

2019 年度 学位論文

修正重力理論における  
相対論的天体の最大質量

名古屋大学大学院 理学研究科

山崎 雅史



## 要旨

中性子星のような相対論的天体は恒星進化における最晩年の星で、ブラックホールに重力崩壊しなかった天体である。相対論的天体に関する研究は天体現象、構成物質の物性、そして重力の構造の各側面から行われている。連星系の観測や重力波観測により様々な性質が解明されつつあり、注目を浴びている。

相対論的天体の質量と半径は内部物質の圧力と自己重力の静水圧平衡によって決定される。相対論的天体の解明には高密度物質の物性への理解が必要となる一方、未知の強重力効果が現れる可能性がある。従来は一般相対性理論を仮定してハドロン物理から高密度物質の物性のモデル構築と観測の比較が行われてきた。近年では強重力効果も考慮して、一般相対性理論を修正した修正重力理論のモデルと組み合わせて観測との比較が行われている。

申請者は有質量重力理論とよばれる修正重力理論の一つに対し、相対論的天体の解の構成を試みた。一般相対性理論は無質量スピン 2 の粒子 (重力子) に関する非線形理論であるのに対し、有質量重力理論は一般相対性理論を有質量スピン 2 の粒子の理論へ拡張したものになっている。有質量重力理論は一般相対性理論と比べて余分の自由度が現れ、その影響で諸処の現象が変化すると考えられている。有質量重力理論は重力子の有質量粒子への拡張に伴って相互作用の結合を指定するパラメータが複数含まれており、パラメータの値によって修正の影響が変わる。

申請者はまず最小模型と呼ばれるパラメータ指定において相対論的天体の解の構成を試みた。最小模型とは高次の相互作用項を含まない模型のことで、解析が最も容易である。最小模型で静的球対称な数値解を構成したところ、相対論的天体の最大質量が一般相対性理論と場合と比較して大きく減少した。これは余分自由度が引力として働くためだと考えられる。現在、太陽質量の 2 倍以上の中性子星が見つかっており、最小模型ではこの観測事実を説明することが困難である。つまり有質量重力理論の最小模型は一般相対性理論よりも相対論的天体の説明に適していない。

次に申請者は有質量重力理論において最小模型に限らない一般の場合で相対論的天体の解の解析を行った。一般の場合では高次の相互作用項のために 2 種類の解が存在する。一つは最小模型での解と同様の性質を持つ解で、一般相対性理論の解に大きな修正を与える。もう一方の解はヴァインシュタイン機構と呼ばれる仕組みが働き、余分の自由度が解にほとんど影響を与えないため、一般相対性理論とほぼ同じ解を与える。申請者は以上の解析結果から有質量重力理論における相対論的天体の解の構造を明らかにした。相対論的天体に関す

る観測を説明する上で有質量重力理論は一般相対性理論に対して優位性を持たず同等の結果を与える。

従来では点粒子が作る重力場に対してヴァインシュタイン機構が調べられていたが、以上のように申請者は相対論的天体のような広がりを持つ物質分布でも同様の結果を得ることを確認した。

# 目次

|       |                      |    |
|-------|----------------------|----|
| 第 1 章 | 導入と基本事項              | 7  |
| 1.1   | 強重力領域の物理と相対論的天体      | 7  |
| 1.2   | 一般相対性理論入門            | 11 |
| 第 2 章 | TOV 方程式と質量-半径関係      | 19 |
| 2.1   | 一般相対性理論における静的球対称解    | 19 |
| 2.2   | TOV 方程式の境界条件と数値計算    | 23 |
| 2.3   | 質量-半径関係              | 27 |
| 2.4   | TOV 逆写像              | 31 |
| 2.5   | $f(R)$ 重力理論での応用例     | 35 |
| 第 3 章 | 有質量重力理論における相対論的天体の解  | 39 |
| 3.1   | dRGT 有質量重力理論         | 39 |
| 3.2   | 最小模型における質量-半径関係      | 44 |
| 3.3   | 一般の場合における相対論的天体の解    | 48 |
| 第 4 章 | 考察と今後の展望             | 53 |
| 4.1   | 本研究に対する考察            | 53 |
| 4.2   | 今後の展望                | 54 |
| 付録 A  | 変分公式                 | 55 |
| 付録 B  | 一般相対性理論の Hamilton 形式 | 57 |
| 付録 C  | Vainshtein 機構        | 67 |
| 参考文献  |                      | 73 |



## 第 1 章

# 導入と基本事項

本研究では修正重力理論において相対論的天体の解の構築を行う。本章ではまず研究対象になっている相対論的天体の詳細と未解明部分を説明し、修正重力理論を考慮する意義について述べる。その後、修正重力理論の導入に必要不可欠である一般相対性理論についての解説を行う。

### 1.1 強重力領域の物理と相対論的天体

強重力領域の重力現象を調べることは一般相対性理論の検証とそれを超える物理を探るために重要である。本研究では相対論的天体を対象として修正重力理論の検証を行う。本節ではまず研究目的を説明するために相対論的天体の導入を行う。相対論的天体とは一般相対性理論の効果が重要になる天体のことで、ブラックホールと並んで強重力領域を生み出す中性子星がその代表例として知られている [1]。中性子星はブラックホールと違って内部構造を持ち、非常にコンパクトである。そのため強重力の効果とともに高密度物質の詳細の側面からも興味が持たれている。

中性子星の質量は連星パルサーの観測によって見積もられている。連星パルサーの主星(パルサー)の質量  $M_p$  と伴星の質量  $M_c$  はケプラー運動の軌道要素から見積もることができる。軌道要素は軌道の形状・軌道面と基準面とのオイラー角・天体の軌道上の位置などによって成り立っている。具体的には

- 連星周期  $P$
- (パルサーの) 軌道長半径  $a_p$
- 軌道傾斜角 (軌道面と基準面のなす角)  $i$
- 離心率  $e$
- 近点引数 (天体の重心から見て昇交点から近点までがなす角)  $\omega$

などである。重心からパルサーへの距離を  $a_p$ 、伴星への距離を  $a_c$  とすると

$$M_p a_p = M_c a_c \quad (1.1)$$

であり、ケプラーの第 3 法則から

$$G \frac{M_p + M_c}{(a_p + a_c)^3} = \left( \frac{2\pi}{P} \right)^2 \quad (1.2)$$

であるので観測可能量である連星系の質量と軌道要素には

$$\begin{aligned} \frac{(M_c \sin i)^3}{(M_p + M_c)^2} &= (M_p + M_c) \left( \frac{M_c \sin i}{M_p + M_c} \right)^3 = (M_p + M_c) \left( \frac{\sin i}{1 + M_p/M_c} \right)^3 \\ &= (M_p + M_c) \left( \frac{\sin i}{1 + a_c/a_p} \right)^3 = \frac{M_p + M_c}{(a_p + a_c)^3} (a_p \sin i)^3 \\ &= \left( \frac{2\pi}{P} \right)^2 \frac{(a_p \sin i)^3}{G} \end{aligned} \quad (1.3)$$

