \left[D \left[[Q\bar{q}]_1 [\bar{Q}q]_{1,1} \right] \right] = 1 \oplus 2 \oplus 3, \quad (4.1.17)$$

$$P^*\bar{P}^*({}^5D_{0,1,2,3,4}) = \left[D \left[[Q\bar{q}]_1 [\bar{Q}q]_{1,2} \right] \right] = 0 \oplus 1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 4, \quad (4.1.18)$$

$$P\bar{P}({}^1F_3) = \left[F \left[[Q\bar{q}]_0 [\bar{Q}q]_{0,0} \right] \right] = 3, \quad (4.1.19)$$

$$P\bar{P}^*({}^3F_{2,3,4}) = \left[F \left[[Q\bar{q}]_0 [\bar{Q}q]_{1,1} \right] \right] = 2 \oplus 3 \oplus 4, \quad (4.1.20)$$

$$P^*\bar{P}({}^3F_{2,3,4}) = \left[F \left[[Q\bar{q}]_1 [\bar{Q}q]_{0,1} \right] \right] = 2 \oplus 3 \oplus 4, \quad (4.1.21)$$

$$P^*\bar{P}^*({}^1F_3) = \left[F \left[[Q\bar{q}]_1 [\bar{Q}q]_{1,0} \right] \right] = 3, \quad (4.1.22)$$

$$P^*\bar{P}^*({}^3F_{2,3,4}) = \left[F \left[[Q\bar{q}]_1 [\bar{Q}q]_{1,1} \right] \right] = 2 \oplus 3 \oplus 4, \quad (4.1.23)$$

$$P^*\bar{P}^*({}^5F_{1,2,3,4,5}) = \left[F \left[[Q\bar{q}]_1 [\bar{Q}q]_{1,2} \right] \right] = 1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 4 \oplus 5, \quad (4.1.24)$$

$$P\bar{P}({}^1G_4) = \left[G \left[[Q\bar{q}]_0 [\bar{Q}q]_{0,0} \right] \right] = 4, \quad (4.1.25)$$

$$P\bar{P}^*({}^3G_{3,4,5}) = \left[G \left[[Q\bar{q}]_0 [\bar{Q}q]_{1,1} \right] \right] = 3 \oplus 4 \oplus 5, \quad (4.1.26)$$

$$P^*\bar{P}({}^3G_{3,4,5}) = \left[G \left[[Q\bar{q}]_1 [\bar{Q}q]_{0,1} \right] \right] = 3 \oplus 4 \oplus 5, \quad (4.1.27)$$

$$P^*\bar{P}^*({}^1G_4) = \left[G \left[[Q\bar{q}]_1 [\bar{Q}q]_{1,0} \right] \right] = 4, \quad (4.1.28)$$

$$P^*\bar{P}^*({}^3G_{3,4,5}) = \left[G \left[[Q\bar{q}]_1 [\bar{Q}q]_{1,1} \right] \right] = 3 \oplus 4 \oplus 5, \quad (4.1.29)$$

$$P^*\bar{P}^*({}^5G_{2,3,4,5,6}) = \left[G \left[[Q\bar{q}]_1 [\bar{Q}q]_{1,2} \right] \right] = 2 \oplus 3 \oplus 4 \oplus 5 \oplus 6. \quad (4.1.30)$$

次にペンタクォークの場合と同様に LCS 基底でのスピン構造を考える。

$$\left[[Q\bar{Q}]_0 [S[q\bar{q}]_{0,0}] \right] = 0, \quad (4.1.31)$$

$$\left[[Q\bar{Q}]_0 [S[q\bar{q}]_{1,1}] \right] = 1, \quad (4.1.32)$$

$$\left[[Q\bar{Q}]_1 [S[q\bar{q}]_{0,0}] \right] = 1, \quad (4.1.33)$$

$$\left[[Q\bar{Q}]_1 [S[q\bar{q}]_{1,1}] \right] = 0 \oplus 1 \oplus 2, \quad (4.1.34)$$

$$[[Q\bar{Q}]_0 [P [q\bar{q}]_{0,1}] = 1, \quad (4.1.35)$$

$$[[Q\bar{Q}]_0 [P [q\bar{q}]_{1,0}] = 0, \quad (4.1.36)$$

$$[[Q\bar{Q}]_0 [P [q\bar{q}]_{1,1}] = 1, \quad (4.1.37)$$

$$[[Q\bar{Q}]_0 [P [q\bar{q}]_{1,2}] = 2, \quad (4.1.38)$$

$$[[Q\bar{Q}]_1 [P [q\bar{q}]_{0,1}] = 0 \oplus 1 \oplus 2, \quad (4.1.39)$$

$$[[Q\bar{Q}]_1 [P [q\bar{q}]_{1,0}] = 1, \quad (4.1.40)$$

$$[[Q\bar{Q}]_1 [P [q\bar{q}]_{1,1}] = 0 \oplus 1 \oplus 2, \quad (4.1.41)$$

$$[[Q\bar{Q}]_1 [P [q\bar{q}]_{1,2}] = 1 \oplus 2 \oplus 3, \quad (4.1.42)$$

$$[[Q\bar{Q}]_0 [D [q\bar{q}]_{0,2}] = 2, \quad (4.1.43)$$

$$[[Q\bar{Q}]_0 [D [q\bar{q}]_{1,1}] = 1, \quad (4.1.44)$$

$$[[Q\bar{Q}]_0 [D [q\bar{q}]_{1,2}] = 2, \quad (4.1.45)$$

$$[[Q\bar{Q}]_0 [D [q\bar{q}]_{1,3}] = 3, \quad (4.1.46)$$

$$[[Q\bar{Q}]_1 [D [q\bar{q}]_{0,2}] = 1 \oplus 2 \oplus 3, \quad (4.1.47)$$

$$[[Q\bar{Q}]_1 [D [q\bar{q}]_{1,1}] = 0 \oplus 1 \oplus 2, \quad (4.1.48)$$

$$[[Q\bar{Q}]_1 [D [q\bar{q}]_{1,2}] = 1 \oplus 2 \oplus 3, \quad (4.1.49)$$

$$[[Q\bar{Q}]_1 [D [q\bar{q}]_{1,3}] = 2 \oplus 3 \oplus 4, \quad (4.1.50)$$

$$[[Q\bar{Q}]_0 [F [q\bar{q}]_{0,3}] = 3, \quad (4.1.51)$$

$$[[Q\bar{Q}]_0 [F [q\bar{q}]_{1,2}] = 2, \quad (4.1.52)$$

$$[[Q\bar{Q}]_0 [F [q\bar{q}]_{1,3}] = 3, \quad (4.1.53)$$

$$[[Q\bar{Q}]_0 [F [q\bar{q}]_{1,4}] = 4, \quad (4.1.54)$$

$$[[Q\bar{Q}]_1 [F [q\bar{q}]_{0,3}] = 2 \oplus 3 \oplus 4, \quad (4.1.55)$$

$$[[Q\bar{Q}]_1 [F [q\bar{q}]_{1,2}] = 1 \oplus 2 \oplus 3, \quad (4.1.56)$$

$$[[Q\bar{Q}]_1 [F [q\bar{q}]_{1,3}] = 2 \oplus 3 \oplus 4, \quad (4.1.57)$$

$$[[Q\bar{Q}]_1 [F [q\bar{q}]_{1,4}] = 3 \oplus 4 \oplus 5, \quad (4.1.58)$$

$$[[Q\bar{Q}]_0 [G [q\bar{q}]_{0,4}] = 4, \quad (4.1.59)$$

$$[[Q\bar{Q}]_0 [G [q\bar{q}]_{1,3}] = 3, \quad (4.1.60)$$

$$[[Q\bar{Q}]_0 [G [q\bar{q}]_{1,4}] = 4, \quad (4.1.61)$$

$$[[Q\bar{Q}]_0 [G [q\bar{q}]_{1,5}] = 5, \quad (4.1.62)$$

$$[[Q\bar{Q}]_1 [G [q\bar{q}]_{0,4}] = 3 \oplus 4 \oplus 5, \quad (4.1.63)$$

$$[[Q\bar{Q}]_1 [G [q\bar{q}]_{1,3}] = 2 \oplus 3 \oplus 4, \quad (4.1.64)$$

$$[[Q\bar{Q}]_1 [G [q\bar{q}]_{1,4}] = 3 \oplus 4 \oplus 5, \quad (4.1.65)$$

$$[[Q\bar{Q}]_1 [G [q\bar{q}]_{1,5}] = 4 \oplus 5 \oplus 6. \quad (4.1.66)$$

S波では3つの一重項と1つの三重項、P波では5つの一重項と3つの三重項、それ以上の軌道角運動量では4つの一重項と4つの三重項が得られる。ペンタクォークの場合と違い、ライトクォークのスピン構造に $J_l = 1/2$ が現れないので二重項は存在しない。

4.2 基底変換とポテンシャル

ここでは各 J^{PC} ごとに HM 基底と LCS 基底での波動関数成分とポテンシャル行列、そして基底変換の行列を示す。ポテンシャルはペンタクォークと同様に OPEP を考える。有効ラグランジアンは第 2.2 節 (2.2.17) 式のヘビーメソンと 1 個のパイ中間子との相互作用項を用いる。

4.2.1 $J^{PC} = 0^{++}$

HM 基底での波動関数と OPEP は

$$\psi_{0^{++}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} P\bar{P}(^1S_0) \\ P^*\bar{P}^*(^1S_0) \\ P^*\bar{P}^*(^5D_0) \end{pmatrix}, \quad (4.2.1)$$

$$V_{0^{++},\pi}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3}C_\pi & -\sqrt{6}T_\pi \\ \sqrt{3}C_\pi & 2C_\pi & \sqrt{2}T_\pi \\ -\sqrt{6}T_\pi & \sqrt{2}T_\pi & -C_\pi + 2T_\pi \end{pmatrix} \times \frac{g^2}{3f_\pi^2}(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2). \quad (4.2.2)$$

と与えられる。ここで C_π は式 (3.3.30) のスピン-スピンカポテンシャル、 T_π は式 (3.4.38) のテソルカポテンシャルである。また $\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$ はアイソスピンファクターで $I = 0$ のとき $-3/4$ を、 $I = 1$ のとき $+1/4$ を取る。

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 &= \frac{1}{2} [\tau^2 - \tau_1^2 - \tau_2^2] \\ &= \frac{1}{2} \left[I(I+1) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[I(I+1) - \frac{3}{2} \right]. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

基底変換行列は

$$U_{0^{++}} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.2.4)$$

となる。これを用いて LCS 基底での波動関数とポテンシャル行列が得られる。

$$\begin{aligned} \psi_{0^{++}}^{\text{LCS}} &= U_{0^{++}}^{-1} \psi_{0^{++}}^{\text{HM}} \\ &= \begin{pmatrix} [[Q\bar{Q}]_0 [S [q\bar{q}]_0]_0]_0 \\ [[Q\bar{Q}]_1 [S [q\bar{q}]_1]_1]_{0,1,2} \\ [[Q\bar{Q}]_1 [D [q\bar{q}]_1]_1]_{0,1,2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

$$\begin{aligned} V_{0^{++},\pi}^{\text{LCS}} &= U_{0^{++}}^{-1} V_{0^{++},\pi}^{\text{HM}} U_{0^{++}} \\ &= \begin{pmatrix} 3C_\pi & 0 & 0 \\ 0 & -C_\pi & -2\sqrt{2}T_\pi \\ 0 & -2\sqrt{2}T_\pi & -C_\pi + 2T_\pi \end{pmatrix} \times \frac{g^2}{3f_\pi^2}(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2). \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

以降では他の J^{PC} での波動関数とポテンシャルを列挙するが、ポテンシャルの全体の係数 $g^2/3f_\pi^2$ とアイソスピンファクター $\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$ は全ての場合で共通なので表記を省略する。

4.2.2 $J^{PC} = 0^{--}$

$$\psi_{0^{--}}^{\text{HM}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* + P^*\bar{P})({}^3P_0), \quad (4.2.7)$$

$$\psi_{0^{--}}^{\text{LCS}} = [[Q\bar{Q}]_1 [P[q\bar{q}]_1]_{0,1,2}], \quad (4.2.8)$$

$$V_{0^{--}}^{\text{HM}} = -C_\pi - 2T_\pi, \quad (4.2.9)$$

$$V_{0^{--}}^{\text{LCS}} = -C_\pi - 2T_\pi, \quad (4.2.10)$$

$$U_{0^{--}} = 1. \quad (4.2.11)$$

4.2.3 $J^{PC} = 0^{-+}$

$$\psi_{0^{-+}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* - P^*\bar{P})({}^3P_0) \\ P^*\bar{P}^*({}^3P_0) \end{pmatrix}, \quad (4.2.12)$$

$$\psi_{0^{-+}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} [[Q\bar{Q}]_0 [P[q\bar{q}]_1]_0]_0 \\ [[Q\bar{Q}]_1 [P[q\bar{q}]_0]_1]_{0,1,2} \end{pmatrix}, \quad (4.2.13)$$

$$V_{0^{-+}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} C_\pi + 2T_\pi & -2C_\pi + 2T_\pi \\ -2C_\pi + 2T_\pi & C_\pi + 2T_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.14)$$

$$V_{0^{-+}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} -C_\pi + 4T_\pi & 0 \\ 0 & 3C_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.15)$$

$$U_{0^{-+}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (4.2.16)$$

4.2.4 $J^{PC} = 1^{+-}$

$$\psi_{1^{+-}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* - P^*\bar{P})({}^3S_1) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* - P^*\bar{P})({}^3D_1) \\ P^*\bar{P}^*({}^3S_1) \\ P^*\bar{P}^*({}^3D_1) \end{pmatrix}, \quad (4.2.17)$$

$$\psi_{1^{+-}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} [[Q\bar{Q}]_0 [S [q\bar{q}]_1]_1]_1 \\ [[Q\bar{Q}]_0 [D [q\bar{q}]_1]_1]_1 \\ [[Q\bar{Q}]_1 [S [q\bar{q}]_0]_0]_1 \\ [[Q\bar{Q}]_1 [D [q\bar{q}]_0]_2]_{1,2,3} \end{pmatrix}, \quad (4.2.18)$$

$$V_{1^{+-}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} C_\pi & -\sqrt{2}T_\pi & -2C_\pi & -\sqrt{2}T_\pi \\ -\sqrt{2}T_\pi & C_\pi + T_\pi & -\sqrt{2}T_\pi & -2C_\pi + T_\pi \\ -2C_\pi & -\sqrt{2}T_\pi & C_\pi & -\sqrt{2}T_\pi \\ -\sqrt{2}T_\pi & -2C_\pi + T_\pi & -\sqrt{2}T_\pi & C_\pi + T_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.19)$$

$$V_{1^{+-}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} -C_\pi & -2\sqrt{2}T_\pi & 0 & 0 \\ -2\sqrt{2}T_\pi & -C_\pi + 2T_\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3C_\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3C_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.20)$$

$$U_{1^{+-}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (4.2.21)$$

4.2.5 $J^{PC} = 1^{++}$

$$\psi_{1^{++}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* + P^*\bar{P})({}^3S_1) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* + P^*\bar{P})({}^3D_1) \\ P^*\bar{P}^*({}^5D_1) \end{pmatrix}, \quad (4.2.22)$$

$$\psi_{1^{++}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} [[Q\bar{Q}]_1 [S [q\bar{q}]_1]_1]_{0,1,2} \\ [[Q\bar{Q}]_1 [D [q\bar{q}]_1]_1]_{0,1,2} \\ [[Q\bar{Q}]_1 [D [q\bar{q}]_1]_2]_{1,2,3} \end{pmatrix}, \quad (4.2.23)$$

$$V_{1^{++}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} -C_\pi & \sqrt{2}T_\pi & \sqrt{6}T_\pi \\ \sqrt{2}T_\pi & -C_\pi - T_\pi & \sqrt{3}T_\pi \\ \sqrt{6}T_\pi & \sqrt{3}T_\pi & -C_\pi + T_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.24)$$

$$V_{1^{++}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} -C_\pi & -2\sqrt{2}T_\pi & 0 \\ -2\sqrt{2}T_\pi & -C_\pi + 2T_\pi & 0 \\ 0 & 0 & -C_\pi - 2T_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.25)$$

$$U_{1^{++}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (4.2.26)$$

4.2.6 $J^{PC} = 1^{--}$

$$\psi_{1^{--}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} P\bar{P}(^1P_1) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* + P^*\bar{P})(^3P_1) \\ P^*\bar{P}^*(^1P_1) \\ P^*\bar{P}^*(^5P_1) \\ P^*\bar{P}^*(^5F_1) \end{pmatrix}, \quad (4.2.27)$$

$$\psi_{1^{--}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} [[Q\bar{Q}]_0 [P [q\bar{q}]_0]_1]_1 \\ [[Q\bar{Q}]_1 [P [q\bar{q}]_1]_0]_1 \\ [[Q\bar{Q}]_1 [P [q\bar{q}]_1]_1]_{0,1,2} \\ [[Q\bar{Q}]_1 [P [q\bar{q}]_1]_2]_{1,2,3} \\ [[Q\bar{Q}]_1 [F [q\bar{q}]_1]_2]_{1,2,3} \end{pmatrix}, \quad (4.2.28)$$

$$V_{1^{--}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3}C_\pi & 2\sqrt{\frac{3}{5}}T_\pi & -3\sqrt{\frac{2}{5}}T_\pi \\ 0 & -C_\pi + T_\pi & 0 & 3\sqrt{\frac{3}{5}}T_\pi & 3\sqrt{\frac{2}{5}}T_\pi \\ \sqrt{3}C_\pi & 0 & 2C_\pi & -\frac{2}{\sqrt{5}}T_\pi & \sqrt{\frac{6}{5}}T_\pi \\ 2\sqrt{\frac{3}{5}}T_\pi & 3\sqrt{\frac{2}{5}}T_\pi & -\frac{2}{\sqrt{5}}T_\pi & -C_\pi + \frac{7}{5}T_\pi & -\frac{\sqrt{6}}{5}T_\pi \\ -3\sqrt{\frac{2}{5}}T_\pi & 3\sqrt{\frac{2}{5}}T_\pi & \sqrt{\frac{6}{5}}T_\pi & -\frac{\sqrt{6}}{5}T_\pi & -C_\pi + \frac{8}{5}T_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.29)$$

$$V_{1^{--}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} 3C_\pi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_\pi + 4T_\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_\pi - 2T_\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_\pi + \frac{2}{5}T_\pi & -\frac{6\sqrt{6}}{5}T_\pi \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6\sqrt{6}}{5}T_\pi & -C_\pi + \frac{8}{5}T_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.30)$$

$$U_{1^{--}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{15}}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{15}}{6} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{5}}{6} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{\sqrt{15}}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2.31)$$