の関係がある [2]。つまり  $a_p \sin i$ ,  $\sin i$ ,  $P$  および  $M_c$  がわかれば  $M_p$  を推定することができる。軌道長半径の視線方向成分  $a_p \sin i$  と周期  $P$  は連星系の運動から推定できる。 $\sin i$ ,  $M_c$  の推定は相対性理論の効果を観測することで可能になる。相対性理論の効果としては

- 近点移動  $\dot{\omega}$
- ドップラー効果と重力赤方偏移によるアインシュタイン遅延効果  $\gamma$
- 重力波の放射による連星周期  $P$  の変化  $\dot{P}$
- 伴星の重力場によるシャピロ遅延効果 [3]

がある。例えばシャピロ遅延効果の振幅  $\Delta_S$  では

$$\Delta_S = 2 \frac{GM_c}{c^3} \left| \ln \left[ \left( \frac{1 + e \sin \omega}{1 - e} \right) \left( \frac{1 + \sin \omega \sin i}{1 - \sin i} \right) \right] \right| \quad (1.4)$$

であり、フィッティングによって  $\sin i$ ,  $e$ ,  $\sin \omega$  を求めることができる [3]。対数関数内の分母の形から離心率と軌道傾斜角が大きいほどシャピロ遅延効果が大きくなることに注意する。

図1.1に観測で推定された中性子星の質量を示す。高精度に質量が求まった歴史的に重要である観測は、Hulse-Taylor パルサーとして知られる PSR B1913+16[4] と PSR J1614-2230[5] である。PSR B1913+16 は相対性理論の効果である  $\dot{\omega}$ ,  $\gamma$ ,  $\dot{P}$  を測定し、パルサーの質量を

$$M = (1.4414 \pm 0.0002) M_\odot \quad (1.5)$$

と推定している [4]。PSR J1614-2230 は  $\sin i = 0.999894(5)$  の好条件下でシャピロ遅延効果を測定し、パルサーの質量を

$$M = (1.976 \pm 0.04) M_\odot \quad (1.6)$$

と推定している [5]。図1.1から中性子星の質量は  $1 - 2M_\odot$  程度だということがわかる。観測から中性子星の最大質量は少なくとも  $2M_\odot$  程度であることがわかる。

中性子星の半径を決定する方法はいくつか存在するが、主であるのは表面からの輻射を利用する方法である。主星である中性子星は伴星からの降着によって輻射が生じる場合がある。このような場合は天体表面からの黒体放射を観測するか、X線バースターによるエディントン限界を観測することで相対論的天体の半径を見積もることができる [8]。図1.2, 1.3に観測で推定された中性子星の半径を示す。この結果から中性子星の半径は約 10km ほどであることがわかる。

相対論的天体の質量観測と半径観測から密度を大雑把に見積もると

$$\rho \sim \frac{M_\odot}{(10\text{km})^3} \sim 10^{15} \text{g/cm}^3 \quad (1.7)$$



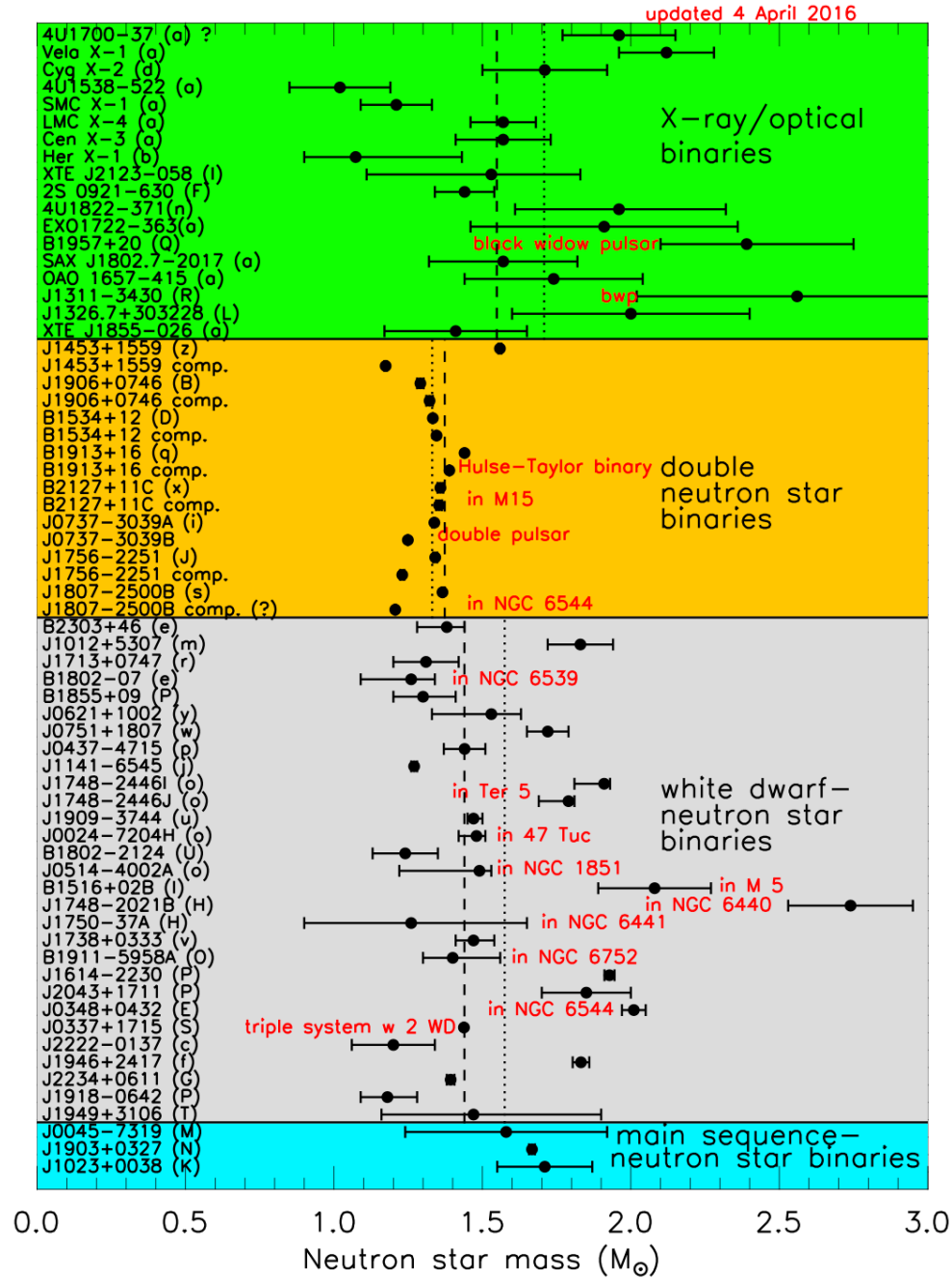


図1.1 観測で見つかった中性子星の質量の一覧。図は文献 [6, 2] より引用。原論文に基づき Web サイト [7] を参照した。

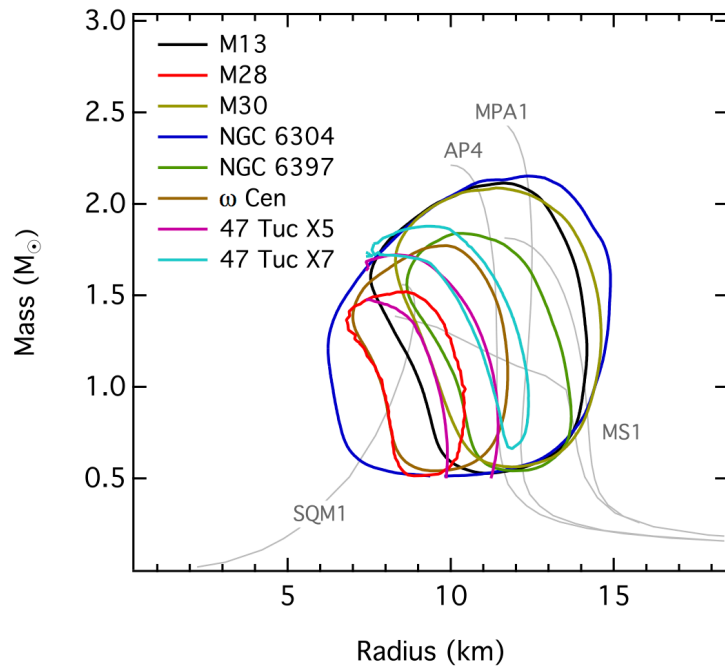


図1.2 Quiescent 期の低質量 X 線連星による中性子星の半径 (と質量) に関する制限。領域内は 68% の信頼区間を表す。図は文献 [8] より引用。原論文に基づき Web サイト [9] を参照した。

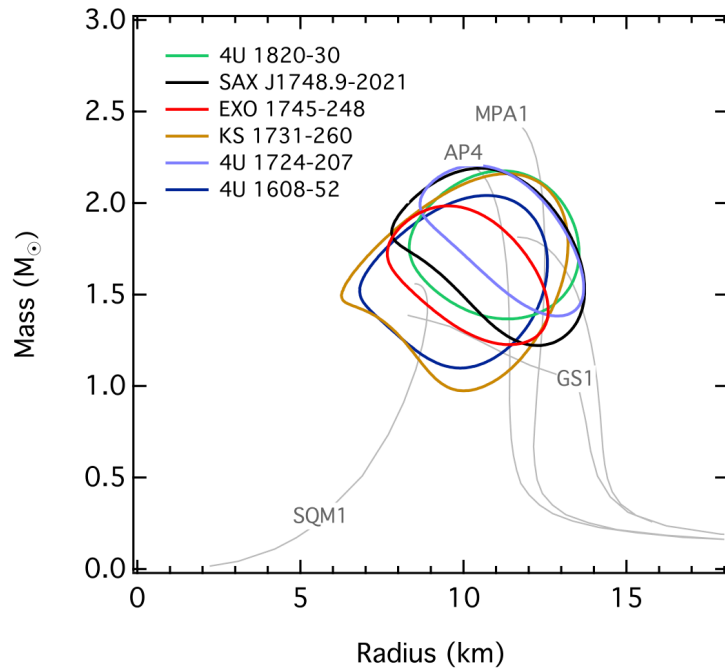


図1.3 X 線パルスターによる中性子星の半径 (と質量) に関する制限。領域内は 68% の信頼区間を表す。図は文献 [8] より引用。原論文に基づき Web サイト [9] を参照した。

となる。つまり我々が相対論的天体の構造を知るためには密度が  $10^{15} \text{g/cm}^3$  程度に至るまでの物性を知っておく必要がある。相対論的天体の内部構造は大気・外殻・内殻・外核・内核に分けられる。cgs 単位系における圧力の常用対数

$$\xi = \log_{10} \left( \frac{\rho}{\text{g/cm}^3} \right) \quad (1.8)$$

を用いて内部構造とその成分は大まかに述べると

- 大気：水素、ヘリウムなど
- 外殻 ( $\xi < 11.6$ )：白色矮星の主成分と同等で  $N, e$
- 内殻 ( $11.6 < \xi < 14.2$ )：中性子ドリップ [10, 11] が生じ  $N, n, e$
- 外核 ( $14.2 < \xi$ )：原子核が融けて  $n, p, e, \mu$  といった核子
- 内核：外核と同様である場合やエキゾチック物質・クォーク物質である場合など

となる [12, 13]。相対論的天体はその組成に中性子を多く含むため歴史的に中性子星と呼ばれる。一方で内部構造で相対論的天体の質量に最も寄与しているのは最も密度の高い内核であるためハイペロンを核に持つ天体をハイペロン星、クォーク物質にを核に持つ天体をクォーク星などとも呼ぶ。このように高密度天体である相対論的天体は内核の構造の不透明性から原子核物理の研究対象となっている。

本節では相対論的天体の質量と半径に関する観測から、相対論的天体が高密度物質によって構成されていることを説明した。また一般相対性理論によれば物質の高密度領域は強重力領域を生み出す。このような環境では物質の相転移や強重力効果による重力理論の修正の可能性が指摘されている。一方で強重力領域の重力理論や高密度物質を記述するハドロロンモデルは、先述の相対論的天体の質量や半径の観測結果と無矛盾である必要がある。本研究では特定の修正重力理論でもこれらの観測結果を説明できる可能性が存在するか議論する。

## 1.2 一般相対性理論入門

本研究では修正重力理論と呼ばれる一般相対性理論の代替理論において、前節で述べた相対論的天体を記述する解の構成を行う。この節では修正重力理論の理解に必要な一般相対性理論の導入を行う。一般相対性理論の導入には伝統的な Riemann 幾何学を用いた幾何学的なアプローチ [14] と、場の理論を用いて線形理論を構築した後に非線形化をおこなうアプローチ [15, 16] がある。有質量重力理論の導入には後者の知識が役に立つが、簡便のために前者のアプローチで一般相対性理論の導入を行う。ここで行う Riemann 幾何学の導入は [17] に基づく。まず Riemann 幾何学の導入を行い、その後一般相対性理論の説明を行う。

物理学に現れる最も基本的な幾何学量は時空の各点に実数に対応付けるスカラーである。例えば重力ポテンシャルはその一例になっている。物理学では時空上の点  $P$  に対して点  $P$  を含む十分小さな領域  $U$  を考えて、局所座標系を

$$x_U(P) := (x_U^0, x_U^1, x_U^2, x_U^3) \quad (1.9)$$

のように導入する。ただし時空の次元を  $3+1$  として  $\mu = 0, 1, 2, 3$  とする。これらの組

$(U, x_U)$  を座標近傍と呼ぶ。時空上の関数  $f$  は座標近傍  $(U, x_U)$  において

$$f(P) = f(x_U^{-1} \circ x_U(P)) = f \circ x_U^{-1}(x_U(P)) \quad (1.10)$$

となる。 $f \circ x_U^{-1}$  は局所座標の関数になっておりスカラーと呼ぶ。

また物理学には重力場のようなベクトル場も用いられる。一般にベクトル場は時空上の関数に対する方向微分として定義される。方向微分を考えるために実数パラメータ  $t$  で特徴づく時空上の曲線  $c(t)$  を考える。この曲線  $c(t)$  は  $t = 0$  で点  $P$  を通るとする (つまり  $c(0) = P$ )。点  $P$  の近傍で定義された関数  $f$  に対して、点  $P$  における曲線  $c$  に沿った方向微分あるいは接ベクトル  $X_P(f)$  を

$$X_P(f) := \left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0} \quad (1.11)$$