4.2.7 $J^{PC} = 1^{+-}$

$$\psi_{1^{+-}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* - P^*\bar{P})(^3P_1) \\ P^*\bar{P}^*(^3P_1) \end{pmatrix}, \quad (4.2.32)$$

$$\psi_{1^{+-}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} [[Q\bar{Q}]_0 [P [q\bar{q}]_1]_1]_1 \\ [[Q\bar{Q}]_1 [P [q\bar{q}]_0]_1]_{0,1,2} \end{pmatrix}, \quad (4.2.33)$$

$$V_{1^{+-}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} C_\pi - T_\pi & -2C_\pi - T_\pi \\ -2C_\pi - T_\pi & C_\pi - T_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.34)$$

$$V_{1^{+-}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} -C_\pi - 2T_\pi & 0 \\ 0 & 3C_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.35)$$

$$U_{1^{+-}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (4.2.36)$$

4.2.8 $J^{PC} = 2^{+-}$

$$\psi_{2^{+-}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* - P^*\bar{P})({}^3D_2) \\ P^*\bar{P}({}^3D_2) \end{pmatrix}, \quad (4.2.37)$$

$$\psi_{2^{+-}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} [[Q\bar{Q}]_0 [D [q\bar{q}]_1]_2]_2 \\ [[Q\bar{Q}]_1 [D [q\bar{q}]_0]_2]_{1,2,3} \end{pmatrix}, \quad (4.2.38)$$

$$V_{2^{+-}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} C_\pi - T_\pi & -2C_\pi - T_\pi \\ -2C_\pi - T_\pi & C_\pi - T_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.39)$$

$$V_{2^{+-}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} -C_\pi - 2T_\pi & 0 \\ 0 & 3C_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.40)$$

$$U_{2^{+-}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (4.2.41)$$

4.2.9 $J^{PC} = 2^{++}$

$$\psi_{2^{++}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} P\bar{P}(^1D_2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* + P^*\bar{P})(^3D_2) \\ P^*\bar{P}^*(^1D_2) \\ P^*\bar{P}^*(^5S_2) \\ P^*\bar{P}^*(^5D_2) \\ P^*\bar{P}^*(^5G_2) \end{pmatrix}, \quad (4.2.42)$$

$$\psi_{2^{++}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} [[Q\bar{Q}]_0 [D [q\bar{q}]_0]_2]_2 \\ [[Q\bar{Q}]_1 [S [q\bar{q}]_1]_1]_{0,1,2} \\ [[Q\bar{Q}]_1 [D [q\bar{q}]_1]_1]_{0,1,2} \\ [[Q\bar{Q}]_1 [D [q\bar{q}]_1]_2]_{1,2,3} \\ [[Q\bar{Q}]_1 [D [q\bar{q}]_1]_3]_{2,3,4} \\ [[Q\bar{Q}]_1 [G [q\bar{q}]_1]_3]_{2,3,4} \end{pmatrix}, \quad (4.2.43)$$

$$V_{2^{++}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3}C_\pi & -\sqrt{\frac{6}{5}}T_\pi & 2\sqrt{\frac{3}{7}}T_\pi & -6\sqrt{\frac{3}{35}}T_\pi \\ 0 & -C_\pi + T_\pi & 0 & -3\sqrt{\frac{2}{5}}T_\pi & \frac{3}{\sqrt{7}}T_\pi & \frac{12}{\sqrt{35}}T_\pi \\ \sqrt{3}C_\pi & 0 & 2C_\pi & \sqrt{\frac{2}{5}}T_\pi & -\frac{2}{\sqrt{7}}T_\pi & \frac{6}{\sqrt{35}}T_\pi \\ -\sqrt{\frac{6}{5}}T_\pi & -3\sqrt{\frac{3}{35}}T_\pi & \sqrt{\frac{2}{5}}T_\pi & -C_\pi & -\sqrt{\frac{14}{5}}T_\pi & 0 \\ 2\sqrt{\frac{3}{7}}T_\pi & \frac{3}{\sqrt{7}}T_\pi & -\frac{2}{\sqrt{7}}T_\pi & -\sqrt{\frac{14}{5}}T_\pi & -C_\pi - \frac{3}{7}T_\pi & -\frac{12}{7\sqrt{5}}T_\pi \\ -6\sqrt{\frac{3}{35}}T_\pi & \frac{12}{\sqrt{35}}T_\pi & \frac{6}{\sqrt{35}}T_\pi & 0 & -\frac{12}{7\sqrt{5}}T_\pi & -C_\pi + \frac{10}{7}T_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.44)$$

$$V_{2^{++}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} 3C_\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_\pi & -2\sqrt{2}T_\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2}T_\pi & -C_\pi + 2T_\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_\pi - 2T_\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C_\pi + \frac{4}{7}T_\pi & -\frac{12\sqrt{3}}{7}T_\pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12\sqrt{3}}{7}T_\pi & -C_\pi + \frac{10}{7}T_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.45)$$

$$U_{2^{++}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{35}}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{105}}{15} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{10} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{105}}{30} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{35}}{10} & -\frac{\sqrt{21}}{6} & \frac{\sqrt{15}}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2.46)$$

4.2.10 $J^{PC} = 2^{--}$

$$\psi_{2^{--}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* + P^*\bar{P})({}^3P_2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* + P^*\bar{P})({}^3F_2) \\ P^*\bar{P}^*({}^5P_2) \\ P^*\bar{P}^*({}^5F_2) \end{pmatrix}, \quad (4.2.47)$$

$$\psi_{2^{--}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} [[Q\bar{Q}]_1 [P[q\bar{q}]_1]_{0,1,2}] \\ [[Q\bar{Q}]_1 [P[q\bar{q}]_1]_{1,2,3}] \\ [[Q\bar{Q}]_1 [F[q\bar{q}]_1]_{1,2,3}] \\ [[Q\bar{Q}]_1 [F[q\bar{q}]_1]_{2,3,4}] \end{pmatrix}, \quad (4.2.48)$$

$$V_{2^{--}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} -C_\pi - \frac{1}{5}T_\pi & \frac{3\sqrt{6}}{5}T_\pi & -\frac{3\sqrt{3}}{5}T_\pi & \frac{6\sqrt{3}}{5}T_\pi \\ \frac{3\sqrt{6}}{5}T_\pi & -C_\pi - \frac{4}{5}T_\pi & -\frac{3\sqrt{2}}{5}T_\pi & \frac{6\sqrt{2}}{5}T_\pi \\ -\frac{3\sqrt{3}}{5}T_\pi & -\frac{3\sqrt{2}}{5}T_\pi & -C_\pi - \frac{7}{5}T_\pi & -\frac{6}{5}T_\pi \\ \frac{6\sqrt{3}}{5}T_\pi & \frac{6\sqrt{2}}{5}T_\pi & -\frac{6}{5}T_\pi & -C_\pi + \frac{2}{5}T_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.49)$$

$$V_{2^{--}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} -C_\pi - 2T_\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_\pi + \frac{2}{5}T_\pi & -\frac{6\sqrt{6}}{5}T_\pi & 0 \\ 0 & -\frac{6\sqrt{6}}{5}T_\pi & -C_\pi + \frac{8}{5}T_\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_\pi - 2T_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.50)$$

$$U_{2^{--}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \quad (4.2.51)$$

4.2.11 $J^{PC} = 2^{-+}$

$$\psi_{2^{-+}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* - P^*\bar{P})({}^3P_2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* - P^*\bar{P})({}^3F_2) \\ P^*\bar{P}^*({}^3P_2) \\ P^*\bar{P}^*({}^3F_2) \end{pmatrix}, \quad (4.2.52)$$

$$\psi_{2^{-+}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} [[Q\bar{Q}]_0 [P [q\bar{q}]_{1,2}]_2 \\ [[Q\bar{Q}]_0 [F [q\bar{q}]_{1,2}]_2 \\ [[Q\bar{Q}]_1 [P [q\bar{q}]_{0,1}]_{0,1,2} \\ [[Q\bar{Q}]_1 [F [q\bar{q}]_{0,3}]_{2,3,4} \end{pmatrix}, \quad (4.2.53)$$

$$V_{2^{-+}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} C_\pi + \frac{1}{5}T_\pi & -\frac{3\sqrt{6}}{5}T_\pi & -2C_\pi + \frac{1}{5}T_\pi & -\frac{3\sqrt{6}}{5}T_\pi \\ -\frac{3\sqrt{6}}{5}T_\pi & C_\pi + \frac{4}{5}T_\pi & -\frac{3\sqrt{6}}{5}T_\pi & -2C_\pi + \frac{4}{5}T_\pi \\ -2C_\pi + \frac{1}{5}T_\pi & -\frac{3\sqrt{6}}{5}T_\pi & C_\pi + \frac{1}{5}T_\pi & -\frac{3\sqrt{6}}{5}T_\pi \\ -\frac{3\sqrt{6}}{5}T_\pi & -2C_\pi + \frac{4}{5}T_\pi & -\frac{3\sqrt{6}}{5}T_\pi & C_\pi + \frac{4}{5}T_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.54)$$

$$V_{2^{-+}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} -C_\pi + \frac{2}{5}T_\pi & -\frac{6\sqrt{6}}{5}T_\pi & 0 & 0 \\ -\frac{6\sqrt{6}}{5}T_\pi & -C_\pi + \frac{8}{5}T_\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3C_\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3C_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.55)$$

$$U_{2^{-+}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & -\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \quad (4.2.56)$$

4.2.12 $J^{PC} = 3^{+-}$

$$\psi_{3^{+-}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* - P^*\bar{P})({}^3D_3) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* - P^*\bar{P})({}^3G_3) \\ P^*\bar{P}^*({}^3D_3) \\ P^*\bar{P}^*({}^3G_3) \end{pmatrix}, \quad (4.2.57)$$

$$\psi_{3^{+-}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} [[Q\bar{Q}]_0 [D[q\bar{q}]_1]_3]_3 \\ [[Q\bar{Q}]_0 [G[q\bar{q}]_1]_3]_3 \\ [[Q\bar{Q}]_1 [D[q\bar{q}]_0]_2]_{1,2,3} \\ [[Q\bar{Q}]_1 [G[q\bar{q}]_0]_4]_{3,4,5} \end{pmatrix}, \quad (4.2.58)$$

$$V_{3^{+-}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} C_\pi + \frac{2}{7}T_\pi & -\frac{6\sqrt{3}}{7}T_\pi & -2C_\pi + \frac{2}{7}T_\pi & -\frac{6\sqrt{3}}{7}T_\pi \\ -\frac{6\sqrt{3}}{7}T_\pi & C_\pi + \frac{5}{7}T_\pi & -\frac{6\sqrt{3}}{7}T_\pi & -2C_\pi + \frac{5}{7}T_\pi \\ -2C_\pi + \frac{2}{7}T_\pi & -\frac{6\sqrt{3}}{7}T_\pi & C_\pi + \frac{2}{7}T_\pi & -\frac{6\sqrt{3}}{7}T_\pi \\ -\frac{6\sqrt{3}}{7}T_\pi & -2C_\pi + \frac{5}{7}T_\pi & -\frac{6\sqrt{3}}{7}T_\pi & C_\pi + \frac{5}{7}T_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.59)$$

$$V_{3^{+-}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} -C_\pi + \frac{4}{7}T_\pi & -\frac{12\sqrt{3}}{7}T_\pi & 0 & 0 \\ -\frac{12\sqrt{3}}{7}T_\pi & -C_\pi + \frac{10}{7}T_\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3C_\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3C_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.60)$$

$$U_{3^{+-}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (4.2.61)$$

4.2.13 $J^{PC} = 3^{++}$

$$\psi_{3^{++}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* + P^*\bar{P})({}^3D_3) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* + P^*\bar{P})({}^3G_3) \\ P^*\bar{P}^*({}^5D_3) \\ P^*\bar{P}^*({}^5G_3) \end{pmatrix}, \quad (4.2.62)$$

$$\psi_{3^{++}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} [[Q\bar{Q}]_1 [D[q\bar{q}]_1]_{2,1,2,3}] \\ [[Q\bar{Q}]_1 [D[q\bar{q}]_1]_{3,2,3,4}] \\ [[Q\bar{Q}]_1 [G[q\bar{q}]_1]_{3,2,3,4}] \\ [[Q\bar{Q}]_1 [G[q\bar{q}]_1]_{4,3,4,5}] \end{pmatrix}, \quad (4.2.63)$$

$$V_{3^{++}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} -C_\pi - \frac{2}{7}T_\pi & \frac{6\sqrt{3}}{7}T_\pi & -\frac{6\sqrt{2}}{7}T_\pi & \frac{6\sqrt{5}}{7}T_\pi \\ \frac{6\sqrt{3}}{7}T_\pi & -C_\pi - \frac{5}{7}T_\pi & -\frac{3\sqrt{6}}{7}T_\pi & \frac{3\sqrt{15}}{7}T_\pi \\ -\frac{6\sqrt{2}}{7}T_\pi & -\frac{3\sqrt{6}}{7}T_\pi & -C_\pi - \frac{8}{7}T_\pi & -\frac{3\sqrt{10}}{7}T_\pi \\ \frac{6\sqrt{5}}{7}T_\pi & \frac{3\sqrt{15}}{7}T_\pi & -\frac{3\sqrt{10}}{7}T_\pi & -C_\pi + \frac{1}{7}T_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.64)$$

$$V_{3^{++}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} -C_\pi - 2T_\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_\pi + \frac{4}{7}T_\pi & -\frac{12\sqrt{3}}{7}T_\pi & 0 \\ 0 & -\frac{12\sqrt{3}}{7}T_\pi & -C_\pi + \frac{10}{7}T_\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_\pi - 2T_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.65)$$

$$U_{3^{++}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{3}{8}} & -\sqrt{\frac{5}{8}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{5}{8}} & \sqrt{\frac{3}{8}} \end{pmatrix}. \quad (4.2.66)$$

4.2.14 $J^{PC} = 3^{--}$

$$\psi_{3^{--}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} P\bar{P}(^1F_3) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* + P^*\bar{P})(^3F_3) \\ P^*\bar{P}^*(^1F_3) \\ P^*\bar{P}^*(^5P_3) \\ P^*\bar{P}^*(^5F_3) \\ P^*\bar{P}^*(^5H_3) \end{pmatrix}, \quad (4.2.67)$$

$$\psi_{3^{--}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} [[Q\bar{Q}]_0 [F [q\bar{q}]_0]_3]_3 \\ [[Q\bar{Q}]_1 [P [q\bar{q}]_1]_2]_{1,2,3} \\ [[Q\bar{Q}]_1 [F [q\bar{q}]_1]_2]_{1,2,3} \\ [[Q\bar{Q}]_1 [F [q\bar{q}]_1]_3]_{2,3,4} \\ [[Q\bar{Q}]_1 [F [q\bar{q}]_1]_4]_{3,4,5} \\ [[Q\bar{Q}]_1 [H [q\bar{q}]_1]_4]_{3,4,5} \end{pmatrix}, \quad (4.2.68)$$

$$V_{3^{--}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3}C_\pi & -\frac{3\sqrt{210}}{35}T_\pi & \frac{2\sqrt{10}}{5}T_\pi & -\frac{2\sqrt{35}}{7}T_\pi \\ 0 & -C_\pi + T_\pi & 0 & -\frac{12\sqrt{35}}{35}T_\pi & \frac{\sqrt{15}}{5}T_\pi & \frac{\sqrt{210}}{7}T_\pi \\ \sqrt{3}C_\pi & 0 & 2C_\pi & \frac{3\sqrt{70}}{35}T_\pi & -\frac{2\sqrt{30}}{15}T_\pi & \frac{2\sqrt{105}}{21}T_\pi \\ -\frac{3\sqrt{210}}{35}T_\pi & -\frac{12\sqrt{35}}{35}T_\pi & \frac{3\sqrt{70}}{35}T_\pi & -C_\pi + \frac{2}{5}T_\pi & -\frac{12\sqrt{21}}{35}T_\pi & 0 \\ \frac{2\sqrt{10}}{5}T_\pi & \frac{\sqrt{15}}{5}T_\pi & -\frac{2\sqrt{30}}{15}T_\pi & -\frac{12\sqrt{21}}{35}T_\pi & -C_\pi - \frac{11}{15}T_\pi & -\frac{5\sqrt{14}}{21}T_\pi \\ -\frac{2\sqrt{35}}{7}T_\pi & \frac{\sqrt{210}}{7}T_\pi & \frac{2\sqrt{105}}{21}T_\pi & 0 & -\frac{5\sqrt{14}}{21}T_\pi & -C_\pi + \frac{2}{3}T_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.69)$$

$$V_{3^{--}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} 3C_\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_\pi + \frac{2}{5}T_\pi & -\frac{6\sqrt{6}}{5}T_\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6\sqrt{6}}{5}T_\pi & -C_\pi + \frac{8}{5}T_\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_\pi - 2T_\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C_\pi + \frac{2}{3}T_\pi & -\frac{4\sqrt{5}}{3}T_\pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4\sqrt{5}}{3}T_\pi & -C_\pi + \frac{2}{3}T_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.70)$$

$$U_{3^{--}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{35}}{14} & \frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{7}}{14} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{210}}{21} & \frac{\sqrt{6}}{12} & -\frac{3\sqrt{42}}{28} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{105}}{42} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{21}}{14} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{14}}{7} & -\frac{\sqrt{10}}{4} & \frac{\sqrt{70}}{28} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2.71)$$