によって定義する。座標近傍  $(U, x_U)$  での曲線  $c(t)$  の局所表示を

$$c(t) = (x^0(t), x^1(t), x^2(t), x^3(t)) \quad (1.12)$$

としてスカラー  $f \circ c$  の局所表示を  $f(x_U)$  とすると

$$X_P(f) = \left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{dx^\mu(0)}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_P f(x) \quad (1.13)$$

となる。ただし添字の繰り返しが見れた際はその添字に関する和とみなす規約 (Einstein の規約) を用いて、以降でもこの規約を用いる。この結果から

$$X_P := X_P^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_P, \quad (1.14)$$

$$X_P^\mu := \left. \frac{dx^\mu(t)}{dt} \right|_{t=0} \quad (1.15)$$

と書ける。基底  $\left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_P$  を自然基底と呼ぶ。また線形係数  $X_P^\mu$  を反変ベクトルと呼ぶ。時空上で定義されるベクトル場  $X$  とは、時空の各点  $P$  にこのような接ベクトル  $X_P$  を与える対応のことである。別の座標近傍  $(V, y_V)$  を考えると  $U \cap V \neq \emptyset$  において

$$y^\mu(P) = y^\mu(x_U(P)) \Rightarrow y^\mu = y^\mu(x_U) \quad (1.16)$$

であるので

$$X = X^\alpha \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\mu} := \tilde{X}^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} \quad (1.17)$$

となる。つまりベクトル場は各座標近傍において定義された4つの関数の系  $X^\mu$  で、局所座標系の変換に対し

$$\tilde{X}^\mu(y_V(x_U)) = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} X^\alpha(x_U) \quad (1.18)$$

のような変換を受けるものと考えることができる。

物理学ではベクトル場の他にも1-形式と呼ばれる幾何学量が用いられている。例えばニュートン重力理論における重力場のような、ポテンシャルの勾配として与えられる幾何学量である。1-形式を定義するために点  $P$  においてベクトル場  $X$  に作用する線形形式  $(df)_P$  を

$$(df)_P(X_P) := X_P(f) = X_P^\mu \left( \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right)_P \quad (1.19)$$

のように定める。これを  $P$  における  $f$  の微分という。ここで座標関数の微分  $(dx^\mu)_P$  を考えると

$$(dx^\mu)_P(X_P) := X^\nu(P) \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \right)_P = X^\nu(P) \delta_\nu^\mu = X^\mu(P) \quad (1.20)$$

となる。つまり座標関数の微分  $(dx^\mu)_P$  は自然基底  $\left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_P$  に双対な基底である。この事実からベクトル場に双対な 1-形式  $\alpha$  を定義することができる。時空上で定義される 1-形式  $\alpha$  は座標近傍  $(U, x_U)$  に制限すると

$$\alpha_P := \alpha_\mu(P) (dx^\mu)_P \quad (1.21)$$

と書ける。この線形係数  $\alpha_\mu(P)$  を共変ベクトルと呼ぶ。座標近傍  $(U, x_U)$  において 1-形式  $\alpha$  はベクトル場  $X$  に対して

$$\alpha_P(X_P) = \alpha_\mu(P) (dx^\mu)_P(X_P) = \alpha_\mu(P) X^\mu(P) \quad (1.22)$$

と作用する。つまり 1-形式とベクトル場の内積は共変ベクトルと反変ベクトルによって書ける。

今まで見てきたベクトル場と 1-形式の拡張概念としてテンソル場を導入する。時空上のタイプ  $(r, s)$  のテンソル場  $S$  とは座標近傍  $(U, x_U)$  において線形結合

$$S_P := S_{\nu_1, \dots, \nu_s}^{\mu_1, \dots, \mu_r}(P) \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_r}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_s} \quad (1.23)$$

$$S_{\nu_1, \dots, \nu_s}^{\mu_1, \dots, \mu_r}(P) := S \left( dx^{\mu_1}, \dots, dx^{\mu_r}, \frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\nu_s}} \right) \quad (1.24)$$

のように表現される。このようにテンソル場に対して自然基底  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  と座標関数の微分  $dx^\mu$  を用いて表した表示を局所表示と呼ぶ。一般相対性理論ではテンソル場の局所表示を用いて方程式を書く。

一般相対性理論で用いる Riemann 幾何学は曲がった空間上の幾何学である。それは時空を特徴づけるタイプ  $(0,2)$  テンソル場の擬 Riemann 計量  $g$  が Euclid 幾何学の内積とは異なる内積を与えるからである。擬 Riemann 計量の局所表示

$$g_P := g_{\mu\nu}(P) dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (1.25)$$

$$g_{\mu\nu}(P) := g \left( \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_P, \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right)_P \right) \quad (1.26)$$

は対称で非退化な双線形形式である。つまり

$$g_{\mu\nu}(P) = g_{\nu\mu}(P) \quad (1.27)$$

で任意の接ベクトル  $X(P)$  に対して

$$g_P(X(P), X(P)) = 0 \Rightarrow X(P) = 0 \quad (1.28)$$

である。線形係数  $g_{\mu\nu}(P)$  を計量テンソルと呼ぶ。また擬 Riemann 計量の対称性から

$$g_P = g_{\mu\nu}(P) dx^\mu \cdot dx^\nu \equiv ds^2 \quad (1.29)$$

とも書く。平坦な時空の擬 Riemann 計量は Minkowski 計量と呼ばれる。Minkowski 計量は時空の任意の点においてその局所表示が

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (1.30)$$

となる。

曲がった時空ではその性質を反映した微分演算を定義する必要がある。時空上のベクトル場に対する微分演算であるアファイン接続  $\nabla$  を座標近傍  $(U, x_U)$  において

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \quad (1.31)$$

となるように定義する。線形係数  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  は時空上の関数であり接続係数と呼ばれる。ベクトル場  $Y$  に対する  $X$  方向の共変微分係数  $\nabla_X Y$  は

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= X^\mu \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} Y^\nu \cdot \frac{\partial}{\partial x^\nu} + Y^\nu \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \\ &= X^\mu \left( \frac{\partial Y^\lambda}{\partial x^\mu} + Y^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right) \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \\ &\equiv X^\mu \nabla_\mu Y^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \end{aligned} \quad (1.32)$$

となる。一般相対性理論ではどのような時空でも局所慣性系が選べるという等価原理を要請する。これはリーマン幾何学において常に接続係数  $\Gamma_{\mu\sigma}^\rho$  が 0 となるような座標近傍  $(V, y_V)$  が存在することに相当する。この等価原理を満たすための必要十分条件を調べるために、接続係数  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  の変換則を調べる。他の座標近傍  $(V, y_V)$  に関する接続係数を  $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$  として  $U \cap V \neq \emptyset$  の領域を考える。このとき

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\mu}} \frac{\partial}{\partial y^\nu} &\equiv \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial}{\partial y^\lambda} \\ &\equiv \nabla_{\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \left( \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \left( \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) \\ &= \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \\ &= \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial y^\lambda} \end{aligned} \quad (1.33)$$

であるので

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda(y_V(x_U)) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(x_U) + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\alpha} \quad (1.34)$$

となる。接続係数  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  は通常のテンソル場の局所表示と異なる変換をするため、接続係数に条件を課すことで常に 0 となる座標近傍  $(V, x_V)$  を選ぶことができる。その必要十分条件は次のタイプ (1,2) の振率テンソル

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (1.35)$$

が 0 となることである。振率テンソルが 0 であるとき接続  $\nabla$  は対称であるという。振率テンソル  $T$  の局所表示は

$$T_{\mu\nu} = T\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\nu}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad (1.36)$$

であるので、接続  $\nabla$  が対称であるとき接続係数は

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \quad (1.37)$$

を満たす。実際に対称な接続が等価原理の必要条件になっていることを示す。もし等価原理が満たされているなら、ある座標近傍  $(U, x_U)$  において  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x_U) = 0$  とできるので  $U \cap V \neq \emptyset$  を満たす任意の座標近傍  $(V, y_V)$  に対して

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda(y_V(x_U)) = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\alpha} = \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^\lambda(y_V(x_U)) \quad (1.38)$$

となるので接続係数  $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$  は対称となる。逆に接続係数が対称であるなら  $x_U = 0$  において座標近傍  $(V, y_V)$  を

$$y^\mu(x_U) = x^\mu + \frac{1}{2} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(0) x^\alpha x^\beta \quad (1.39)$$

$$x^\mu(y_V) = y^\mu - \frac{1}{2} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(0) y^\alpha y^\beta \quad (1.40)$$

によって導入すれば

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\lambda(y_V(0)) &= \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(0) - \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(0) + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda(0)) \\ &= \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(0) - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda(0)) = 0 \end{aligned} \quad (1.41)$$

となって等価原理が満たされる。つまり一般相対性理論で現れるアファイン接続は対称である。

一般相対性理論では更にベクトル場の内積に対しアファイン接続がライプニッツ則を満たすことを要請する。つまりアファイン接続  $\nabla$  が

$$X_P(g(Y, Z)) = g_P(\nabla_{X_P} Y, Z_P) + g_P(Y_P, \nabla_{X_P} Z) \quad (1.42)$$

を満たすことを課す。このときアファイン接続  $\nabla$  は Riemann 計量  $g$  と両立するという。対称で Riemann 計量  $g$  と両立するアファイン接続  $\nabla$  を Levi-Civita 接続と呼ぶ。局所表示すると

$$\begin{aligned} X^\mu(P) \frac{\partial}{\partial x^\mu} (g_{\alpha\beta} Y^\alpha Z^\beta) \\ &= X^\mu(P) \nabla_\mu Y^\alpha(P) Z^\beta(P) g_{\alpha\beta} + Y^\alpha(P) X^\mu(P) \nabla_\mu Z^\beta g_{\alpha\beta} \\ &= g_{\alpha\beta} X^\mu(P) \nabla_\mu (Y^\alpha(P) Z^\beta(P)) \end{aligned} \quad (1.43)$$

あるいは更に変形して

$$\begin{aligned} X^\mu \left( \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} Y^\alpha Z^\beta + g_{\alpha\beta} \frac{\partial Y^\alpha}{\partial x^\mu} Z^\beta + g_{\alpha\beta} Y^\alpha \frac{\partial Z^\beta}{\partial x^\mu} \right) \\ &= g_{\alpha\beta} X^\mu \left[ \left( \frac{\partial Y^\alpha}{\partial x^\mu} + Y^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \right) Z^\beta + Y^\alpha \left( \frac{\partial Z^\beta}{\partial x^\mu} + Z^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\beta \right) \right] \\ \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} X^\mu Y^\alpha Z^\beta &= g_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha X^\mu Y^\nu Z^\beta + g_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\beta X^\mu Y^\alpha Z^\nu \\ \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - g_{\nu\alpha} \Gamma_{\rho\mu}^\alpha - g_{\mu\alpha} \Gamma_{\rho\nu}^\alpha \right) X^\rho Y^\mu Z^\nu &= 0 \end{aligned} \quad (1.44)$$

より

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} = g_{\mu\alpha} \Gamma_{\rho\nu}^\alpha + g_{\nu\alpha} \Gamma_{\rho\mu}^\alpha \quad (1.45)$$

を得る。このとき接続係数は

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \quad (1.46)$$

と表現できる。この局所表示は Christoffel 記号と呼ばれる。一般相対性理論ではこの Levi-Civita 接続を採用する。

一般相対性理論では Levi-Civita 接続の非可換性に由来する時空の曲率が重要な役割を果たす。タイプ (1,3) のテンソル場である Riemann 曲率テンソル  $R$  を

$$R(X, Y, Z) := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (1.47)$$

と定義する。局所表示すると

$$\begin{aligned} R\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \frac{\partial}{\partial x^\rho} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \left( \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\nu}} \left( \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) \\ &= (\partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\alpha) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - (\partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\alpha) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \\ &= (\partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\sigma + \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma - \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma) \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \\ &:= R_{\rho\mu\nu}^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \end{aligned} \quad (1.48)$$

で

$$R_{\rho\mu\nu}^\sigma := \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\sigma + \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \quad (1.49)$$

となる。更に Riemann の曲率テンソルを利用してタイプ (0,2) のテンソル場である Ricci テンソル  $Ric$  を

$$R_{\mu\nu} := R_{\mu\alpha\nu}^\alpha \quad (1.50)$$

$$Ric := R_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (1.51)$$

によって定義し、スカラー曲率を

$$\rho = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (1.52)$$

によって定義する。ただし以降では局所表示のみを使い、Riemann の曲率テンソル、Ricci テンソル、スカラー曲率のすべてを  $R$  で表して添字の数によって判別する。

一般相対性理論を記述する Lagrangian の候補は

$$\mathcal{L}_{EH} := a_0 + a_1 R + a_{21} R^2 + a_{22} R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + a_{23} R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} + \dots \quad (1.53)$$

である。係数の次元を調べる。 $c = G = 1$  とすれば  $R = [1/L^2] = [1/\hbar]$  であるので  $\mathcal{L}_{EH} = [\hbar/L^4] = [1/\hbar]$  に気をつけると

$$a_0 = [1/\hbar], \quad a_1 = [\hbar^0], \quad a_{21}, a_{22}, a_{23} = [\hbar], \quad \dots \quad (1.54)$$

となる。この事実から  $\hbar$  の正幂の効果は十分小さい、あるいは無いものとして Einstein-Hilbert 作用を

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-\det(g)} (R - 2\Lambda) \quad (1.55)$$

と構成する。ただし  $\kappa, \Lambda$  は実験より決定されるべき定数である。 $\kappa$  は結合定数、 $\Lambda$  は宇宙項と呼ばれる。結合定数は弱重力極限でのニュートン力学との対応から

$$\kappa^2 = 8\pi G \quad (1.56)$$

であり、宇宙項は Planck(2018) の観測より

$$\Lambda = (4.24 \pm 0.11) \times 10^{66} \text{eV}^2 \quad (1.57)$$



である [18]。この作用の  $g_{\mu\nu}$  に関する変分が Einstein 方程式を与える。時空上の計量と物質場の結合を考えるために物質場の作用

$$S_{\text{matter}} := \int d^4x \sqrt{-\det(g)} \mathcal{L}_{\text{matter}} \quad (1.58)$$