4.2.15 $J^{PC} = 3^{-+}$

$$\psi_{3^{-+}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(P\bar{P}^* - P^*\bar{P})({}^3F_3) \\ P^*\bar{P}({}^3F_3) \end{pmatrix}, \quad (4.2.72)$$

$$\psi_{3^{-+}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} [[Q\bar{Q}]_0[F[q\bar{q}]_1]_3]_3 \\ [[Q\bar{Q}]_1[F[q\bar{q}]_0]_3]_{2,3,4} \end{pmatrix}, \quad (4.2.73)$$

$$V_{3^{-+}}^{\text{HM}} = \begin{pmatrix} C_\pi - T_\pi & -2C_\pi - T_\pi \\ -2C_\pi - T_\pi & C_\pi - T_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.74)$$

$$V_{3^{-+}}^{\text{LCS}} = \begin{pmatrix} -C_\pi - 2T_\pi & 0 \\ 0 & 3C_\pi \end{pmatrix}, \quad (4.2.75)$$

$$U_{3^{-+}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (4.2.76)$$

4.3 議論とまとめ

本章では $J \leq 3$ で可能な全てのヘビーマesonと反ヘビーマesonの分子状態に HQSS を適用し、HQS 多重項構造を調べた。第 4.2 節では各 J^{PC} でのポテンシャル行列を示した。HM 基底ではどのポテンシャルもブロック対角化されることや、ライトクラウド全体のスピンは同じだがその内部スピンの構造が異なるチャンネルはブロック行列の非対角成分であるテンソル力ポテンシャルによって混ぜられることなど、ペンタクォークの解析と同様の性質が見て取れる。

ここではシュレディンガー方程式を解いて束縛状態を調べるのではなく、ポテンシャルのブロック部分も対角化することでどのチャンネルが引力ポテンシャルを持つか示す。

アイソスピン 1 の場合のポテンシャルを表 4.2 及び表 4.3 にまとめる。 $I = 1$ のときアイソスピンファクターは $\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 = 1/4$ である。なお表中では全体の係数 $g^2/3f_\pi^2$ は省略した。引力ポテンシャルには \surd マークを付けている。ブロック行列を対角化した部分は 2 成分が混合した状態になっている。表 4.4 及び表 4.5 はアイソスピン 0 の場合のポテンシャルである。 $I = 0$ のときアイソスピンファクターは $\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 = -3/4$ となる。アイソスピンの選び方で全体の符号が変わるので引力ポテンシャルを持つ多重項の種類がそれぞれで逆となる。またアイソスピンファクターの絶対値が 3 倍異なるので $I = 0$ のほうがポテンシャルが強い傾向にある。

ここでの解析は中間子交換相互作用としてパイ中間子しか用いていない、クォークコニウムとの結合を記述する近距離相互作用がない、HQSS の破れの効果を取り入れていない、などの理由から現象論的な議論を行うには更なる発展が必要である。また近年ではハドロン分子状態とクォークコニウムのコア状態との結合などを取り入れたモデル [81–83] も提案されている。

しかしながら既に発見されているテトラクォークと比べることは面白い。例えば $X(3872)^{*1}$ について考える。これは $D\bar{D}^*$ のしきい値近傍にありハドロン分子状態の候補とされる。量子数も測られており $I(J^{PC}) = 0(1^{++})$ [34] である。この状態を表表 4.4 で見ると引力ポテンシャルを持つのは $J^{PC} = (0^{++}, 1^{++}, 2^{++})$ の HQS 三重項である。そのため、もしパイ中間子交換以外のポテンシャルやチャーモニウムコアの影響が小さければこのようなパートナー構造が存在する

^{*1} PDG(Particle Data Group) [34] では、量子数が測られており、それがチャーモニウムで実現可能な量子数のため $\chi_{c1}(3872)$ と表記されている。

表 4.2 アイソスピン $I = 1$ のときの対角化されたポテンシャルと固有状態。ブロック行列を対角化した部分は 2 成分の重ね合わせ状態である。✓ マークはポテンシャルが引力のチャンネルである。

J^{PC}	Potential	State	Attractive
0^{++}	$\frac{3}{4}C_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi + T_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi - \frac{1}{2}T_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_0 S]_0]_0$ $\sqrt{\frac{1}{3}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 S]_1]_{0,1,2} + \sqrt{\frac{2}{3}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_1]_{0,1,2}$ $-\sqrt{\frac{2}{3}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 S]_1]_{0,1,2} + \sqrt{\frac{1}{3}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_1]_{0,1,2}$	✓
1^{+-}	$-\frac{1}{4}C_\pi + T_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi - \frac{1}{2}T_\pi$ $\frac{3}{4}C_\pi$ $\frac{3}{4}C_\pi$	$\sqrt{\frac{1}{3}} [[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 S]_1]_1 + \sqrt{\frac{2}{3}} [[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 D]_1]_1$ $-\sqrt{\frac{2}{3}} [[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 S]_1]_1 + \sqrt{\frac{1}{3}} [[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 D]_1]_1$ $[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_0 S]_0]_1$ $[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_0 D]_2]_{1,2,3}$	✓
1^{++}	$-\frac{1}{4}C_\pi + T_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi - \frac{1}{2}T_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi - \frac{1}{2}T_\pi$	$\sqrt{\frac{1}{3}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 S]_1]_{0,1,2} + \sqrt{\frac{2}{3}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_1]_{0,1,2}$ $-\sqrt{\frac{2}{3}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 S]_1]_{0,1,2} + \sqrt{\frac{1}{3}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_1]_{0,1,2}$ $[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_2]_{1,2,3}$	✓ ✓
2^{+-}	$-\frac{1}{4}C_\pi - \frac{1}{2}T_\pi$ $\frac{3}{4}C_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 D]_2]_2$ $[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_0 D]_2]_{1,2,3}$	✓
2^{++}	$\frac{3}{4}C_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi + T_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi - \frac{1}{2}T_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi - \frac{1}{2}T_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi + T_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi - \frac{1}{2}T_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_0 D]_2]_2$ $\sqrt{\frac{1}{3}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 S]_1]_{0,1,2} + \sqrt{\frac{2}{3}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_1]_{0,1,2}$ $-\sqrt{\frac{2}{3}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 S]_1]_{0,1,2} + \sqrt{\frac{1}{3}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_1]_{0,1,2}$ $[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_2]_{1,2,3}$ $\sqrt{\frac{3}{7}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_3]_{2,3,4} + \sqrt{\frac{4}{7}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 G]_3]_{2,3,4}$ $-\sqrt{\frac{4}{7}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_3]_{2,3,4} + \sqrt{\frac{3}{7}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 G]_3]_{2,3,4}$	✓ ✓ ✓
3^{+-}	$-\frac{1}{4}C_\pi + T_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi - \frac{1}{2}T_\pi$ $\frac{3}{4}C_\pi$ $\frac{3}{4}C_\pi$	$\frac{3}{\sqrt{21}} [[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 D]_3]_3 + \frac{2}{\sqrt{7}} [[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 G]_3]_3$ $-\frac{2}{\sqrt{7}} [[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 D]_3]_3 + \frac{3}{\sqrt{21}} [[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 G]_3]_3$ $[[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 D]_2]_{1,2,3}$ $[[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 G]_4]_{3,4,5}$	✓
3^{++}	$-\frac{1}{4}C_\pi - \frac{1}{2}T_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi + T_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi - \frac{1}{2}T_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi - \frac{1}{2}T_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_2]_{1,2,3}$ $\frac{3}{\sqrt{21}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_3]_{2,3,4} + \frac{2}{\sqrt{7}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 G]_3]_{2,3,4}$ $-\frac{2}{\sqrt{7}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_3]_{2,3,4} + \frac{3}{\sqrt{21}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 G]_3]_{2,3,4}$ $[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 G]_4]_{3,4,5}$	✓ ✓ ✓

表 4.3 アイソスピン $I = 1$ のときの対角化されたポテンシャルと固有状態。ブロック行列を対角化した部分は 2 成分の重ね合わせ状態である。✓ マークはポテンシャルが引力のチャンネルである。

J^{PC}	Potential	State	Attractive
0^{--}	$-\frac{1}{4}C_\pi - \frac{1}{2}T_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 P]_{1,0,1,2}]$	✓
0^{-+}	$-\frac{1}{4}C_\pi + T_\pi$ $\frac{3}{4}C_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 P]_{0,0}]$ $[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_0 P]_{1,0,1,2}]$	
1^{--}	$\frac{3}{4}C_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi + T_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi - \frac{1}{2}T_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi + T_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi - \frac{1}{2}T_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_0 P]_{1,1}]$ $[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 P]_{0,1}]$ $[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 P]_{1,0,1,2}]$ $\sqrt{\frac{2}{5}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 P]_{2,1,2,3}] + \sqrt{\frac{3}{5}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 F]_{2,1,2,3}]$ $-\sqrt{\frac{3}{5}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 P]_{2,1,2,3}] + \sqrt{\frac{2}{5}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 F]_{2,1,2,3}]$	✓ ✓ ✓
1^{-+}	$-\frac{1}{4}C_\pi - \frac{1}{2}T_\pi$ $\frac{3}{4}C_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 P]_{1,1}]$ $[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_0 P]_{1,0,1,2}]$	✓
2^{--}	$-\frac{1}{4}C_\pi - \frac{1}{2}T_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi + T_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi - \frac{1}{2}T_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi - \frac{1}{2}T_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 P]_{1,0,1,2}]$ $\sqrt{\frac{2}{5}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 P]_{2,1,2,3}] + \sqrt{\frac{3}{5}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 F]_{2,1,2,3}]$ $-\sqrt{\frac{3}{5}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 P]_{2,1,2,3}] + \sqrt{\frac{2}{5}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 F]_{2,1,2,3}]$ $[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 F]_{3,2,3,4}]$	✓ ✓ ✓
2^{-+}	$-\frac{1}{4}C_\pi + T_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi - \frac{1}{2}T_\pi$ $\frac{3}{4}C_\pi$ $\frac{3}{4}C_\pi$	$\sqrt{\frac{2}{5}} [[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 P]_{2,2}] + \sqrt{\frac{3}{5}} [[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 F]_{2,2}]$ $-\sqrt{\frac{3}{5}} [[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 P]_{2,2}] + \sqrt{\frac{2}{5}} [[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 F]_{2,2}]$ $[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_0 P]_{1,0,1,2}]$ $[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_0 F]_{3,2,3,4}]$	✓
3^{--}	$\frac{3}{4}C_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi + T_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi - \frac{1}{2}T_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi - \frac{1}{2}T_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi + \frac{1+2\sqrt{5}}{6}T_\pi$ $-\frac{1}{4}C_\pi + \frac{1-2\sqrt{5}}{6}T_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_0 F]_{3,3}]$ $\sqrt{\frac{2}{5}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 P]_{2,1,2,3}] + \sqrt{\frac{3}{5}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 F]_{2,1,2,3}]$ $-\sqrt{\frac{3}{5}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 P]_{2,1,2,3}] + \sqrt{\frac{2}{5}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 F]_{2,1,2,3}]$ $[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 F]_{3,2,3,4}]$ $\sqrt{\frac{1}{2}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 F]_{4,3,4,5}] + \sqrt{\frac{1}{2}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 H]_{4,3,4,5}]$ $\sqrt{\frac{1}{2}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 F]_{4,3,4,5}] - \sqrt{\frac{1}{2}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 H]_{4,3,4,5}]$	✓ ✓ ✓ ✓
3^{-+}	$-\frac{1}{4}C_\pi - \frac{1}{2}T_\pi$ $\frac{3}{4}C_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 F]_{3,3}]$ $[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_0 F]_{3,2,3,4}]$	✓

表 4.4 アイソスピン $I = 0$ のときの対角化されたポテンシャルと固有状態。ブロック行列を対角化した部分は 2 成分の重ね合わせ状態である。✓ マークはポテンシャルが引力のチャンネルである。

J^{PC}	Potential	State	Attractive
0^{++}	$-\frac{9}{4}C_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_0 S]_0]_0$	✓
	$\frac{3}{4}C_\pi - 3T_\pi$	$\sqrt{\frac{1}{3}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 S]_1]_{0,1,2} + \sqrt{\frac{2}{3}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_1]_{0,1,2}$	✓
	$\frac{3}{4}C_\pi + \frac{3}{2}T_\pi$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 S]_1]_{0,1,2} + \sqrt{\frac{1}{3}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_1]_{0,1,2}$	
1^{+-}	$\frac{3}{4}C_\pi - 3T_\pi$	$\sqrt{\frac{1}{3}} [[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 S]_1]_1 + \sqrt{\frac{2}{3}} [[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 D]_1]_1$	✓
	$\frac{3}{4}C_\pi + \frac{3}{2}T_\pi$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} [[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 S]_1]_1 + \sqrt{\frac{1}{3}} [[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 D]_1]_1$	
	$-\frac{9}{4}C_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_0 S]_0]_1$	✓
	$-\frac{9}{4}C_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_0 D]_2]_{1,2,3}$	✓
1^{++}	$\frac{3}{4}C_\pi - 3T_\pi$	$\sqrt{\frac{1}{3}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 S]_1]_{0,1,2} + \sqrt{\frac{2}{3}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_1]_{0,1,2}$	✓
	$\frac{3}{4}C_\pi + \frac{3}{2}T_\pi$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 S]_1]_{0,1,2} + \sqrt{\frac{1}{3}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_1]_{0,1,2}$	
	$\frac{3}{4}C_\pi + \frac{3}{2}T_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_2]_{1,2,3}$	
2^{+-}	$\frac{3}{4}C_\pi + \frac{3}{2}T_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 D]_2]_2$	
	$-\frac{9}{4}C_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_0 D]_2]_{1,2,3}$	✓
2^{++}	$-\frac{9}{4}C_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_0 D]_2]_2$	✓
	$\frac{3}{4}C_\pi - 3T_\pi$	$\sqrt{\frac{1}{3}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 S]_1]_{0,1,2} + \sqrt{\frac{2}{3}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_1]_{0,1,2}$	✓
	$\frac{3}{4}C_\pi + \frac{3}{2}T_\pi$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 S]_1]_{0,1,2} + \sqrt{\frac{1}{3}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_1]_{0,1,2}$	
	$\frac{3}{4}C_\pi + \frac{3}{2}T_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_2]_{1,2,3}$	
	$\frac{3}{4}C_\pi - 3T_\pi$	$\sqrt{\frac{3}{7}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_3]_{2,3,4} + \sqrt{\frac{4}{7}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 G]_3]_{2,3,4}$	✓
	$\frac{3}{4}C_\pi + \frac{3}{2}T_\pi$	$-\sqrt{\frac{4}{7}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_3]_{2,3,4} + \sqrt{\frac{3}{7}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 G]_3]_{2,3,4}$	
3^{+-}	$\frac{3}{4}C_\pi - 3T_\pi$	$\frac{3}{\sqrt{21}} [[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 D]_3]_3 + \frac{2}{\sqrt{7}} [[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 G]_3]_3$	✓
	$\frac{3}{4}C_\pi + \frac{3}{2}T_\pi$	$-\frac{2}{\sqrt{7}} [[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 D]_3]_3 + \frac{3}{\sqrt{21}} [[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 G]_3]_3$	
	$-\frac{9}{4}C_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 D]_2]_{1,2,3}$	✓
	$-\frac{9}{4}C_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 G]_4]_{3,4,5}$	✓
3^{++}	$\frac{3}{4}C_\pi + \frac{3}{2}T_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_2]_{1,2,3}$	
	$\frac{3}{4}C_\pi - 3T_\pi$	$\frac{3}{\sqrt{21}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_3]_{2,3,4} + \frac{2}{\sqrt{7}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 G]_3]_{2,3,4}$	✓
	$\frac{3}{4}C_\pi + \frac{3}{2}T_\pi$	$-\frac{2}{\sqrt{7}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 D]_3]_{2,3,4} + \frac{3}{\sqrt{21}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 G]_3]_{2,3,4}$	
	$\frac{3}{4}C_\pi + \frac{3}{2}T_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 G]_4]_{3,4,5}$	

表 4.5 アイソスピン $I = 0$ のときの対角化されたポテンシャルと固有状態。ブロック行列を対角化した部分は 2 成分の重ね合わせ状態である。✓ マークはポテンシャルが引力のチャンネルである。

J^{PC}	Potential	State	Attractive
0^{--}	$\frac{3}{4}C_\pi + \frac{3}{2}T_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 P]_1]_{0,1,2}$	
0^{-+}	$\frac{3}{4}C_\pi - 3T_\pi$ $-\frac{9}{4}C_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 P]_0]_0$ $[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_0 P]_1]_{0,1,2}$	✓ ✓
1^{--}	$-\frac{9}{4}C_\pi$ $\frac{3}{4}C_\pi - 3T_\pi$ $\frac{3}{4}C_\pi + \frac{3}{2}T_\pi$ $\frac{3}{4}C_\pi - 3T_\pi$ $\frac{3}{4}C_\pi + \frac{3}{2}T_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_0 P]_1]_1$ $[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 P]_0]_1$ $[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 P]_1]_{0,1,2}$ $\sqrt{\frac{2}{5}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 P]_2]_{1,2,3} + \sqrt{\frac{3}{5}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 F]_2]_{1,2,3}$ $-\sqrt{\frac{3}{5}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 P]_2]_{1,2,3} + \sqrt{\frac{2}{5}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 F]_2]_{1,2,3}$	✓ ✓ ✓
1^{-+}	$\frac{3}{4}C_\pi + \frac{3}{2}T_\pi$ $-\frac{9}{4}C_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 P]_1]_1$ $[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_0 P]_1]_{0,1,2}$	✓
2^{--}	$\frac{3}{4}C_\pi + \frac{3}{2}T_\pi$ $\frac{3}{4}C_\pi - 3T_\pi$ $\frac{3}{4}C_\pi + \frac{3}{2}T_\pi$ $\frac{3}{4}C_\pi + \frac{3}{2}T_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 P]_1]_{0,1,2}$ $\sqrt{\frac{2}{5}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 P]_2]_{1,2,3} + \sqrt{\frac{3}{5}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 F]_2]_{1,2,3}$ $-\sqrt{\frac{3}{5}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 P]_2]_{1,2,3} + \sqrt{\frac{2}{5}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 F]_2]_{1,2,3}$ $[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 F]_3]_{2,3,4}$	✓
2^{-+}	$\frac{3}{4}C_\pi - 3T_\pi$ $\frac{3}{4}C_\pi + \frac{3}{2}T_\pi$ $-\frac{9}{4}C_\pi$ $-\frac{9}{4}C_\pi$	$\sqrt{\frac{2}{5}} [[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 P]_2]_2 + \sqrt{\frac{3}{5}} [[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 F]_2]_2$ $-\sqrt{\frac{3}{5}} [[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 P]_2]_2 + \sqrt{\frac{2}{5}} [[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 F]_2]_2$ $[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_0 P]_1]_{0,1,2}$ $[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_0 F]_3]_{2,3,4}$	✓ ✓ ✓
3^{--}	$-\frac{9}{4}C_\pi$ $\frac{3}{4}C_\pi - 3T_\pi$ $\frac{3}{4}C_\pi + \frac{3}{2}T_\pi$ $\frac{3}{4}C_\pi + \frac{3}{2}T_\pi$ $\frac{3}{4}C_\pi - \frac{(1+2\sqrt{5})}{2}T_\pi$ $\frac{3}{4}C_\pi - \frac{(1-2\sqrt{5})}{2}T_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_0 F]_3]_3$ $\sqrt{\frac{2}{5}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 P]_2]_{1,2,3} + \sqrt{\frac{3}{5}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 F]_2]_{1,2,3}$ $-\sqrt{\frac{3}{5}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 P]_2]_{1,2,3} + \sqrt{\frac{2}{5}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 F]_2]_{1,2,3}$ $[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 F]_3]_{2,3,4}$ $\sqrt{\frac{1}{2}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 F]_4]_{3,4,5} + \sqrt{\frac{1}{2}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 H]_4]_{3,4,5}$ $\sqrt{\frac{1}{2}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 F]_4]_{3,4,5} - \sqrt{\frac{1}{2}} [[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_1 H]_4]_{3,4,5}$	✓ ✓ ✓
3^{-+}	$\frac{3}{4}C_\pi + \frac{3}{2}T_\pi$ $-\frac{9}{4}C_\pi$	$[[Q\bar{Q}]_0 [[q\bar{q}]_1 F]_3]_3$ $[[Q\bar{Q}]_1 [[q\bar{q}]_0 F]_3]_{2,3,4}$	✓