を考える。エネルギー・運動量テンソルを

$$T_{\mu\nu} := \frac{-2}{\sqrt{-\det(g)}} \frac{\delta S_{\text{matter}}}{\delta g^{\mu\nu}} \Rightarrow \delta S_{\text{matter}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-\det(g)} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (1.59)$$

と定義する。このとき付録Aから

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta S_{\text{EH}} + \delta S_{\text{matter}} \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-\det(g)} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} - \kappa^2 T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.60)$$

であるので

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (1.61)$$

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (1.62)$$

となる。このテンソル  $G_{\mu\nu}$  を Einstein テンソルと呼び、この方程式を Einstein 方程式と呼ぶ。しばしば宇宙項  $\Lambda$  を右辺に移行してエネルギー・運動量テンソル  $T_{\mu\nu}$  に含める場合がある。以降では宇宙項を省略する。

修正重力理論ではここで得られた Einstein-Hilbert 作用に対して何らかの指導原理に基づいて修正を行う。代表的な修正は

- 新たな場を加える [19]
- 曲率テンソルの高次項を考慮する [20, 21]
- 曲率の非局所項を加える [22]
- 高次元空間を考慮する [23, 24, 25, 26, 27]

などである [28]。本研究では有質量重力理論と呼ばれる理論の特定のクラスを用いる。この理論は重力子の有質量化を指導原理においており、Einstein-Hilbert 作用に新たなテンソル場を加えて構成された理論になっている。重力理論の自由度は付録Bの Hamilton 解析によって調べることができる。この解析から一般相対性理論は無質量スピン 2 の場の理論で 2 つのテンソルモードのみが存在することがわかるが、有質量重力理論では有質量スピン 2 の場の理論として新たなモードによる自由度が存在することがわかる。この詳細は後の章で解説する。



## 第 2 章

# TOV 方程式と質量-半径関係

修正重力理論は一般相対性理論を元に重力理論の拡張を行う。そのため修正重力理論での議論に一般相対性理論での議論を利用できる場合が多く存在する。ここでは修正重力における相対論的天体の解を考える前に、一般相対性理論における相対論的の解を導出する。この章での議論を後の章で利用する。

一般相対性理論において (回転のない) 相対論的天体は、静的球対称に分布する物質の解として記述される。ここではそのような解の従う運動方程式を導出し、数値計算を行う方法について述べる。解の系列は相対論的天体の質量と半径の関係式として表すことができる。実際上の応用として質量と半径の関係式から状態方程式を逆算する方法についても述べる。

### 2.1 一般相対性理論における静的球対称解

まず静的球対称な計量の一般形を書き下し、その計量に対して Einstein テンソルを計算する。次に完全流体の物質分布を仮定し Einstein 方程式を立式する。Einstein 方程式を変形することによりトルマン・オッペンハイマー・ヴォルコフ方程式 (Tolman-Oppenheimer-Volkoff 方程式: TOV 方程式) [29] を導出する。更に TOV 方程式を数値計算を行う際に便利な形に変形を行う。

まず静的球対称性から計量の一般形を

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.1)$$

とおく。以降ではこの  $\nu(r)$ ,  $\lambda(r)$  に関する微分方程式を立式する。また  $r$  微分を  $'$  によって表す。接続  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  の計算は Lagrangian

$$L = \frac{ds^2}{d\tau^2} \quad (2.2)$$

によって Lagrange 方程式

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad (2.3)$$

を計算し、測地線方程式

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (2.4)$$

と比較すると

$$\begin{aligned}\Gamma_{tr}^t &= \frac{1}{2}\nu', & \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu', & \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2}\lambda', & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -re^{-\lambda}, \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -re^{-\lambda}\sin^2\theta, & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin\theta\cos\theta, & \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\end{aligned}\quad (2.5)$$

となる。Ricci テンソルは

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\beta - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \quad (2.6)$$

であるため、

$$\partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha, \quad \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha, \quad \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \quad (2.7)$$

を計算する。 $\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha$  は

$$\Gamma_{t\alpha}^\alpha = 0, \quad \Gamma_{r\alpha}^\alpha = \frac{1}{2}(\nu' + \lambda') + \frac{2}{r}, \quad \Gamma_{\theta\alpha}^\alpha = \frac{1}{\tan\theta}, \quad \Gamma_{\phi\alpha}^\alpha = 0 \quad (2.8)$$

であるため

$$R_{tt} = \partial_r \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{tt}^r \Gamma_{r\alpha}^\alpha - 2\Gamma_{tr}^t \Gamma_{tt}^r = e^{\nu-\lambda} \left( \frac{\nu''}{2} + \frac{(\nu')^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right), \quad (2.9)$$

$$R_{rr} = \partial_r \Gamma_{rr}^r - \partial_r \Gamma_{r\alpha}^\alpha + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{\alpha r}^\alpha - (\Gamma_{r\alpha}^\alpha)^2 = -\frac{\nu''}{2} - \frac{(\nu')^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r}, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}R_{\theta\theta} &= \partial_r \Gamma_{\theta\theta}^r - \partial_\theta \Gamma_{\theta\alpha}^\alpha + \Gamma_{\theta\theta}^r \Gamma_{r\alpha}^\alpha - \left( 2\Gamma_{\theta\theta}^r \Gamma_{r\theta}^\theta + (\Gamma_{\phi\theta}^\theta)^2 \right) \\ &= e^{-\lambda} \left[ \frac{1}{2}r(\lambda' - \nu') - 1 \right] + 1\end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}R_{\phi\phi} &= \partial_r \Gamma_{\phi\phi}^r + \partial_\theta \Gamma_{\phi\phi}^\theta + \Gamma_{\phi\phi}^r \Gamma_{r\alpha}^\alpha + \Gamma_{\phi\phi}^\theta \Gamma_{\theta\alpha}^\alpha - 2\left( \Gamma_{\phi\phi}^r \Gamma_{\phi r}^\phi + \Gamma_{\phi\phi}^\theta \Gamma_{\phi\theta}^\phi \right) \\ &= \sin^2\theta R_{\theta\theta}\end{aligned} \quad (2.12)$$

となる。 $R^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha} R_{\alpha\nu}$  とリッチスカラー  $R = R^\alpha{}_\alpha$  を計算すると

$$R^t{}_t = e^{-\lambda} \left( -\frac{\nu''}{2} - \frac{(\nu')^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'}{r} \right) \quad (2.13)$$

$$R^r{}_r = e^{-\lambda} \left( -\frac{\nu''}{2} - \frac{(\nu')^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r} \right) \quad (2.14)$$

$$R^\theta{}_\theta = e^{-\lambda} \left( -\frac{1}{2r}(\nu' - \lambda') - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \quad (2.15)$$

$$R^\phi{}_\phi = R^\theta{}_\theta \quad (2.16)$$

$$R = e^{-\lambda} \left( -\nu'' - \frac{(\nu')^2}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{2} - \frac{2}{r}(\nu' - \lambda') - \frac{2}{r^2} \right) + \frac{2}{r^2} \quad (2.17)$$

となる。Einstein テンソルは

$$G^\mu{}_\nu = R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu R \quad (2.18)$$

であり

$$G^t_t = e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} [r(e^{-\lambda} - 1)]' \quad (2.19)$$

$$G^r_r = e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \quad (2.20)$$

$$G^\theta_\theta = G^{(0)\phi}_\phi = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left( \nu'' + \frac{(\nu')^2}{2} - \frac{\nu' \lambda'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) \quad (2.21)$$

となる。

次に Einstein 方程式を立式するためエネルギー・運動量テンソルを定義する。完全流体

$$T^\mu_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p) \quad (2.22)$$

を仮定する。完全流体のダイナミクスを決定する方程式は

$$\nabla_\alpha T^\alpha_\mu = 0 \quad (2.23)$$

と状態方程式  $p = p(\rho)$  である。上記の方程式のうち非自明な結果を与えるのは  $\mu = r$  の場合のみで

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\alpha T^\alpha_r + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha T^\beta_r - \Gamma_{\alpha r}^\beta T^\alpha_\beta \\ &= \partial_r T^r_r + \Gamma_{\alpha r}^\alpha T^r_r - \sum_\alpha \Gamma_{\alpha r}^\alpha T^\alpha_\alpha \\ &= p' + \left( \frac{\nu' + \lambda'}{2} + \frac{2}{r} \right) p + \frac{\nu'}{2} \rho - \frac{\lambda'}{2} p - \frac{1}{r^2} p - \frac{1}{r} p \\ &= p' + \frac{p + \rho}{2} \nu' \end{aligned} \quad (2.24)$$

である。

これまでで Einstein 方程式

$$G^{\mu\nu} = \kappa^2 T^{\mu\nu} \quad (2.25)$$

を書き下すために必要なテンソル量を計算した。このうち  $tt$  成分の式から  $\lambda(r)$  が、 $rr$  成分の式から  $\nu(r)$  が決定される。残りの  $\theta\theta$ ,  $\phi\phi$  成分の式は新たな微分方程式を生まず、他の式と整合的な式になっている。

実際 Einstein 方程式の  $tt$  成分について変形すると

$$\begin{aligned} -\kappa^2 \rho &= e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \\ \lambda' &= \frac{e^\lambda}{r} [-(1 - e^{-\lambda}) + \kappa^2 \rho r^2] \end{aligned} \quad (2.26)$$

のように  $\lambda'$  に関する式となる。ここで観測によって測られる質量は固有質量

$$M_p \equiv \int d^3x \sqrt{{}^{(3)}g} \rho \quad (2.27)$$

ではなく質量パラメータ  $m(r)$

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2m(r)}{r} \quad (2.28)$$

であることを考慮して  $m'$  の式として書き直すと、

$$\begin{aligned} -\lambda' e^{-\lambda} &= \frac{1}{r}(1 - e^{-\lambda}) - \kappa^2 \rho r \\ -\frac{2m'}{r} + \frac{2m}{r} &= \frac{1}{r} \frac{2m}{r} - \kappa^2 \rho r \\ m' &= 4\pi r^2 \rho \end{aligned} \quad (2.29)$$

となる。これは非相対論的静水圧平衡における質量保存の式に他ならない。

$rr$  成分の運動方程式に関しては

$$\begin{aligned} \kappa^2 p &= e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \\ \nu' &= \frac{e^\lambda}{r} (1 - e^{-\lambda} + \kappa^2 p r^2) \\ &= \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \left( \frac{2m}{r} + \kappa^2 p r^2 \right) \\ &= 2 \frac{m + 4\pi p r^3}{r(r - 2m)} \end{aligned} \quad (2.30)$$

のように  $\nu'$  に関する式となる。先程のエネルギー・運動量テンソルの保存則と合わせれば

$$p' = -\frac{p + \rho}{2} \nu' = -\frac{(p + \rho)(m + 4\pi p r^3)}{r(r - 2m)} \quad (2.31)$$

となるので静水圧平衡の式であることがわかる。 $G, c$  を明記すれば

$$p' = -G \frac{\left( m + 4\pi r^3 \frac{\rho}{c^2} \right) \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right)}{r^2 \left( 1 - \frac{2Gm}{c^2 r} \right)} \quad (2.32)$$

であるため  $1/c^2$  のある項が相対論的補正になっていることがわかる。

最後に  $\theta\theta, \phi\phi$  成分の式に対する整合性の確認を行う。これらの式には  $\nu''$  を含むため、 $\nu''$  を消去するために  $rr$  の式の微分を計算すると

$$\begin{aligned} -\kappa^2 \frac{\rho + p}{2} \nu' r &= \kappa^2 p' r = e^{-\lambda} \left( \nu'' - \frac{\nu' + \lambda'}{r} - \nu' \lambda' - \frac{2}{r^2} \right) + \frac{2}{r^2} \\ e^{-\lambda} \nu'' &= e^{-\lambda} \left[ \frac{\nu' + \lambda'}{r} + \nu' \lambda' + \frac{2}{r^2} \right] - \frac{2}{r^2} - \kappa^2 \frac{\rho + p}{2} \nu' r \end{aligned} \quad (2.33)$$

となる。よって

$$\begin{aligned} G^\theta_\theta &= G^\phi_\phi = \frac{e^{-\lambda}}{2} \left( \nu'' + \frac{(\nu')^2}{2} - \frac{\nu' \lambda'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{2} \left[ \frac{\nu'}{2} (\nu' + \lambda') + \frac{2}{r} \left( \nu' + \frac{1}{r} \right) \right] - \frac{1}{r^2} - \kappa^2 \frac{\rho + p}{4} \nu' r \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{2} \left[ \frac{\nu'}{2} e^\lambda \kappa^2 (\rho + p) + \frac{2}{r} \left( \nu' + \frac{1}{r} \right) \right] - \frac{1}{r^2} - \kappa^2 \frac{\rho + p}{4} \nu' r \\ &= e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \\ &= \kappa^2 p \end{aligned} \quad (2.34)$$

となって無矛盾な結果を得る。

以上により相対論的天体に対する静水圧平衡の式である TOV 方程式は

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (2.35)$$

$$\frac{dp(r)}{dr} = -(\rho(r) + p(r)) \frac{m(r) + 4\pi r^3 p(r)}{r(r - 2m(r))} \quad (2.36)$$

となる。

## 2.2 TOV 方程式の境界条件と数値計算

TOV 方程式を数値的に解く場合、天体中心と無限遠との二点境界値問題として扱う。天体表面  $r = R$  の条件は  $p(r = R) = 0$  であり、天体内部と真空 ( $p = \rho = 0$ ) である天体外部の解を接続して考える。天体中心では計量  $g_{\mu\nu}$  が (conical singularity を生じないよう) 滑らかであるために

$$\nu(r = 0) = \lambda(r = 0) = 0 \quad (2.37)$$

である必要がある [14]。無限遠でも重力が無視できると考えるため同様に

$$\nu(r \rightarrow \infty) = \lambda(r \rightarrow \infty) = 0 \quad (2.38)$$

を課す。一方無限遠は天体外部で真空であるので、TOV 方程式は

$$\frac{dm(r > R)}{dr} = 0, \quad (2.39)$$

$$\frac{d\nu(r > R)}{dr} = \frac{2m}{r(r - 2m)} \quad (2.40)$$

であるので  $m'$  の式から

$$m(r > R) = m(r = R) \equiv M \quad (2.41)$$

であり  $\nu'$  の式から

$$\begin{aligned} \nu(r \rightarrow \infty) &= \int_R^\infty \frac{2Mdr}{r(r - 2M)} + \nu(r = R) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \ln \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) - \ln \left( 1 - \frac{2M}{R} \right) + \nu(r = R) \\ &= \nu(r = R) - \ln \left( 1 - \frac{2M}{R} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