可能性がある。またこの引力チャンネルは $Q\bar{Q}$ のスピンの1である。HQSS の破れが小さければこのスピンは保存されるので崩壊先のチャーモニウムは J/ψ になる。PDG に記載されている崩壊モードを見ると J/ψ を含むモードへの崩壊は見えているが、 η_c のモードは not seen となっている。このことから三重項が存在するのではないかと考えられる。

もちろん現実のクォーク質量が有限であることから HQSS はあらわに破れている。対称性に基づく議論を行うならばチャームクォークよりも重いボトムクォークを含むテトラクォークのほうが適しているだろう。今の所、発見されている X, Y, Z テトラクォークの多くはチャーム-反チャームクォークを含むテトラクォークであるが、今後の実験でさらに多くのテトラクォーク、特にボトムクォークを含むものが発見されることを期待する。

一方で、現在見つかっているボトムクォークと反ボトムクォークを含む $Z_b(10610)$ と $Z_b(10650)$ の2種類のテトラクォークはここでの解析結果ではパイ中間子交換だけで説明することはできない。これらはそれぞれ $B\bar{B}^*$ と $B^*\bar{B}$ のしきい値近傍にあるテトラクォークで、量子数は $I(J^{PC}) = 1(1^{+-})$ とされている [34]。該当するのは表 4.2 だが引力ポテンシャルを持つチャンネルは1つだけしかない。これはパイ中間子交換以外の相互作用も大きな寄与があると予想される。ボトムクォークはチャームクォークよりも重く運動項の抑制が強いため、OPEP よりも近距離で効くポテンシャルの影響が大きくなる。 ρ, ω 中間子交換などを取り入れたポテンシャルを用いた議論が必要となるだろう。

ポテンシャルの改良や対称性の破れを取り入れた解析を行い、現実のエキゾチックハドロンと比較してそれらの HQS 多重項構造を調べていくことが今後の課題である。

第 5 章

まとめ

この論文ではヘビーハドロンの 2 体束縛状態としてのエキゾチックハドロンに対して HQSS を適用し、どのような HQS 多重項構造が得られるかを調査した。

第 2 章ではヘビーハドロンの有効理論について解説した。ヘビークォーク極限において QCD が持つ対称性である HQSS を尊重してヘビーマesonやヘビーバリオンの有効理論を構築した。相互作用がヘビークォークのスピンの依存しないことから、全スピンは異なるが質量は縮退するハドロンの組が存在し、HQS 多重項と呼ばれる。ヘビーマeson $\sim Q\bar{q}$ には二重項が、ヘビーバリオン $\sim Qqq$ には一重項と二重項がある。現実のクォーク質量は有限なので対称性は破れているが、このような多重項構造は近似的に存在していることがチャームハドロンやボトムハドロンで知られている。

第 3 章ではヘビーマesonとヘビーバリオンの分子状態としてのペンタクォークに HQSS を適用して HQS 多重項構造を調べた。この約 15 年間で X, Y, Z テトラクォークや P_c ペンタクォークといったエキゾチックハドロンの候補が複数発見されている。これらの多くはそのクォーク組成に 1 個のヘビークォークと 1 個の反ヘビークォークを含んでいる。HQSS はヘビークォークが 1 個だけの系において QCD が持つ対称性である。複数のヘビークォークがある場合、有効理論の最低次であってもヘビークォーク間の相対運動によって対称性が破れるため HQSS は厳密には存在しない。本研究では 2 個のヘビークォークを含んでも HQSS を適用できる系として LCS 基底を導入した。ヘビークォーク間の相対運動を禁止して同じ速度でラベルされることを仮定し、角運動量励起など相対運動はヘビークォーク以外の軽い自由度が担うという系である。

第 3.3.1 節ではヘビーマeson $\bar{P}^{(*)}$ とヘビーバリオン $\Sigma_Q^{(*)}$ との間の相対軌道角運動量が S 波の場合を解析した。LCS 基底でのスピン構造を考えると、スピン 1/2 一重項、スピン 3/2 一重項、スピン (1/2, 3/2) 二重項、スピン (1/2, 3/2, 5/2) 三重項の全 4 種類の HQS 多重項が存在する。ヘビークォークが 1 個だけの系では一重項か二重項しか存在せず、三重項以上の構造は複数のヘビークォークが存在する系での特徴である。HM 基底と LCS 基底は内部のスピン状態を組み換えるユニタリ変換でつながっており、その変換行列要素はスピン組み換えによるクレブシュ-ゴルダン係数によって決まっている。

HQSS が適用できるのであれば多重項構造はモデルに依らないが、どの多重項が束縛状態になるかはモデルに依存する。本研究では OPEP を用いて引力チャンネルを議論した。HM 基底ではポテンシャル行列に非対角成分が存在するので結合チャンネル問題として解く必要がある。しかし LCS 基底へ変換するとヘビークォーク極限では自動的に対角化されて単一チャンネル問題に変わる。この対角成分はそれぞれ HQS 多重項ごとに分類されている。HM 基底と LCS 基底はユニタ

り変換で互いに変換できるため、どちらの基底でシュレディンガー方程式を解いても得られる固有値、固有状態は同一である。通常、HM 基底から計算を始めて数値的にシュレディンガー方程式を解く場合は数値対角化することで固有状態を得る。一方、LCS 基底でははじめから対角化されたポテンシャルになっているためその固有状態の物理的な意味が理解しやすいことが大きな利点である。つまり HQSS が存在するのであれば、その系の固有状態は HQS 多重項で分類されたものが物理状態であり、それは分子状態の重ね合わせで表現される。

またシュレディンガー方程式を実際に解き、多重項の縮退の様子を見た。系の質量スケールを決めるパラメータ μ を定義し、その値を操作することでヘビークォーク極限の場合と有限質量の場合とを調べた。ヘビークォーク極限では同じ多重項に属する状態だけでなく、同じライトクラウドスピンを持つ状態が全て縮退している。例えば $[\bar{Q}Q]_1 [q[qq]_1]_{3/2}$ というスピン構造は $J^P = (1/2^-, 3/2^-, 5/2^-)$ 三重項であり、同じ多重項に属するのでヘビークォーク極限で縮退する。しかし $[\bar{Q}Q]_0 [q[qq]_1]_{3/2}$ という $J^P = 3/2^-$ 一重項もまた先の三重項の状態と縮退する。これはパイ中間子との相互作用に影響するのはライトクォークのみで、ヘビークォークが無関係だからである。そのためヘビークォークのスピンの構造が違いため別の多重項として分類されても、ライトクラウドスピンの同じだと感じるポテンシャルが同じになるので縮退する。これはパイ中間子に限らず、ライトクォークで構成される他の中間子交換相互作用でも同様である。このように一重項と三重項(または二重項)が縮退するが、これらは結合可能なクォーコニウムが異なるので崩壊チャンネルで区別される。上記の一重項の場合ヘビースピンは 0 である。HQSS によってこれが保存されるので可能な崩壊先はスピン 0 のクォーコニウムである。逆に三重項の場合、崩壊先はスピン 1 のクォーコニウムになる。現実では HQSS は破れているがその破れ度合いが小さければスピントリプルは起こりにくいので、クォーコニウムへの崩壊分岐比を測定できればそのスピン構造を推定できる。

第 3.4 節では P 波ペンタクォークの場合を調べた。LCS 基底で多重項構造を調べることは S 波と同じだがポテンシャルが完全には対角化されず、ブロック行列になることが異なる。それぞれのブロックは HQS 多重項の種類で分類されている。同一ブロック内の成分はライトクラウド全体のスピンの同じだが、内部のスピン構造が異なる。対称性の観点からは内部のスピン構造は区別されないので、ライトクラウド全体のスピンの同じであればそれらの成分が混合することは自然である。この混合を起こしているのはテンソル力であることがブロックの非対角成分から分かる。それ以外の縮退の構造や崩壊チャンネルの違いなどは S 波の場合と同様に考えることができる。

第 4 章ではヘビメソンの 2 体束縛状態としてテトラクォークを考え、その HQS 多重項構造を調べた。ここでは $J \leq 3$ で可能な全ての角運動量状態を取り入れて解析した。ペンタクォークの場合はライトクラウドスピンの構造に $1/2$ が存在するので HQS 二重項があったが、テトラクォークを考えると可能なライトクラウドスピンは整数なので二重項は現れない。ポテンシャルが引力になるセクターを調べると $X(3872)$ に対応する $I(J^{PC}) = 0(1^{++})$ では HQS 三重項が引力である。そのため $J^{PC} = 0^{++}, 2^{++}$ のスピンパートナーが存在する可能性がある。またクォーコニウムへ崩壊する場合、 J/ψ への崩壊は観測されているが η_c への崩壊は観測されていないので、このことから HQS 三重項が存在する可能性を指摘できる。

以上のように複数のヘビークォークを含む系へ HQSS を適用するために LCS 基底を定義し、ヘビードロン分子状態での HQS 多重項について調べた。しかしながらこの結果を現実のエキゾチックハドロンへ直接適用し、定量的に議論するにはいくつかの課題がある。まず相互作用としてパイ中間子交換相互作用を用いたが、他の粒子の交換相互作用も考えなければならない。も

しもパイ中間子以外の影響もあるのならば引力になる多重項が変わる可能性がある。あるいは更に近距離での相互作用もありうる。ヘビーハドロン分子状態からクォークコニウムを含む状態へ結合するにはヘビークォークの交換が必要だが、その質量の大きさからハドロンの交換よりも短距離のクォークレベルのダイナミクスで記述されるだろう。

相互作用の面以外に、HQSS の破れの効果も考慮することは不可欠かつ面白い。本研究では μ が小さな場合の有限質量の計算では、運動項にのみ HQSS の破れの効果が入っていたがその効果は小さいことを示した。しかし相互作用ラグランジアンの高次項は取り入れていない。またここでは LCS 基底としてヘビークォーク間の相対運動を禁止したが、ヘビークォークコニウム有効理論で知られるようにその相対運動は対称性を破る。対称性を破る項は異なる HQS 多重項を混ぜることになり LCS 基底のポテンシャルの非対角成分として現れる。これを対角化した際に引力チャンネルに多重項の混合がどの程度起こるかは興味深い。

定量的な議論や実験結果との比較のためにはこのように相互作用の改良や対称性の破れの効果を取り入れることが必要であり今後の課題である。本研究ではシュレディンガー方程式を解いて束縛状態を調べたのみだが共鳴解の解析を行ったり、散乱問題としてリップマン-シュウィンガー方程式を解くことも面白いだろう。ヘビークォークを含むエキゾチックハドロンの候補が発見されて 15 年以上が経つが、現在でも次々と新たな候補が発見されそのたびに注目を集めている。それらを対称性の観点から分類し、物理的な理解を進めていくために HQSS に基づく解析を発展させていくことは意味がある。そして今後も LHC 実験や Belle II 実験などで詳細な測定や新たなエキゾチックハドロン発見が続くことを期待している。

謝辞

指導教官である原田正康教授には、私が学部4年生で研究室に配属されてからの6年間、非常にお世話になりました。研究において、私の興味に沿うようなトピックを紹介していただくことから始まり、具体的な研究手法や結果と物理的な解釈の議論、そして論文の執筆と全ての面でご指導と助言をいただきました。博士後期課程からは私が自由に研究できるような環境を整えてくださいました。深く感謝しております。また、計算手法の議論や結果の確認とアドバイスを下さった共同研究者の山口康宏さんにも感謝いたします。野中千穂准教授にもセミナーやジャーナル発表、研究室運営において大変お世話になりました。松崎真也さんからはそれに加えて学生生活全般のアドバイスをいただきました。この場をお借りして皆様に感謝の意を表します。

H 研の学生の皆さんにも感謝しています。研究室の自由闊達な雰囲気のおかげで伸び伸びと過ごすことができ、活発に研究へ取り組むことができました。特に、同期である黒田佳樹君は重大な議論から些細な思いつきまで、日頃から議論に付き合ってくれました。そして EHQG 研全体としての活動に関わる機会が多かった他研究室の方々にも謝意を示します。

本研究は JSPS 科研費 JP17J06300 の助成を受けたものです。

付録 A

HM 基底と LCS 基底とのユニタリ変換行列

ハドロン分子状態の HQS 多重項構造を議論するために HM 基底から LCS 基底へのユニタリ変換を行っている。この変換行列は内部のスピン自由度を組み替える際のクレブシュ-ゴルダン係数 (Clebsch-Gordan coefficients, CG 係数) を計算することで得られる。本章では変換行列要素の $9-j$ 記号を用いた計算を説明する。

A.1 ヘビメソン-ヘビーバリオン分子状態における基底変換

例として第 3 章で解析したヘビメソン-ヘビーバリオンの分子状態における基底変換を考える。つまり次のようなスピン構造の組み替えを行う。

$$\left[[\bar{Q}q]_{S_{\bar{Q}q}} [Q[qq]_{S_{qq}}]_{S_{Qqq}} \right]_J \rightarrow \left[[\bar{Q}Q]_{S_{\bar{Q}Q}} [q[qq]_{S_{qq}}]_{S_{qqq}} \right]_J \quad (L=0), \quad (\text{A.1.1})$$

$$\left[L \left[[\bar{Q}q]_{S_{\bar{Q}q}} [Q[qq]_{S_{qq}}]_{S_{Qqq}} \right]_S \right]_J \rightarrow \left[[\bar{Q}Q]_{S_{\bar{Q}Q}} \left[L [q[qq]_{S_{qq}}]_{S_{qqq}} \right]_{S_{LCS}} \right]_J \quad (L \neq 0). \quad (\text{A.1.2})$$

ここで $S_{\bar{Q}q}$ や S_{qq} などは $\bar{Q}q$ や qq のスピンを表し、 J は全角運動量である。式 (A.1.2) 左辺の S はヘビメソンとヘビーバリオンの合成スピンである。また S_{LCS} はライドクラウドスピンを意味する。特に $L=0$ の場合は $S_{qqq} = S_{LCS}$ となる。以降ではライトダイクオーク部分 $[qq]_{S_{qq}}$ を d と省略する。

まずはスピン部分のみの組み換えを考える。この組み換えは $9-j$ 記号を用いて

$$\left[[\bar{Q}q]_{S_{\bar{Q}q}} [Qd]_{S_{Qqq}} \right]_S = \sum_{S_{\bar{Q}Q}, S_{qqq}} \hat{S}_{\bar{Q}q} \hat{S}_{Qqq} \hat{S}_{\bar{Q}Q} \hat{S}_{qqq} \left\{ \begin{array}{ccc} \bar{Q} & q & S_{\bar{Q}q} \\ Q & d & S_{Qqq} \\ S_{\bar{Q}Q} & S_{qqq} & S \end{array} \right\} \left[[\bar{Q}Q]_{S_{\bar{Q}Q}} [qd]_{S_{qqq}} \right]_S, \quad (\text{A.1.3})$$

と書かれる。ここで $\hat{S}_{\bar{Q}q}$ などは $\hat{S}_\alpha = \sqrt{2S_\alpha + 1}$, $\alpha = \bar{Q}q, Qqq, \bar{Q}Q, qq$ である。

次に軌道角運動量とスピン部分の組み換えを行う。

$$\begin{aligned}
\left[L \left[[\bar{Q}Q]_{S_{\bar{Q}Q}} [qd]_{S_{qqq}} \right]_S \right]_J &= \left[[0, L]_L [S_{\bar{Q}Q} S_{qqq}]_S \right]_J \\
&= \sum_{S_{LCS}} \hat{L} \hat{S}_{\bar{Q}Q} \hat{S}_{LCS} \begin{Bmatrix} 0 & L & L \\ S_{\bar{Q}Q} & S_{qqq} & S \\ S_{\bar{Q}Q} & S_{LCS} & J \end{Bmatrix} \left[[0, S_{\bar{Q}Q}]_{S_{\bar{Q}Q}} [L, S_{qqq}]_{S_{LCS}} \right]_J \\
&= \sum_{S_{LCS}} \hat{L} \hat{S}_{\bar{Q}Q} \hat{S}_{LCS} \begin{Bmatrix} 0 & L & L \\ S_{\bar{Q}Q} & S_{qqq} & S \\ S_{\bar{Q}Q} & S_{LCS} & J \end{Bmatrix} \left[[\bar{Q}Q]_{S_{\bar{Q}Q}} [L [qd]_{S_{qqq}}]_{S_{LCS}} \right]_J .
\end{aligned} \tag{A.1.4}$$

以上より変換行列要素は以下のように求められる。

$$\begin{aligned}
\left[L \left[[\bar{Q}q]_{S_{\bar{Q}q}} [Qd]_{S_{Qqq}} \right]_S \right]_J &= \sum_{S_{\bar{Q}Q}, S_{qqq}, S_{LCS}} \hat{S}_{\bar{Q}q} \hat{S}_{Qqq} \hat{S}_{\bar{Q}Q} \hat{S}_{qqq} \hat{L} \hat{S}_{\bar{Q}Q} \hat{S}_{LCS} \times \\
&\quad \begin{Bmatrix} \bar{Q} & q & S_{\bar{Q}q} \\ Q & d & S_{Qqq} \\ S_{\bar{Q}Q} & S_{qqq} & S \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 & L & L \\ S_{\bar{Q}Q} & S_{qqq} & S \\ S_{\bar{Q}Q} & S_{LCS} & J \end{Bmatrix} \left[[\bar{Q}Q]_{S_{\bar{Q}Q}} [L [qd]_{S_{qqq}}]_{S_{LCS}} \right]_J .
\end{aligned} \tag{A.1.5}$$

付録 B

π 中間子交換相互作用のスピン-スピン演算子とテンソル演算子の計算

第 3 章ではハドロン間の相互作用として π 中間子交換相互作用 (One-pion exchange potential, OPEP) を用いた解析を行った。OPEP はスピン-スピン力ポテンシャルとテンソル力ポテンシャルの 2 種類に分けることができ、それぞれのポテンシャルは π 中間子と相互作用するライトクォークのスピンから決まる。この章ではこれらのポテンシャルを計算する際に必要となる角運動量演算子などについて説明する。

B.1 角運動量演算子

OPEP を計算する際に始状態・終状態に現れる粒子のスピンに対応した角運動量演算子を用いる。角運動量演算子については多くの量子力学の教科書で解説されているが、ここでは Stephen Gasiorowicz の教科書 [84] を参考にする。

角運動量 l の演算子を考える。 z 成分の場合は単純に

$$L_z = \begin{pmatrix} l & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & l-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -l+1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -l \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.1})$$

という行列で書ける。 x 成分と y 成分は昇降演算子を用いて定義する。

$$L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-) \quad (\text{B.1.2})$$

$$L_y = -\frac{i}{2}(L_+ - L_-) \quad (\text{B.1.3})$$

このとき昇降演算子はそれぞれ

$$L_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1 \times 2l} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2 \times (2l-1)} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3 \times (2l-2)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{(2l-1) \times 2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \sqrt{2l \times 1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.4})$$

$$L_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1 \times 2l} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2 \times (2l-1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{(2l-2) \times 3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{(2l-1) \times 2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{2l \times 1} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.5})$$

となる。

$l = 1/2$ の場合、角運動量演算子は $\sigma_i/2$ であり具体的に以下ようになる。

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1.6})$$

$l = 1$ の場合は

$$\begin{aligned} T_x &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \\ T_y &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \\ T_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.7})$$

$l = 3/2$ の場合は

$$\begin{aligned} \Sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \\ \Sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \\ \Sigma_z &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.1.8})$$

と書ける。

B.2 角運動量遷移演算子

始状態と終状態とで粒子のスピンが異なるときには角運動量遷移演算子を用いる。ここではいくつかの具体例を書く。

$l = 1$ から $l = 0$ への遷移演算子はいわゆる偏極ベクトルである。

$$\vec{\epsilon}_+ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\epsilon}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{\epsilon}_- = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2.1})$$

$l = 3/2$ から $l = 1/2$ への遷移演算子は 2 行 4 列の行列で書かれる。

$$\begin{aligned} S_x &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \\ S_y &= \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \\ S_z &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.2.2})$$

このとき、式 (B.2.2) の遷移演算子 S_i と式 (B.1.8) の $l = 3/2$ の演算子 $\Sigma_i (i = x, y, z)$ は以下の関係を満たす。

$$\begin{aligned} \Sigma_i &= \frac{3}{2} \sigma_i^{\text{rs}}, \\ \sigma_k^{\text{rs}} &= -i \epsilon_{ijk} S_i^\dagger S_j. \end{aligned} \quad (\text{B.2.3})$$

ただし、係数 $3/2$ を付けずにすむよう遷移演算子に最初から $\sqrt{3/2}$ を掛けて定義する場合もある。

B.3 OPEP に現れるスピン-スピン演算子、テンソル演算子についての公式

OPEP は一般にスピン-スピン力 (中心力) 部分 C とテンソル力部分 T に分けることができる。

$$V_{ij} = \alpha_{ij} [\mathcal{O}_i \cdot \mathcal{O}_j C(m_\pi, \Lambda, r) + S_{\mathcal{O}_i \mathcal{O}_j} T(m_\pi, \Lambda, r)] (\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j). \quad (\text{B.3.1})$$

i, j は始状態、終状態のチャンネルを表す添字、 α は結合定数などをまとめた全体の係数、 \mathcal{O} はチャンネルに対応するスピン (遷移) 演算子、 S はテンソル演算子、 τ はアイソスピン演算子である。関数 C, T はそれぞれスピン-スピンポテンシャル、テンソルポテンシャルである。形式的には

$$C(m_\pi, \Lambda, r) = \frac{m_\pi^3}{4\pi} Y_1(m_\pi, \Lambda, r), \quad (\text{B.3.2})$$

$$T(m_\pi, \Lambda, r) = \frac{m_\pi^3}{4\pi} H_3(m_\pi, \Lambda, r), \quad (\text{B.3.3})$$

と書かれる。ここで

$$Y(x) = \frac{e^{-x}}{x}, \quad (\text{B.3.4})$$

$$H(x) = \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}\right) Y(x), \quad (\text{B.3.5})$$

$$Y_1(m, \Lambda, r) = Y(mr) - \frac{\Lambda}{m} Y(\Lambda r) - \frac{\Lambda^2 - m^2}{2m\Lambda} e^{-\Lambda r}, \quad (\text{B.3.6})$$

$$H_3(m, \Lambda, r) = H(mr) - \left(\frac{\Lambda}{m}\right)^3 H(\Lambda r) - \frac{\Lambda(\Lambda^2 - m^2)}{2m^3} Y(\Lambda r) - \frac{\Lambda(\Lambda^2 - m^2)}{2m^3} e^{-\Lambda r} \quad (\text{B.3.7})$$

を用いて具体的に書き下すと

$$C(m_\pi, \Lambda, r) = \frac{m_\pi^2}{4\pi} \left[\frac{e^{-m_\pi r} - e^{-\Lambda r}}{r} - \frac{\Lambda^2 - m_\pi^2}{2\Lambda} e^{-\Lambda r} \right], \quad (\text{B.3.8})$$

$$T(m_\pi, \Lambda, r) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{m_\pi^2 r^2 + 3m_\pi r + 3}{r^3} e^{-m_\pi r} - \frac{\Lambda^2 r^2 + 3\Lambda r + 3}{r^3} e^{-\Lambda r} - \frac{\Lambda^2 - m_\pi^2}{2r} e^{-\Lambda r} - \frac{\Lambda^3 - \Lambda m_\pi^2}{2} e^{-\Lambda r} \right] \quad (\text{B.3.9})$$

となる。必要なのはスピン-スピン演算子 $\mathcal{O}_i \cdot \mathcal{O}_j$ やテンソル演算子 $S_{\mathcal{O}_i \mathcal{O}_j} = 3(\vec{\mathcal{O}}_i \cdot \hat{r})(\vec{\mathcal{O}}_j \cdot \hat{r}) - \vec{\mathcal{O}}_i \cdot \vec{\mathcal{O}}_j$ の値を具体的に計算することである。これらを簡単に計算するための公式を導出する。

この導出には A. Hosaka, H. Toki による教科書 [85] を参考にした。 n - j 記号や換算行列要素については D.A. Varshalovich らの教科書 [86] が詳しい。

B.3.1 スピン-スピン演算子

以下のスピン-スピン演算子の行列要素の公式を導出する。

スピン-スピン演算子

$$\begin{aligned} & \langle [L' [S'_1 S'_2]_{S'}]_{J'} | (\vec{\mathcal{O}}_1 \cdot \vec{\mathcal{O}}_2) | [L [S_1 S_2]_S]_J \rangle \\ & = (-1)^{S'_2 + S + S_1} \delta_{JJ'} \delta_{J_z J'_z} \delta_{LL'} \delta_{SS'} \begin{Bmatrix} S'_1 & S'_2 & S' \\ S_2 & S_1 & 1 \end{Bmatrix} \langle S'_1 || \mathcal{O}_1 || S_1 \rangle \langle S'_2 || \mathcal{O}_2 || S_2 \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.3.10})$$

ここで $\begin{Bmatrix} S'_1 & S'_2 & S' \\ S_2 & S_1 & 1 \end{Bmatrix}$ は 6 - j 記号である。また $\langle S'_1 || \mathcal{O}_1 || S_1 \rangle$ などの二重線で書かれた行列要素は換算行列要素と呼ばれ、後述する Wigner-Eckart の定理から出てくる。換算行列要素は角運動量量子数 S_1 の z 成分の固有値に依存せず、固有値の情報 Clebsch-Gordan 係数が持つ。

まずテンソル積を用いた次の行列要素を計算する。

$$\begin{aligned} & \langle [L' [S'_1 S'_2]_{S'}]_{J'} | (\vec{\mathcal{O}}_1 \cdot \vec{\mathcal{O}}_2) | [L [S_1 S_2]_S]_J \rangle \\ & = \langle [L' S']_{J'} | (-\sqrt{3}) [0 [O_1 O_2]_0]_0 | [LS]_J \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.3.11})$$

ここで添え字 1, 2 は始 (終) 状態の粒子 1, 粒子 2 を表す。 S は粒子 1 のスピン S_1 と粒子 2 のスピン S_2 の合成スピン、 L は軌道角運動量、 J は S と L の合成角運動量、つまり全角運動量であ

る。Wigner-Eckart の定理より

$$\begin{aligned} & -\sqrt{3} \langle [L'S']_{J'} | [0 [O_1 O_2]_0]_0 | [LS]_J \rangle \\ & = -\sqrt{3} \frac{1}{\hat{J}} (JJ_z 00 | J' J'_z) \langle [L'S']_{J'} | [0 [O_1 O_2]_0]_0 | [LS]_J \rangle . \end{aligned} \quad (\text{B.3.12})$$

となる。ここで $\hat{J} = \sqrt{2J+1}$ である。また $(J_1 J_{1z} J_2 J_{2z} | JJ_z) = C_{J_1 J_{1z} J_2 J_{2z}}^{JJ_z}$ は Clebsch-Gordan 係数を表す。よって

$$(\text{B.3.12}) = -\sqrt{3} \frac{1}{\hat{J}} \delta_{JJ'} \delta_{J_z J'_z} \langle [L'S']_{J'} | [0 [O_1 O_2]_0]_0 | [LS]_J \rangle . \quad (\text{B.3.13})$$

と変形される。次に換算行列要素と 9-j 記号についての関係式

$$\langle [j'_1 j'_2]_{J'} | [k_1 k_2]_K | [j_1 j_2]_J \rangle = \hat{J}' \hat{K} \hat{J} \begin{Bmatrix} j'_1 & j'_2 & J' \\ j_1 & j_2 & J \\ k_1 & k_2 & K \end{Bmatrix} \langle j'_1 | k_1 | j_1 \rangle \langle j'_2 | k_2 | j_2 \rangle , \quad (\text{B.3.14})$$

を用いて軌道角運動量部分とスピン部分を分離する。

$$\begin{aligned} & \langle [L'S']_{J'} | [0 [O_1 O_2]_0]_0 | [LS]_J \rangle \\ & = \hat{J}' \hat{0} \hat{J} \begin{Bmatrix} L' & S' & J' \\ L & S & J \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \langle L' || 1 || L \rangle \langle S' || [O_1 O_2]_0 || S \rangle . \end{aligned} \quad (\text{B.3.15})$$

3 行目が全て 0 になる 9-j 記号は

$$\begin{Bmatrix} L' & S' & J' \\ L & S & J \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} = \frac{\delta_{LL'} \delta_{SS'} \delta_{JJ'}}{\hat{L} \hat{S}' \hat{J}'} , \quad (\text{B.3.16})$$

と変形される。また軌道角運動量演算子 L の換算行列要素は

$$\langle L' || 1 || L \rangle = \hat{L} \delta_{LL'} , \quad (\text{B.3.17})$$

である。これらを用いると

$$\begin{aligned} (\text{B.3.13}) & = -\sqrt{3} \hat{J} \delta_{JJ'} \delta_{J_z J'_z} \begin{Bmatrix} L' & S' & J' \\ L & S & J \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \langle L' || 1 || L \rangle \langle S' || [O_1 O_2]_0 || S \rangle \\ & = -\sqrt{3} \frac{1}{\hat{S}} \delta_{JJ'} \delta_{J_z J'_z} \delta_{LL'} \delta_{SS'} \langle S' || [O_1 O_2]_0 || S \rangle , \end{aligned} \quad (\text{B.3.18})$$

と変形できる。

次にスピン-スピン部分を分離する。

$$\begin{aligned} \langle S' || [O_1 O_2]_2 || S \rangle & = \langle [S'_1 S'_2]_{S'} || [O_1 O_2]_2 || [S_1 S_2]_S \rangle \\ & = \hat{S}' \hat{0} \hat{S} \begin{Bmatrix} S'_1 & S'_2 & S' \\ S_1 & S_2 & S \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \langle S'_1 || O_1 || S_1 \rangle \langle S'_2 || O_2 || S_2 \rangle . \end{aligned} \quad (\text{B.3.19})$$

この 9-j 記号は 6-j 記号で書くことができる。

$$\begin{Bmatrix} S'_1 & S'_2 & S' \\ S_1 & S_2 & S \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix} = (-1)^{S'_2 + S + S_1 + 1} \frac{1}{\hat{S}_1} \begin{Bmatrix} S'_1 & S'_2 & S' \\ S_2 & S_1 & 1 \end{Bmatrix} . \quad (\text{B.3.20})$$

以上より、スピン-スピン演算子の行列要素を求める公式が得られる。

$$\begin{aligned}
 (B.3.18) &= -\sqrt{3}\hat{S}\delta_{JJ'}\delta_{J_zJ'_z}\delta_{LL'}\delta_{SS'}(-1)^{S'_2+S+S_1+1}\frac{1}{\hat{S}_1}\left\{\begin{matrix} S'_1 & S'_2 & S' \\ & S_2 & S_1 \\ & & 1 \end{matrix}\right\}\langle S'_1||O_1||S_1\rangle\langle S'_2||O_2||S_2\rangle \\
 &= (-1)^{S'_2+S+S_1}\delta_{JJ'}\delta_{J_zJ'_z}\delta_{LL'}\delta_{SS'}\left\{\begin{matrix} S'_1 & S'_2 & S' \\ & S_2 & S_1 \\ & & 1 \end{matrix}\right\}\langle S'_1||O_1||S_1\rangle\langle S'_2||O_2||S_2\rangle.
 \end{aligned}
 \tag{B.3.21}$$

B.3.2 テンソル演算子

次にテンソル演算子の行列要素を計算する。

テンソル演算子公式

$$\begin{aligned}
 &\langle [L' [S'_1 S'_2]_{S'}]_{J'} | S_{12}(\hat{r}) | [L [S_1 S_2]_S]_J \rangle \\
 &= (-1)^{2L'-2} 5\sqrt{6}\delta_{JJ'}\delta_{J_zJ'_z}\hat{J}'\hat{L}'\hat{S}'\hat{S}C_{L'020}^{L0} \left\{\begin{matrix} L' & S' & J' \\ L & S & J \\ 2 & 2 & 0 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} S'_1 & S'_2 & S' \\ S_1 & S_2 & S \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}\right\} \\
 &\times \langle S'_1||O_1||S_1\rangle\langle S'_2||O_2||S_2\rangle.
 \end{aligned}
 \tag{B.3.22}$$

テンソル演算子はテンソル積を用いて

$$S_{12}(\hat{r}) = 3 \left(\vec{O}_1 \cdot \hat{r} \right) \left(\vec{O}_2 \cdot \hat{r} \right) - \vec{O}_1 \cdot \vec{O}_2 \tag{B.3.23}$$

$$= \sqrt{24\pi} [Y_2 [O_1 O_2]_2]_0, \tag{B.3.24}$$

と書かれる。ここで Y_2 は球面調和関数である。次に Wigner-Eckart の定理を使う。

$$\sqrt{24\pi} \langle [L' [S'_1 S'_2]_{S'}]_{J'} | [Y_2 [O_1 O_2]_2]_0 | [L [S_1 S_2]_S]_J \rangle \tag{B.3.25}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\hat{J}} (J J_z 00 | J' J'_z) \sqrt{24\pi} \langle [L' [S'_1 S'_2]_{S'}]_{J'} | [Y_2 [O_1 O_2]_2]_0 | [L [S_1 S_2]_S]_J \rangle \\
 &= \frac{1}{\hat{J}} \delta_{JJ'} \delta_{J_zJ'_z} \sqrt{24\pi} \langle [L' [S'_1 S'_2]_{S'}]_{J'} | [Y_2 [O_1 O_2]_2]_0 | [L [S_1 S_2]_S]_J \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{B.3.26}$$

$(J_1 J_{1z} J_2 J_{2z} | J J_z)$ は Clebsch-Gordan 係数 $C_{J_1 J_{1z} J_2 J_{2z}}^{J J_z}$ である。スピン-スピン演算子の場合と同様に $9-j$ 記号を用いて軌道角運動量部分とスピン部分を分離する。

$$\begin{aligned}
 &\langle [L' [S'_1 S'_2]_{S'}]_{J'} | [Y_2 [O_1 O_2]_2]_0 | [L [S_1 S_2]_S]_J \rangle \\
 &= \langle [L' S']_{J'} | [Y_2 [O_1 O_2]_2]_0 | [L S]_J \rangle \\
 &= \hat{J}' \hat{0} \hat{J} \left\{\begin{matrix} L' & S' & J' \\ L & S & J \\ 2 & 2 & 0 \end{matrix}\right\} \langle L' || Y_2 || L \rangle \langle S' || [O_1 O_2]_2 || S \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{B.3.27}$$

球面調和関数の換算行列要素は

$$\langle L' || Y_k || L \rangle = (-1)^{2L'-k} \frac{\hat{L}' \hat{k}}{\sqrt{4\pi}} (L' 0 k 0 | L 0), \tag{B.3.28}$$

である。よって

$$\begin{aligned}
(B.3.26) &= \frac{1}{\hat{J}} \delta_{JJ'} \delta_{J_z J'_z} \sqrt{24\pi} \hat{J}' \hat{0} \hat{J} \begin{Bmatrix} L' & S' & J' \\ L & S & J \\ 2 & 2 & 0 \end{Bmatrix} \langle L' || Y_2 || L \rangle \langle S' || [O_1 O_2]_2 || S \rangle \\
&= \sqrt{24\pi} \delta_{JJ'} \delta_{J_z J'_z} \hat{J}' \begin{Bmatrix} L' & S' & J' \\ L & S & J \\ 2 & 2 & 0 \end{Bmatrix} \times (-1)^{2L'-2} \frac{\hat{L}' \hat{2}}{\sqrt{4\pi}} C_{L'020}^{L0} \langle S' || [O_1 O_2]_2 || S \rangle \\
&= (-1)^{2L'-2} \sqrt{6} \sqrt{5} \delta_{JJ'} \delta_{J_z J'_z} \hat{J}' \hat{L}' \begin{Bmatrix} L' & S' & J' \\ L & S & J \\ 2 & 2 & 0 \end{Bmatrix} C_{L'020}^{L0} \langle S' || [O_1 O_2]_2 || S \rangle ,
\end{aligned} \tag{B.3.29}$$

となる。次にスピン演算子を分離する。

$$\langle [S'_1 S'_2]_{S'} || [O_1 O_2]_2 || [S_1 S_2]_S \rangle = \hat{S}' \hat{2} \hat{S} \begin{Bmatrix} S'_1 & S'_2 & S' \\ S_1 & S_2 & S \\ 1 & 1 & 2 \end{Bmatrix} \langle S'_1 || O_1 || S_1 \rangle \langle S'_2 || O_2 || S_2 \rangle . \tag{B.3.30}$$

ここまでをすべて合わせるとテンソル演算子行列要素の公式が得られる。

$$\begin{aligned}
(B.3.29) &= (-1)^{2L'-2} \sqrt{6} \sqrt{5} \delta_{JJ'} \delta_{J_z J'_z} \hat{J}' \hat{L}' \begin{Bmatrix} L' & S' & J' \\ L & S & J \\ 2 & 2 & 0 \end{Bmatrix} C_{L'020}^{L0} \hat{S}' \hat{2} \hat{S} \begin{Bmatrix} S'_1 & S'_2 & S' \\ S_1 & S_2 & S \\ 1 & 1 & 2 \end{Bmatrix} \\
&\quad \times \langle S'_1 || O_1 || S_1 \rangle \langle S'_2 || O_2 || S_2 \rangle \\
&= (-1)^{2L'-2} \sqrt{6} \sqrt{5} \delta_{JJ'} \delta_{J_z J'_z} \hat{J}' \hat{L}' \hat{S}' \hat{S} C_{L'020}^{L0} \begin{Bmatrix} L' & S' & J' \\ L & S & J \\ 2 & 2 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} S'_1 & S'_2 & S' \\ S_1 & S_2 & S \\ 1 & 1 & 2 \end{Bmatrix} \\
&\quad \times \langle S'_1 || O_1 || S_1 \rangle \langle S'_2 || O_2 || S_2 \rangle .
\end{aligned} \tag{B.3.31}$$

B.3.3 角運動量演算子の換算行列要素

スピン-スピン演算子の公式 (B.3.10) やテンソル演算子の公式 (B.3.22) には角運動量演算子の換算行列要素が含まれる。これは角運動量演算子の z 成分を用いることで容易に求めることができる。換算行列要素については既に挙げた D.A. Varshalovich らの教科書 [86] の他、H. Georgi の教科書 [87] も参考にしている。ここでは下記の式を基に具体的に値を求める。

角運動量演算子の z 成分と換算行列要素の関係式

$$\langle s_1 | O_z | s_2 \rangle = \frac{1}{\hat{s}_1} (s_2 m_2 1 0 | s_1 m_1) \langle s_1 || O || s_2 \rangle \tag{B.3.32}$$

スピン 1/2 演算子

$$\begin{aligned}
\langle 1/2 | \sigma_z | 1/2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2 \times 1/2 + 1}} \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} 1 0 \middle| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right) \langle 1/2 || \sigma || 1/2 \rangle , \\
1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} C_{1/2, 1/2, 1, 0}^{1/2, 1/2} \langle 1/2 || \sigma || 1/2 \rangle , \\
1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \langle 1/2 || \sigma || 1/2 \rangle , \\
\langle 1/2 || \sigma || 1/2 \rangle &= \sqrt{6} .
\end{aligned} \tag{B.3.33}$$

スピン 1 演算子

$$\begin{aligned}
\langle 1|T_z|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2 \times 1 + 1}} (1110|11) \langle 1||T||1\rangle, \\
1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} C_{1,1,1,0}^{1,1} \langle 1||T||1\rangle, \\
1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1||T||1\rangle, \\
\langle 1||T||1\rangle &= \sqrt{6}. \tag{B.3.34}
\end{aligned}$$

スピン 3/2 演算子

$$\begin{aligned}
\langle 3/2|\Sigma_z|3/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2 \times 3/2 + 1}} \left(\begin{array}{cc} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{array} \middle| \begin{array}{cc} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{array} \right) \langle 3/2||\Sigma||3/2\rangle, \\
\frac{3}{2} &= \frac{1}{2} C_{3/2,3/2,1,0}^{3/2,3/2} \langle 3/2||\Sigma||3/2\rangle, \\
\frac{3}{2} &= \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{3}{5}} \langle 3/2||\Sigma||3/2\rangle, \\
\langle 3/2||\Sigma||3/2\rangle &= \sqrt{15}. \tag{B.3.35}
\end{aligned}$$

スピン 1 \rightarrow 0 遷移演算子

$$\begin{aligned}
\langle 0|\epsilon_z|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2 \times 0 + 1}} (1010|00) \langle 0||\epsilon||1\rangle, \\
1 &= 1 \times C_{1,0,1,0}^{0,0} \langle 0||\epsilon||1\rangle, \\
1 &= 1 \times \left(-\sqrt{\frac{1}{3}} \right) \langle 0||\epsilon||1\rangle, \\
\langle 0||\epsilon||1\rangle &= -\sqrt{3}. \tag{B.3.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle 1|\epsilon_z^\dagger|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2 \times 1 + 1}} (0010|10) \langle 1||\epsilon^\dagger||0\rangle, \\
1 &= \sqrt{\frac{1}{3}} \times C_{0,0,1,0}^{1,0} \langle 1||\epsilon^\dagger||0\rangle, \\
1 &= \sqrt{\frac{1}{3}} \times 1 \langle 1||\epsilon^\dagger||0\rangle, \\
\langle 1||\epsilon^\dagger||0\rangle &= \sqrt{3}. \tag{B.3.37}
\end{aligned}$$

スピン 3/2 \rightarrow 1/2 遷移演算子

$$\begin{aligned}
\langle 1/2|S_z^t|3/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2 \times 1/2 + 1}} \left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{array} \middle| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array} \right) \langle 1/2||S^t||3/2\rangle, \\
\sqrt{\frac{2}{3}} &= \sqrt{\frac{1}{2}} \times C_{3/2,1/2,1,0}^{1/2,1/2} \langle 1/2||S^t||3/2\rangle, \\
\sqrt{\frac{2}{3}} &= \sqrt{\frac{1}{2}} \times \left(-\sqrt{\frac{1}{3}} \right) \langle 1/2||S^t||3/2\rangle, \\
\langle 1/2||S^t||3/2\rangle &= -2. \tag{B.3.38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle 3/2|S_z^{t\dagger}|1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2 \times 3/2 + 1}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \right) \langle 3/2||S^{t\dagger}||1/2\rangle, \\
\sqrt{\frac{2}{3}} &= \frac{1}{2} \times C_{1/2,1/2,1,0}^{3/2,1/2} \langle 3/2||S^{t\dagger}||1/2\rangle, \\
\sqrt{\frac{2}{3}} &= \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{2}{3}} \langle 3/2||S^{t\dagger}||1/2\rangle, \\
\langle 3/2||S^{t\dagger}||1/2\rangle &= 2. \tag{B.3.39}
\end{aligned}$$

B.4 角運動量関連の公式等

ここでは付録 B 内で用いた公式などをまとめておく。

Wigner-Eckart の定理:

角運動量 J とその z 成分 M を持つ状態がテンソル演算子 \mathcal{O}_m^k により角運動量 J', M' へ遷移する行列要素は、クレブシュ-ゴルダン係数と換算行列要素に分離される。 k はテンソル演算子の階数で m は $m = -k, -k+1, \dots, k-1, k$ である。

$$\begin{aligned}
&\langle J'M'|\mathcal{O}_m^k|JM\rangle \\
&= (-1)^{J'-M'} \begin{pmatrix} J' & k & J \\ -M' & m & M \end{pmatrix} \langle J'||\mathcal{O}^k||J\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2J+1}} (JMkm|J'M') \langle J'||\mathcal{O}^k||J\rangle. \tag{B.4.1}
\end{aligned}$$

クレブシュ-ゴルダン係数は角運動量の z 成分へ依存するが、換算行列要素は依存しない。角運動量演算子に対する換算行列要素の具体的な計算は付録 B.3.3 を参照。また球面調和関数の換算行列要素は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\langle l'||Y_k||l\rangle &= (-1)^{l'} \frac{\hat{l}'\hat{k}\hat{l}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} l' & k & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{2l'-k} \frac{\hat{l}'\hat{k}}{\sqrt{4\pi}} (l'0 k0|l0). \tag{B.4.2}
\end{aligned}$$

ここで \hat{l} などは $\hat{l} = \sqrt{2l+1}$ である。

テンソル積:

$$\mathcal{O}_m^k \equiv [\mathcal{O}_{k_1} \mathcal{O}_{k_2}]_m^k \tag{B.4.3}$$

$$= \sum_{m_1, m_2} (k_1 m_1 k_2 m_2 | km) \mathcal{O}_{k_1 m_1} \mathcal{O}_{k_2 m_2}. \tag{B.4.4}$$

内積や外積はテンソル積を用いて

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -\sqrt{3} [AB]_0^0, \tag{B.4.5}$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_\mu = -\sqrt{2} i [AB]_\mu^1, \tag{B.4.6}$$

と書ける。

テンソル積の換算行列要素と 9- j 記号の関係式:

テンソル積の換算行列要素は 9- j 記号を用いて演算子を分離できる。

$$\langle [j'_1 j'_2]_{J'} || [k_1 k_2]_K || [j_1 j_2]_J \rangle = \hat{J}' \hat{K} \hat{J} \left\{ \begin{array}{ccc} j'_1 & j'_2 & J' \\ j_1 & j_2 & J \\ k_1 & k_2 & K \end{array} \right\} \langle j'_1 || k_1 || j_1 \rangle \langle j'_2 || k_2 || j_2 \rangle . \quad (\text{B.4.7})$$

換算行列要素の特殊例:

$$\langle J' || 1 || J \rangle = \hat{J} \delta_{JJ'} \quad (\text{B.4.8})$$

9- j 記号の特殊例:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j'_1 & j'_2 & J' \\ j_1 & j_2 & J \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} = \frac{\delta_{j_1 j'_1} \delta_{j_2 j'_2} \delta_{JJ'}}{\hat{j}'_1 \hat{j}'_2 \hat{J}'} \quad (\text{B.4.9})$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j'_1 & j'_2 & J' \\ j_1 & j_2 & J \\ k & k & 0 \end{array} \right\} = (-1)^{j'_2 + J' + j_1 + k} \frac{1}{\hat{j}'_1 \hat{k}'} \left\{ \begin{array}{ccc} j'_1 & j'_2 & J' \\ j_2 & j_1 & k \end{array} \right\} \quad (\text{B.4.10})$$

式 (B.4.10) は 6- j 記号と 9- j 記号を関係づける定義式でもある。

付録 C

ガウス展開法

この章では連立シュレディンガー方程式を数値的に解く際に利用しているガウス展開法について解説する。主な参考文献は肥山氏らのレビュー論文 [77, 78] である。

C.1 概観

ハドロン分子模型によるエキゾチックハドロンの研究では 2 体系の束縛問題として動径シュレディンガー方程式を解いている。つまり二階微分方程式を解くのだがこれを解析的に解くことは非常に困難なので数値計算が必要となる。通常、高階微分方程式を解くには連立一階微分方程式に変形した上で差分して解く。手法として例えばオイラー法、テイラー法、ルンゲクッタ法などがある。これらは境界値問題と呼ばれており、解を得るには微分の階数に応じた境界条件 (初期条件) を必要とする。

二階微分方程式を扱う手法としてはシューティング法や緩和法があり、ひとつのシュレディンガー方程式を解くためには 2 つの初期条件を必要とする。正しい解を得るにはその問題を解くのに適した初期条件を用意しなければいけないのだが、それは必ずしも簡単とは限らない。特に結合チャンネル問題の場合には連立シュレディンガー方程式を解く必要があり、方程式の数だけ用意する初期条件が多くなってしまう。

ガウス展開法はその困難を解決する手段の一つである。変分法的一种であり、初期条件として必要な試行関数をガウシアンで展開し、その重ね合わせで表現して用意する。そうすると微分方程式を解くという問題から、エネルギーを固有値、展開係数を成分に持つベクトルを固有ベクトルにもつ固有値問題に置き換わる。そして得られた展開係数と展開に使用したガウシアンからほしい固有関数を得ることができる。

C.2 Rayleigh-Ritz の変分原理

ガウス展開法は Rayleigh-Ritz の変分原理を基にしている。ハミルトニアン H 、固有エネルギー E 、固有関数 ψ を用いてシュレディンガー方程式を

$$(H - E)\psi = 0 \quad (\text{C.2.1})$$

とする。ここで波動関数を二乗可積分基底関数で展開する。

$$\psi = \sum_{n=1}^{n_{max}} C_n \phi_n. \quad (\text{C.2.2})$$

すると式 (C.2.1) は

$$\sum_{n'=1}^{n_{max}} (H_{nn'} - EN_{nn'}) C_{n'} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, n_{max}). \quad (C.2.3)$$

となり、一般化された行列の固有値問題に置き換わる。このときの行列要素は

$$H_{nn'} = \langle \phi_n | H | \phi_{n'} \rangle, \quad (C.2.4)$$

$$N_{nn'} = \langle \phi_n | 1 | \phi_{n'} \rangle. \quad (C.2.5)$$

で与えられる。この固有値問題を解くことで固有エネルギー E と、展開係数 C_n を成分に持つ固有ベクトルが得られる。これが Rayleigh-Ritz の変分原理である。

C.3 ガウシアン展開

Rayleigh-Ritz の変分原理の二乗可積分基底関数としてガウシアンを用いるのがガウス展開法である。ガウシアンを使う利点として [77] の言葉を借りると (1) 核力ポテンシャルの近距離の振る舞いと遠距離のテールを表しやすい (2) ガウス積分が使える行列要素の計算が容易であることが挙げられる。次の 2 体シュレディンガー方程式を考える。

$$\left[-\frac{1}{2\mu} \vec{\nabla}^2 + V(r) - E \right] \psi_{lm}(\vec{r}) = 0. \quad (C.3.1)$$

μ は換算質量、 $V(r)$ は中心力ポテンシャルのような 2 体間の距離にのみ依存するポテンシャルとする。 l は方位量子数 (軌道角運動量)、 m は磁気量子数である。波動関数 $\psi_{lm}(\vec{r})$ をガウシアン基底関数で展開する。

$$\psi_{lm}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{n_{max}} C_n \phi_{nlm}(\vec{r}), \quad (C.3.2)$$

$$\phi_{nlm} = N_{nl} r^l e^{-\nu_n r^2} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (C.3.3)$$

$$N_{nl} = \sqrt{\frac{2^{l+2} (2\nu_n)^{l+3/2}}{\sqrt{\pi} (2l+1)!!}}. \quad (C.3.4)$$

N_{nl} は $\langle \phi_{nlm} | \phi_{nlm} \rangle$ とするための規格化係数、 ν_n はガウシアンサイズパラメータ、 Y_{lm} は球面調和関数、 $(2l+1)!!$ は二重階乗である。

ガウシアンサイズパラメータは [77] に基づいて

$$\begin{aligned} \nu_n &= \frac{1}{r_n^2} \\ r_n &= r_1 a^{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots, n_{max}) \end{aligned} \quad (C.3.5)$$

と取る。このサイズパラメータは問題ごとに調節する必要がある。具体的には次の 3 パラメータがある。

- n_{max} ~ 展開次数
- r_1 ~ 系の典型的な最小サイズ
- r_{max} ~ 系の典型的な最大サイズ

例えば OPEP の場合、遠方のテールは数 fm ほど伸びているので最大サイズはそれよりは大きく取るべきであり、近距離では $r = 0$ の値は中心力の底を表すので最小サイズはなるべく小さく取るべきである。展開次数は r_1 から r_{max} の間をどれだけ分割するかに対応するのでなるべく大きな次数を取ると良いが、その分だけ計算コストが大きくなるのでリソースと相談する。

ここで以降の計算をしやすいするための参考文献 [77, 78] とは異なる変数

$$b_n = \sqrt{\frac{1}{2\nu_n}} \quad (\text{C.3.6})$$

を導入する。この時、式 (C.3.3) は

$$\phi_{nlm}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{2}{\Gamma(l+3/2)b_n^3}} \left(\frac{r}{b_n}\right)^l \exp\left(-\frac{r^2}{2b_n^2}\right) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{C.3.7})$$

となる。念の為 2 つの表記の関係を確かめておく。

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\Gamma(l+3/2)b_n^3}} \left(\frac{1}{b_n}\right)^l &= \sqrt{\frac{2}{(l+1/2)\frac{(2l)!}{2^{2l}l!}\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2\nu_n}\right)^{3/2}}} \times (2\nu_n)^{l+2} \\ &= \sqrt{\frac{2^{2l+2}(2\nu_n)^{l+3/2}}{(2l+1)\frac{(2l)!}{l!}\sqrt{\pi}}} \\ &= \sqrt{\frac{2^{2l+2}(2\nu_n)^{l+3/2}}{2^l(2l+1)!!\sqrt{\pi}}} \\ &= \sqrt{\frac{2^{l+2}(2\nu_n)^{l+3/2}}{\sqrt{\pi}(2l+1)!!}}. \end{aligned} \quad (\text{C.3.8})$$

途中で階乗と二重階乗の関係式

$$(2l+1)! = 2^l l! (2l+1)!! \quad (\text{C.3.9})$$

を使った。

C.4 ガンマ関数

計算に必要となるガンマ関数 $\Gamma(n)$ の定義や関係式についてまとめておく。

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty dt t^{n-1} e^{-t} \quad (\text{C.4.1})$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \sqrt{\pi} \quad (\text{C.4.2})$$

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) &= \Gamma\left((n+1) + \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.4.3})$$

C.5 一般化行列固有値問題

ガウシアンで展開した固有関数を用いるとシュレディンガー方程式は次のような固有値問題に置き換わる。

$$\begin{pmatrix} T_{1,1} + V_{1,1} & T_{1,2} + V_{1,2} & \cdots & T_{1,n_{max}} + V_{1,n_{max}} \\ T_{2,1} + V_{2,1} & T_{2,2} + V_{2,2} & \cdots & T_{2,n_{max}} + V_{2,n_{max}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n_{max},1} + V_{n_{max},1} & T_{n_{max},2} + V_{n_{max},2} & \cdots & T_{n_{max},n_{max}} + V_{n_{max},n_{max}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{n_{max}} \end{pmatrix} \\
 = E \begin{pmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} & \cdots & N_{1,n_{max}} \\ N_{2,1} & N_{2,2} & \cdots & N_{2,n_{max}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{n_{max},1} & N_{n_{max},2} & \cdots & N_{n_{max},n_{max}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{n_{max}} \end{pmatrix}. \quad (C.5.1)$$

よって以下の行列要素を計算する必要がある。

$$N_{n,n'} = \langle \phi_{nlm} | 1 | \phi_{n'l'm'} \rangle \delta_{m,m'} \quad (C.5.2)$$

$$T_{n,n'} = \langle \phi_{nlm} | -\frac{1}{2\mu} \nabla^2 | \phi_{n'l'm'} \rangle \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \quad (C.5.3)$$

$$V_{n,n'} = \langle \phi_{nlm} | V(r) | \phi_{n'l'm'} \rangle \delta_{m,m'} \quad (C.5.4)$$

以降では動径波動関数

$$rR_{nl}(r) = \sqrt{\frac{2}{\Gamma(l+3/2)b_n^3}} \left(\frac{r^{l+1}}{b_n^l} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{2b_n^2}\right) \quad (C.5.5)$$

を用いて各行列要素を計算する。

C.5.1 ノルムパート

まず最も単純なノルムパート $N_{n,n'}$ を計算する。

$$\begin{aligned} \langle rR_{n_1 l_1} | rR_{n_2 l_2} \rangle &= \int_0^\infty dr \frac{2}{\sqrt{\Gamma(l_1+3/2)}\sqrt{\Gamma(l_2+3/2)}} \\ &\quad \times \frac{r^{l_1+l_2+2}}{b_{n_1}^{l_1+3/2} b_{n_2}^{l_2+3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2} \frac{b_{n_1}^2 + b_{n_2}^2}{b_{n_1}^2 b_{n_2}^2}\right). \end{aligned} \quad (C.5.6)$$

ここで $n = (l_1 + l_2)/2 + 1$ と置換すると式 (C.5.6) は次のようになる。

$$\begin{aligned} \langle rR_{n_1 l_1} | rR_{n_2 l_2} \rangle &= \frac{2}{\sqrt{\Gamma(l_1+3/2)}\sqrt{\Gamma(l_2+3/2)}} \frac{1}{b_{n_1}^{l_1+3/2} b_{n_2}^{l_2+3/2}} \\ &\quad \times \int_0^\infty dr r^{2n} \exp\left(-\frac{r^2}{2} \frac{b_{n_1}^2 + b_{n_2}^2}{b_{n_1}^2 b_{n_2}^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Gamma(l_1+3/2)}\sqrt{\Gamma(l_2+3/2)}} \frac{1}{b_{n_1}^{l_1+3/2} b_{n_2}^{l_2+3/2}} \Gamma(n+1/2) \left(\frac{2b_{n_1}^2 b_{n_2}^2}{b_{n_1}^2 + b_{n_2}^2}\right)^{n+1/2} \\ &= \frac{\Gamma(l_1/2 + l_2/2 + 3/2)}{\sqrt{\Gamma(l_1+3/2)}\sqrt{\Gamma(l_2+3/2)}} \frac{1}{b_{n_1}^{l_1+3/2} b_{n_2}^{l_2+3/2}} \left(\frac{2b_{n_1}^2 b_{n_2}^2}{b_{n_1}^2 + b_{n_2}^2}\right)^{l_1/2+l_2/2+3/2} \\ &= \frac{\Gamma(l_1/2 + l_2/2 + 3/2)}{\sqrt{\Gamma(l_1+3/2)}\sqrt{\Gamma(l_2+3/2)}} \left(\frac{b_{n_1}}{b_{n_2}}\right)^{\frac{l_2-l_1}{2}} \left(\frac{2b_{n_1} b_{n_2}}{b_{n_1}^2 + b_{n_2}^2}\right)^{l_1/2+l_2/2+3/2}. \end{aligned} \quad (C.5.7)$$

一行目から二行目への変形は $a = (b_{n_1}^2 + b_{n_2}^2)/(b_{n_1}^2 b_{n_2}^2)$ として次の式を用いた。

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1/2) &= \int_0^\infty dt t^{n-1/2} e^{-t} \quad \left(t \rightarrow \frac{a}{2} r^2\right) \\ &= 2 \left(\frac{a}{2}\right)^{n+1/2} \int_0^\infty dr r^{2n} e^{-\frac{a}{2} r^2}\end{aligned}\quad (\text{C.5.8})$$

$$\rightarrow 2 \int_0^\infty dr r^{2n} e^{-\frac{a}{2} r^2} = \Gamma(n+1/2) \left(\frac{2}{a}\right)^{n+1/2}.\quad (\text{C.5.9})$$

特に $l_1 = l_2 = l$ の時、

$$\langle rR_{n_1 l_1} | rR_{n_2 l_2} \rangle = \left(\frac{2b_{n_1} b_{n_2}}{b_{n_1}^2 + b_{n_2}^2}\right)^{l+3/2}\quad (\text{C.5.10})$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{\nu_{n_1} \nu_{n_2}}}{\nu_{n_1} + \nu_{n_2}}\right)^{l+3/2}\quad (\text{C.5.11})$$

C.5.2 運動項パート

次は運動項部分を計算する。 $l_1 = l_2 = l$ とする。なおそれ以外の行列要素は 0 である。

$$\langle rR_{n_1 l} | \nabla^2 | rR_{n_2 l} \rangle = \langle rR_{n_1 l} | \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) | rR_{n_2 l} \rangle\quad (\text{C.5.12})$$

微分項に注目する。

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} rR_{n_2 l} = \sqrt{\frac{2}{\Gamma(l+3/2)b_{n_2}^3}} \left(\frac{1}{b_{n_2}^l}\right) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[r^{l+1} \exp\left(-\frac{r^2}{2b_{n_2}^2}\right)\right],\quad (\text{C.5.13})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[r^{l+1} \exp\left(-\frac{r^2}{2b_{n_2}^2}\right)\right] = \left[(l+1)lr^{l-1} - (2l+3)\frac{r^{l+1}}{b_{n_2}^2} + \frac{r^{l+3}}{b_{n_2}^4}\right] \exp\left(-\frac{r^2}{2b_{n_2}^2}\right).\quad (\text{C.5.14})$$

よって

$$\begin{aligned}\langle rR_{n_1 l} | \frac{\partial^2}{\partial r^2} | rR_{n_2 l} \rangle &= \frac{2}{\Gamma(l+3/2)(b_{n_1} b_{n_2})^{l+3/2}} \\ &\times \int_0^\infty \left[l(l+1)r^{2l} - (2l+3)\frac{r^{2(l+1)}}{b_{n_2}^2} + \frac{r^{2(l+2)}}{b_{n_2}^4}\right] \exp\left(-\frac{r^2}{2}\frac{b_{n_1}^2 + b_{n_2}^2}{b_{n_1}^2 b_{n_2}^2}\right) dr\end{aligned}\quad (\text{C.5.15})$$

式 (C.5.12) の右辺第二項が式 (C.5.15) の右辺第一項とキャンセルするので

$$\begin{aligned}\langle rR_{n_1 l} | \nabla^2 | rR_{n_2 l} \rangle &= \frac{2}{\Gamma(l+3/2)} \frac{1}{(b_{n_1} b_{n_2})^{l+3/2}} \\ &\times \int_0^\infty dr \left[-(2l+3)\frac{r^{2(l+1)}}{b_{n_2}^2} + \frac{r^{2(l+2)}}{b_{n_2}^4}\right] \exp\left(-\frac{r^2}{2}\frac{b_{n_1}^2 + b_{n_2}^2}{b_{n_1}^2 b_{n_2}^2}\right),\end{aligned}\quad (\text{C.5.16})$$

を計算すれば良い。以下のガウス積分を用いる。

$$\int_0^\infty dr r^{2n} e^{-ar^2} = \frac{1}{2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}}\quad (\text{C.5.17})$$

$n = l+1$ のとき

$$\frac{1}{2} \times \frac{(2(l+1))!}{2^{2(l+1)} (l+1)!} \sqrt{\frac{\pi}{a^{2l+3}}},\quad (\text{C.5.18})$$

$n = l + 2$ のとき

$$\frac{1}{2} \times \frac{(2(l+2))!}{2^{2(l+2)}(l+2)!} \sqrt{\frac{\pi}{a^{2l+5}}} = \frac{(2l+4)(2l+3)}{2^2(l+2)} \times \frac{1}{2a} \times \frac{(2(l+1))!}{2^{2(l+1)}(l+1)!} \sqrt{\frac{\pi}{a^{2l+3}}}. \quad (\text{C.5.19})$$

これらを $a = (b_{n_1}^2 + b_{n_2}^2)/(2b_{n_1}^2 b_{n_2}^2)$ として式 (C.5.16) に代入する。

$$\begin{aligned} \langle rR_{n_1 l} | \nabla^2 | rR_{n_2 l} \rangle &= \frac{2}{\Gamma(l+3/2)} \frac{1}{(b_{n_1} b_{n_2})^{l+3/2}} \\ &\times \left[-\frac{2l+3}{2b_{n_2}^2} + \frac{1}{2b_{n_2}^4} \frac{(2l+4)(2l+3)}{2^2(l+2)} \frac{1}{a} \right] \\ &\times \frac{(2(l+1))!}{2^{2(l+1)}(l+1)!} \sqrt{\pi} \left(\frac{2b_{n_1}^2 b_{n_2}^2}{b_{n_1}^2 + b_{n_2}^2} \right)^{l+3/2} \\ &= \frac{2}{\Gamma(l+3/2)} \frac{1}{(b_{n_1} b_{n_2})^{l+3/2}} \\ &\times \frac{2l+3}{2b_{n_2}^2} \left[-1 + \frac{b_{n_1}^2}{b_{n_1}^2 + b_{n_2}^2} \right] \Gamma(l+3/2) \left(\frac{2b_{n_1}^2 b_{n_2}^2}{b_{n_1}^2 + b_{n_2}^2} \right)^{l+3/2} \\ &= -\frac{2l+3}{b_{n_1}^2 + b_{n_2}^2} \left(\frac{2b_{n_1} b_{n_2}}{b_{n_1}^2 + b_{n_2}^2} \right)^{l+3/2} \end{aligned} \quad (\text{C.5.20})$$

よって運動項部分の行列要素は以下のように成る。

$$\langle rR_{n_1 l} | -\frac{1}{2\mu} \nabla^2 | rR_{n_2 l} \rangle = \frac{1}{2\mu} \frac{2l+3}{b_{n_1}^2 + b_{n_2}^2} \left(\frac{2b_{n_1} b_{n_2}}{b_{n_1}^2 + b_{n_2}^2} \right)^{l+3/2} \quad (\text{C.5.21})$$

$$= \frac{1}{\mu} \frac{(2l+3)\nu_{n_1}\nu_{n_2}}{\nu_{n_1} + \nu_{n_2}} \left(\frac{2\sqrt{\nu_{n_1}\nu_{n_2}}}{\nu_{n_1} + \nu_{n_2}} \right)^{l+3/2} \quad (\text{C.5.22})$$

C.5.3 ポテンシャルパート

2体の相対距離 r にのみ依存するポテンシャルを考えるとその行列要素は

$$\langle rR_{n_1 l_1} | V(r) | rR_{n_2 l_2} \rangle = N_{n_1 l_1} N_{n_2 l_2} \int_0^\infty dr r^{l_1+l_2} e^{-(\nu_1+\nu_2)r^2} V(r) r^2, \quad (\text{C.5.23})$$

である。ここで N_{il} は式 (C.3.4) の規格化係数である。一般のポテンシャルに対してはこの積分は実行できないので数値積分が必要となる。ただし特定のポテンシャルの場合は実行できるので結果のみ掲載する。

ガウシアンポテンシャルの場合は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \langle rR_{n_1 l_1} | e^{-kr^2} | rR_{n_2 l_2} \rangle \\ = \frac{\Gamma(l_1/2 + l_2/2 + 3/2)}{\sqrt{\Gamma(l_1 + 3/2)\Gamma(l_2 + 3/2)}} \left(\frac{b_{n_1}}{b_{n_2}} \right)^{l_2/2 - l_1/2} \left(\frac{b_{n_1}^2 + b_{n_2}^2}{2b_{n_1} b_{n_2}} + b_{n_1} b_{n_2} k \right)^{-(l_1/2 + l_2/2 + 3/2)}. \end{aligned} \quad (\text{C.5.24})$$

特に $l_1 = l_2 = l$ の時

$$\langle rR_{n_1 l} | e^{-kr^2} | rR_{n_2 l} \rangle = \left(\frac{b_{n_1}^2 + b_{n_2}^2}{2b_{n_1} b_{n_2}} + b_{n_1} b_{n_2} k \right)^{-(l+3/2)}, \quad (\text{C.5.25})$$

となる。

ポテンシャルが r^i (i は整数) に比例する場合は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} & \langle rR_{n_1 l_1} | r^i | rR_{n_2 l_2} \rangle \\ &= \frac{\Gamma(l_1/2 + l_2/2 + i/2 + 3/2)}{\sqrt{\Gamma(l_1 + 3/2)\Gamma(l_2 + 3/2)}} \left(\frac{b_{n_1}}{b_{n_2}}\right)^{l_2/2 - l_1/2} (b_{n_1} b_{n_2})^{i/2} \left(\frac{2b_{n_1} b_{n_2}}{b_{n_1}^2 + b_{n_2}^2}\right)^{l_1/2 + l_2/2 + i/2 + 3/2} \end{aligned} \quad (C.5.26)$$

$$\rightarrow \frac{\Gamma(l + i/2 + 3/2)}{\Gamma(l + 3/2)} (b_{n_1} b_{n_2})^{i/2} \left(\frac{2b_{n_1} b_{n_2}}{b_{n_1}^2 + b_{n_2}^2}\right)^{l + i/2 + 3/2} \quad (l_1 = l_2 = l) \quad (C.5.27)$$

特にポテンシャルが $1/r$ (クーロンポテンシャル) の場合は $i = -1$ として

$$\begin{aligned} & \langle rR_{n_1 l_1} | 1/r | rR_{n_2 l_2} \rangle \\ &= \frac{\Gamma(l_1/2 + l_2/2 + 1)}{\sqrt{\Gamma(l_1 + 3/2)\Gamma(l_2 + 3/2)}} \left(\frac{b_{n_1}}{b_{n_2}}\right)^{l_2/2 - l_1/2} (b_{n_1} b_{n_2})^{i/2} \left(\frac{2b_{n_1} b_{n_2}}{b_{n_1}^2 + b_{n_2}^2}\right)^{l_1/2 + l_2/2 + 1} \end{aligned} \quad (C.5.28)$$

$$\rightarrow \frac{\Gamma(l + 1)}{\Gamma(l + 3/2)} \frac{1}{\sqrt{(b_{n_1} b_{n_2})}} \left(\frac{2b_{n_1} b_{n_2}}{b_{n_1}^2 + b_{n_2}^2}\right)^{l + 1} \quad (l_1 = l_2 = l) \quad (C.5.29)$$

である。他に調和振動子ポテンシャルなら $i = 2$ とすればよい。

C.5.4 固有値問題

式 (C.5.1) の両辺の行列要素が決まれば固有値問題として解くことで固有エネルギー E と、ガウシアン展開係数 C_n を成分とする固有ベクトルが得られる。

$$(T_{N \times N} + V_{N \times N}) C_N = E N_{N \times N} C_N . \quad (C.5.30)$$

ただし、通常の固有値問題ではなく両辺に行列がある一般化固有値問題である。ノルム行列の逆行列を左から掛けると通常の固有値問題になる。

$$N_{N \times N}^{-1} (T_{N \times N} + V_{N \times N}) C_N = E C_N . \quad (C.5.31)$$

これまでは 1 チャンネル問題を想定してきたが、結合チャンネル問題への拡張は行列を拡張すれば簡単に行える。各チャンネルが直交していればノルム部分と運動項部分に非対角ブロックは存在しない。一方、ポテンシャル部分はチャンネル結合による非対角成分がある。 M チャンネル結合問題の

場合の行列を模式的に書くと

$$N = \begin{pmatrix} N_{11,N \times N} & 0_{N \times N} & \cdots & 0_{N \times N} & 0_{N \times N} \\ 0_{N \times N} & N_{22,N \times N} & \cdots & 0_{N \times N} & 0_{N \times N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{N \times N} & 0_{N \times N} & \cdots & N_{M-1M-1,N \times N} & 0_{N \times N} \\ 0_{N \times N} & 0_{N \times N} & \cdots & 0_{N \times N} & N_{MM,N \times N} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.5.32})$$

$$T = \begin{pmatrix} T_{11,N \times N} & 0_{N \times N} & \cdots & 0_{N \times N} & 0_{N \times N} \\ 0_{N \times N} & T_{22,N \times N} & \cdots & 0_{N \times N} & 0_{N \times N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{N \times N} & 0_{N \times N} & \cdots & T_{M-1M-1,N \times N} & 0_{N \times N} \\ 0_{N \times N} & 0_{N \times N} & \cdots & 0_{N \times N} & T_{MM,N \times N} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.5.33})$$

$$V = \begin{pmatrix} V_{11,N \times N} & V_{12,N \times N} & \cdots & V_{1M-1,N \times N} & V_{1M,N \times N} \\ V_{21,N \times N} & V_{22,N \times N} & \cdots & V_{2M-1,N \times N} & V_{2M,N \times N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_{M-11,N \times N} & V_{M-12,N \times N} & \cdots & V_{M-1M-1,N \times N} & V_{M-1M,N \times N} \\ V_{M1,N \times N} & V_{M2,N \times N} & \cdots & V_{MM-1,N \times N} & V_{MM,N \times N} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.5.34})$$

となる。行列の拡張に伴って展開係数を格納する固有ベクトル C も、 $N \times M$ 個の成分が縦に並ぶベクトルへ拡張される。

参考文献

- [1] M. Gell-Mann, A Schematic Model of Baryons and Mesons, *Phys. Lett.* **8**, 214–215 (1964).
- [2] G. Zweig, An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 2, *Developments in the Quark Theory of Hadrons, Volume 1.* 22–101 (1964).
- [3] S. K. Choi et al., Observation of a narrow charmonium - like state in exclusive $B^\pm \rightarrow K^\pm \pi^+ \pi^- J/\psi$ decays, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 262001 (2003).
- [4] S. Godfrey and N. Isgur, Mesons in a Relativized Quark Model with Chromodynamics, *Phys. Rev.* **D32**, 189–231 (1985).
- [5] R. F. Lebed, R. E. Mitchell, and E. S. Swanson, Heavy-Quark QCD Exotica, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **93**, 143–194 (2017).
- [6] R. Aaij et al., Observation of $J/\psi p$ Resonances Consistent with Pentaquark States in $\Lambda_b^0 \rightarrow J/\psi K^- p$ Decays, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 072001 (2015).
- [7] R. Aaij et al., Model-independent evidence for $J/\psi p$ contributions to $\Lambda_b^0 \rightarrow J/\psi p K^-$ decays, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 082002 (2016).
- [8] R. Aaij et al., Evidence for exotic hadron contributions to $\Lambda_b^0 \rightarrow J/\psi p \pi^-$ decays, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 082003 (2016) [Addendum: *Phys. Rev. Lett.* 118, 119901 (2017)].
- [9] R. Aaij et al., Observation of a narrow pentaquark state, $P_c(4312)^+$, and of two-peak structure of the $P_c(4450)^+$, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 222001 (2019).
- [10] E. S. Swanson, The New heavy mesons: A Status report, *Phys. Rept.* **429**, 243–305 (2006).
- [11] H.-X. Chen, W. Chen, X. Liu, and S.-L. Zhu, The hidden-charm pentaquark and tetraquark states, *Phys. Rept.* **639**, 1–121 (2016).
- [12] A. Hosaka, T. Iijima, K. Miyabayashi, Y. Sakai, and S. Yasui, Exotic hadrons with heavy flavors: X, Y, Z, and related states, *PTEP* **2016**, 062C01 (2016).
- [13] A. Ali, J. S. Lange, and S. Stone, Exotics: Heavy Pentaquarks and Tetraquarks, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **97**, 123–198 (2017).
- [14] F.-K. Guo, C. Hanhart, U.-G. Meißner, Q. Wang, Q. Zhao, and B.-S. Zou, Hadronic molecules, *Rev. Mod. Phys.* **90**, 015004 (2018).
- [15] Y.-R. Liu, H.-X. Chen, W. Chen, X. Liu, and S.-L. Zhu, Pentaquark and Tetraquark states, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **107**, 237–320 (2019).
- [16] Y. Shimizu, Y. Yamaguchi, and M. Harada, Heavy quark spin multiplet structure of $\bar{P}^{(*)} \Sigma_Q^{(*)}$ molecular states, *Phys. Rev.* **D98**, 014021 (2018).
- [17] Y. Shimizu, Y. Yamaguchi, and M. Harada, Heavy quark spin multiplet structure of

- P_c -like pentaquark as P-wave hadronic molecular state (2019).
- [18] J.-J. Wu, R. Molina, E. Oset, and B. S. Zou, Prediction of narrow N^* and Λ^* resonances with hidden charm above 4 GeV, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 232001 (2010).
- [19] Z.-C. Yang, Z.-F. Sun, J. He, X. Liu, and S.-L. Zhu, The possible hidden-charm molecular baryons composed of anti-charmed meson and charmed baryon, *Chin. Phys.* **C36**, 6–13 (2012).
- [20] W. L. Wang, F. Huang, Z. Y. Zhang, and B. S. Zou, $\Sigma_c \bar{D}$ and $\Lambda_c \bar{D}$ states in a chiral quark model, *Phys. Rev.* **C84**, 015203 (2011).
- [21] J.-J. Wu, T. S. H. Lee, and B. S. Zou, Nucleon Resonances with Hidden Charm in Coupled-Channel Models, *Phys. Rev.* **C85**, 044002 (2012).
- [22] Y. Yamaguchi, S. Ohkoda, A. Hosaka, T. Hyodo, and S. Yasui, Heavy quark symmetry in multihadron systems, *Phys. Rev.* **D91**, 034034 (2015).
- [23] N. Isgur and M. B. Wise, Spectroscopy with heavy quark symmetry, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1130–1133 (1991).
- [24] M. Neubert, Heavy quark symmetry, *Phys. Rept.* **245**, 259–396 (1994).
- [25] A. V. Manohar and M. B. Wise, Heavy quark physics (Cambridge University Press, 2000)
- [26] M. E. Luke and A. V. Manohar, Reparametrization invariance constraints on heavy particle effective field theories, *Phys. Lett.* **B286**, 348–354 (1992).
- [27] N. Kitazawa and T. Kurimoto, Heavy meson effective theory with $1/M(Q)$ correction, *Phys. Lett.* **B323**, 65–70 (1994).
- [28] S. Yasui and K. Sudoh, Heavy-quark dynamics for charm and bottom flavor on the Fermi surface at zero temperature, *Phys. Rev.* **C88**, 015201 (2013).
- [29] A. F. Falk, Hadrons of arbitrary spin in the heavy quark effective theory, *Nucl. Phys.* **B378**, 79–94 (1992).
- [30] Y.-R. Liu and M. Oka, $\Lambda_c N$ bound states revisited, *Phys. Rev.* **D85**, 014015 (2012).
- [31] Y. Shimizu, Y. Yamaguchi, and M. Harada, Heavy quark spin multiplet structure of $P_c(4312)$, $P_c(4440)$, and $P_c(4457)$ (2019).
- [32] R. L. Jaffe, Multi-Quark Hadrons. 1. The Phenomenology of (2 Quark 2 anti-Quark) Mesons, *Phys. Rev.* **D15**, 267 (1977).
- [33] R. L. Jaffe, Multi-Quark Hadrons. 2. Methods, *Phys. Rev.* **D15**, 281 (1977).
- [34] M. Tanabashi et al., Review of Particle Physics, *Phys. Rev.* **D98**, 030001 (2018).
- [35] R. Chen, X. Liu, X.-Q. Li, and S.-L. Zhu, Identifying exotic hidden-charm pentaquarks, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 132002 (2015).
- [36] J. He, $\bar{D}\Sigma_c^*$ and $\bar{D}^*\Sigma_c$ interactions and the LHCb hidden-charmed pentaquarks, *Phys. Lett.* **B753**, 547–551 (2016).
- [37] H.-X. Chen, W. Chen, X. Liu, T. G. Steele, and S.-L. Zhu, Towards exotic hidden-charm pentaquarks in QCD, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 172001 (2015).
- [38] H. Huang, C. Deng, J. Ping, and F. Wang, Possible pentaquarks with heavy quarks, *Eur. Phys. J.* **C76**, 624 (2016).
- [39] L. Roca, J. Nieves, and E. Oset, LHCb pentaquark as a $\bar{D}^*\Sigma_c - \bar{D}^*\Sigma_c^*$ molecular state,

- Phys. Rev. **D92**, 094003 (2015).
- [40] U.-G. Meißner and J. A. Oller, Testing the $\chi_{c1} p$ composite nature of the $P_c(4450)$, Phys. Lett. **B751**, 59–62 (2015).
- [41] T. J. Burns, Phenomenology of $P_c(4380)^+$, $P_c(4450)^+$ and related states, Eur. Phys. J. **A51**, 152 (2015).
- [42] C.-W. Shen, F.-K. Guo, J.-J. Xie, and B.-S. Zou, Disentangling the hadronic molecule nature of the $P_c(4380)$ pentaquark-like structure, Nucl. Phys. **A954**, 393–405 (2016).
- [43] Y. Shimizu, D. Suenaga, and M. Harada, Coupled channel analysis of molecule picture of $P_c(4380)$, Phys. Rev. **D93**, 114003 (2016).
- [44] Y. Yamaguchi and E. Santopinto, Hidden-charm pentaquarks as a meson-baryon molecule with coupled channels for $\bar{D}^{(*)}\Lambda_c$ and $\bar{D}^{(*)}\Sigma_c^{(*)}$, Phys. Rev. **D96**, 014018 (2017).
- [45] J. He, Understanding spin parity of $P_c(4450)$ and $Y(4274)$ in a hadronic molecular state picture, Phys. Rev. **D95**, 074004 (2017).
- [46] K. Azizi, Y. Sarac, and H. Sundu, Analysis of $P_c^+(4380)$ and $P_c^+(4450)$ as pentaquark states in the molecular picture with QCD sum rules, Phys. Rev. **D95**, 094016 (2017).
- [47] E. Santopinto and A. Giachino, Compact pentaquark structures, Phys. Rev. **D96**, 014014 (2017).
- [48] J. Wu, Y.-R. Liu, K. Chen, X. Liu, and S.-L. Zhu, Hidden-charm pentaquarks and their hidden-bottom and B_c -like partner states, Phys. Rev. **D95**, 034002 (2017).
- [49] E. Hiyama, A. Hosaka, M. Oka, and J.-M. Richard, Quark model estimate of hidden-charm pentaquark resonances, Phys. Rev. **C98**, 045208 (2018).
- [50] L. Maiani, A. D. Polosa, and V. Riquer, The New Pentaquarks in the Diquark Model, Phys. Lett. **B749**, 289–291 (2015).
- [51] R. F. Lebed, The Pentaquark Candidates in the Dynamical Diquark Picture, Phys. Lett. **B749**, 454–457 (2015).
- [52] G.-N. Li, X.-G. He, and M. He, Some Predictions of Diquark Model for Hidden Charm Pentaquark Discovered at the LHCb, JHEP **12**, 128 (2015).
- [53] Z.-G. Wang, Analysis of $P_c(4380)$ and $P_c(4450)$ as pentaquark states in the diquark model with QCD sum rules, Eur. Phys. J. **C76**, 70 (2016).
- [54] R. Zhu and C.-F. Qiao, Pentaquark states in a diquark–triquark model, Phys. Lett. **B756**, 259–264 (2016).
- [55] S. Takeuchi and M. Takizawa, The hidden charm pentaquarks are the hidden color-octet uud baryons?, Phys. Lett. **B764**, 254–259 (2017).
- [56] V. Kubarovsky and M. B. Voloshin, Formation of hidden-charm pentaquarks in photon-nucleon collisions, Phys. Rev. **D92**, 031502 (2015).
- [57] N. N. Scoccola, D. O. Riska, and M. Rho, Pentaquark candidates $P_c^+(4380)$ and $P_c^+(4450)$ within the soliton picture of baryons, Phys. Rev. **D92**, 051501 (2015).
- [58] R. Chen, Z.-F. Sun, X. Liu, and S.-L. Zhu, Strong LHCb evidence supporting the existence of the hidden-charm molecular pentaquarks, Phys. Rev. **D100**, 011502 (2019).
- [59] H.-X. Chen, W. Chen, and S.-L. Zhu, Possible interpretations of the $P_c(4312)$, $P_c(4440)$, and $P_c(4457)$, Phys. Rev. **D100**, 051501 (2019).

- [60] M.-Z. Liu, Y.-W. Pan, F.-Z. Peng, M. Sánchez Sánchez, L.-S. Geng, A. Hosaka, and M. Pavon Valderrama, Emergence of a complete heavy-quark spin symmetry multiplet: seven molecular pentaquarks in light of the latest LHCb analysis, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 242001 (2019).
- [61] F.-K. Guo, H.-J. Jing, U.-G. Meißner, and S. Sakai, Isospin breaking decays as a diagnosis of the hadronic molecular structure of the $P_c(4457)$, *Phys. Rev.* **D99**, 091501 (2019).
- [62] J. He, Study of $P_c(4457)$, $P_c(4440)$, and $P_c(4312)$ in a quasipotential Bethe-Salpeter equation approach, *Eur. Phys. J.* **C79**, 393 (2019).
- [63] C.-J. Xiao, Y. Huang, Y.-B. Dong, L.-S. Geng, and D.-Y. Chen, Exploring the molecular scenario of $P_c(4312)$, $P_c(4440)$, and $P_c(4457)$, *Phys. Rev.* **D100**, 014022 (2019).
- [64] Z.-H. Guo and J. A. Oller, Anatomy of the newly observed hidden-charm pentaquark states: $P_c(4312)$, $P_c(4440)$ and $P_c(4457)$, *Phys. Lett.* **B793**, 144–149 (2019).
- [65] C. W. Xiao, J. Nieves, and E. Oset, Heavy quark spin symmetric molecular states from $\bar{D}^{(*)}\Sigma_c^{(*)}$ and other coupled channels in the light of the recent LHCb pentaquarks, *Phys. Rev.* **D100**, 014021 (2019).
- [66] X.-Y. Wang, X.-R. Chen, and J. He, Possibility to study pentaquark states $P_c(4312)$, $P_c(4440)$, and $P_c(4457)$ in $\gamma p \rightarrow J/\psi p$ reaction, *Phys. Rev.* **D99**, 114007 (2019).
- [67] M. I. Eides, V. Y. Petrov, and M. V. Polyakov, New LHCb pentaquarks as hadrocharmonium states, arXiv: 1904.11616 (2019).
- [68] Z.-G. Wang, Analysis of the $P_c(4312)$, $P_c(4440)$, $P_c(4457)$ and related hidden-charm pentaquark states with QCD sum rules, arXiv: 1905.02892 (2019).
- [69] Y. Yamaguchi, H. García-Tecocoatzí, A. Giachino, A. Hosaka, E. Santopinto, S. Takeuchi, and M. Takizawa, Heavy quark spin symmetry with chiral tensor dynamics in the light of the recent LHCb pentaquarks, arXiv: 1907.04784 (2019).
- [70] T. J. Burns and E. S. Swanson, Molecular Interpretation of the $P_c(4440)$ and $P_c(4457)$ States, arXiv: 1908.03528 (2019).
- [71] S. Yasui, K. Sudoh, Y. Yamaguchi, S. Ohkoda, A. Hosaka, and T. Hyodo, Spin degeneracy in multi-hadron systems with a heavy quark, *Phys. Lett.* **B727**, 185–189 (2013).
- [72] A. Hosaka, T. Hyodo, K. Sudoh, Y. Yamaguchi, and S. Yasui, Heavy Hadrons in Nuclear Matter, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **96**, 88–153 (2017).
- [73] T. Mannel and G. A. Schuler, Heavy quarkonium effective theory, *Z. Phys.* **C67**, 159–180 (1995).
- [74] R. Casalbuoni, A. Deandrea, N. Di Bartolomeo, R. Gatto, F. Feruglio, and G. Nardulli, Phenomenology of heavy meson chiral Lagrangians, *Phys. Rept.* **281**, 145–238 (1997).
- [75] A. Bohr and B. Mottelson, *Nuclear Structure, Vol. I* (W. A. Benjamin, 1969)
- [76] 国広悌二, *SGC ライブラリ 100 クォーク・ハドロン物理学入門真空の南部理論を基礎として* (サイエンス社, 2013)
- [77] E. Hiyama, Y. Kino, and M. Kamimura, Gaussian expansion method for few-body systems, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **51**, 223–307 (2003).
- [78] E. Hiyama, Gaussian expansion method for few-body systems and its applications to

- atomic and nuclear physics, PTEP **2012**, 01A204 (2012).
- [79] S. Aoyama, T. Myo, K. Kato, and K. Ikeda, The complex scaling method for many-body resonances and its applications to three-body resonances, Prog. Theor. Phys. **116**, 1 (2006).
- [80] A. Bondar et al., Observation of two charged bottomonium-like resonances in $Y(5S)$ decays, Phys. Rev. Lett. **108**, 122001 (2012).
- [81] M. Takizawa and S. Takeuchi, $X(3872)$ as a hybrid state of charmonium and the hadronic molecule, PTEP **2013**, 093D01 (2013).
- [82] S. Takeuchi, K. Shimizu, and M. Takizawa, On the origin of the narrow peak and the isospin symmetry breaking of the $X(3872)$, PTEP **2014**, 123D01 (2014) [Erratum: PTEP2015,no.7,079203(2015)].
- [83] Y. Yamaguchi, A. Hosaka, S. Takeuchi, and M. Takizawa, Heavy hadronic molecules with pion exchange and quark core couplings: a guide for practitioners (2019).
- [84] S. Gasiorowicz(著), 林武美(訳), and 北門新作(訳), 量子力学 I (丸善, 1998) 169-181.
- [85] A. Hosaka and H. Toki, QUARKS, BARYONS, AND CHIRAL SYMMETRY (World Scientific, 2001)
- [86] D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev, and V. K. Khersonskii, Quantum Theory of Angular Momentum (World Scientific, 1988)
- [87] H. Georgi(著) and 九後汰一郎(訳), 物理学におけるリー代数-アイソスピンから統一理論へ- 原著第2版 (吉岡書店, 2010)