より

$$e^{\nu(r=R)} = 1 - \frac{2M}{R} \quad (2.43)$$

である。つまり無限遠での条件を課さなくとも、外部を Schwarzschild 解として内部解と天体表面で繋げれば十分である。天体中心から初期値問題として解いて天体表面まで解を構成すればよい。

ただし初期条件を  $r = 0$  で与えると TOV 方程式が不定形であるため、数値計算で解くことができない。したがって天体付近の解を解析に構成し、そこから天体表面まで数値的に解く必要がある。 $m'(r)$  に関しては

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \left( \rho_c + \frac{dp}{dp} \bigg|_c \frac{dp}{dr} \bigg|_c r + \mathcal{O}(r^2) \right) \quad (2.44)$$

であるため

$$m(r) = \frac{4\pi}{3} \rho_c r^3 + \mathcal{O}(r^4) \quad (2.45)$$

となる。これより天体中心での圧力・密度を

$$p(r=0) = p_c \quad (2.46)$$

$$\rho(r=0) = \rho_c \quad (2.47)$$

とすれば  $p'(r)$  に関する式は

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} &= -(\rho_c + p_c + \mathcal{O}(r^2)) \frac{\frac{4\pi}{3} \rho_c r^3 + 4\pi p_c r^3 + \mathcal{O}(r^3)}{r(r + \mathcal{O}(r^3))} \\ &= -\frac{4\pi}{3} (\rho_c + p_c)(\rho_c + 3p_c)r + \mathcal{O}(r^2) \end{aligned} \quad (2.48)$$

となるため

$$p(r) = p_c - \frac{2\pi}{3} (\rho_c + p_c)(\rho_c + 3p_c)r^2 + \mathcal{O}(r^3) \quad (2.49)$$

となる。まとめると天体中心付近の解析解は

$$m(r) = \frac{4\pi}{3} \rho_c r^3 + \mathcal{O}(r^4) \quad (2.50)$$

$$p(r) = p_c - \frac{2\pi}{3} (\rho_c + p_c)(\rho_c + 3p_c)r^2 + \mathcal{O}(r^3) \quad (2.51)$$

となる。よって数値解は中心圧力  $p_c$  を選んで中心密度  $\rho_c = \rho(p_c)$  を求め、0 ではない微小な  $r \ll 1$  を選んで初期条件を生成すればよい。

数値計算を実行する際には各物理量を適切に無次元化する必要がある。TOV 方程式の場合は中心圧力を用いて無次元化するとよい。中心圧力は初期条件と計算終了の条件 ( $p=0$ ) に用いられているからである。まず中心密度を

$$\rho_c \equiv \frac{p_c}{c^2} \quad (2.52)$$

を用いて

$$\tilde{\rho} \equiv \frac{\rho}{\rho_c} \quad (2.53)$$

のように無次元化する。動径座標と質量に関しては

$$\begin{aligned} r_c &\equiv \frac{GM_c}{c^2}, \quad M_c \equiv \rho_c r_c^3 \\ \Leftrightarrow r_c &= \frac{c}{\sqrt{G\rho_c}}, \quad M_c = \frac{c^3}{\sqrt{G^3\rho_c}} \end{aligned} \quad (2.54)$$

を用いて

$$\tilde{r} \equiv \frac{r}{r_c}, \quad \tilde{M} \equiv \frac{M}{M_c} \quad (2.55)$$

のように無次元化する。以降の表式はこのように無次元化したあと  $\sim$  をはずしたものととして扱う。

上記によって原理上数値計算を実行することができるが、実際上不都合な点が存在する。それは  $p=0$  の条件で天体表面を判定するため積分区間が不定であるため、 $p=0$  となる  $r$  を調べるために天体表面での刻み幅を細かくすることが必要である点である。これを解



決するには  $r$  に代わる変数を、天体表面で一定の値になるように選ぶとよい。一つの例として擬エンタルピー

$$h(p) \equiv \int_0^p \frac{d\tilde{p}}{\rho(\tilde{p}) + \tilde{p}} \quad (2.56)$$

を用いる方法 [30] を考える。この擬エンタルピーは天体表面で 0 となるため、積分区間が

$$0 \leq h \leq h(p = p_c) \quad (2.57)$$

となり数値計算に適している。この場合 TOV 方程式は

$$\frac{dm}{dr} = \frac{dm}{dh} \left( \frac{dr}{dh} \right)^{-1} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (2.58)$$

$$\frac{dp}{dr} = \left( \frac{dh}{dp} \frac{dr}{dh} \right)^{-1} = (\rho + p) \left( \frac{dr}{dh} \right)^{-1} = -(\rho + p) \frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m)} \quad (2.59)$$

より

$$\frac{dm}{dh} = 4\pi r^2 \rho(h) \frac{dr}{dh} \quad (2.60)$$

$$\frac{dr}{dh} = -\frac{r(r - 2m)}{m + 4\pi r^3 p} \quad (2.61)$$

となる。仮に代わりの変数に圧力  $p$  を用いても良いように見えるが、積分区間の不定性は取り除けるものの

$$\frac{dr}{dp} = -\frac{r(r - 2m)}{(m + 4\pi r^3 p)(\rho + p)} \xrightarrow{p \rightarrow 0} -\infty \quad (2.62)$$

であるので不適切である。

この上で元の TOV 方程式と同様に天体中心付近の解析解を求める。まず  $m$  の星中心からの展開は

$$\frac{dm}{dh} = 4\pi r^2 (\rho_c + \mathcal{O}(h - h_c)) \frac{dr}{dh} \quad (2.63)$$

である。よって積分すれば

$$\begin{aligned} m &= \int_0^r d\tilde{r} 4\pi \tilde{r}^2 (\rho_c + \mathcal{O}(h - h_c)) \\ &= \frac{4\pi}{3} \rho_c r^3 + \mathcal{O}(r^3(h - h_c)) \end{aligned} \quad (2.64)$$

となる。またこれより  $r$  の星中心からの展開は

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dh} &= -\frac{r \left[ r - \frac{8\pi}{3} \rho_c r^3 + \mathcal{O}(r^3(h - h_c)) \right]}{\frac{4\pi}{3} \rho_c r^3 + 4\pi r^3 p_c + \mathcal{O}(r^3(h - h_c))} \\ &= -\frac{3(1 + \mathcal{O}(r^2))}{4\pi r(\rho_c + 3p_c)(1 + \mathcal{O}(h - h_c))} \\ &= -\frac{3}{4\pi r(\rho_c + 3p_c)} (1 + \mathcal{O}(\max(r^2, h - h_c))) \end{aligned} \quad (2.65)$$

である。従って積分すれば

$$\begin{aligned} \int_0^r d\tilde{r} \tilde{r} &= -\int_{h_c}^h d\tilde{h} \frac{3}{4\pi(\rho_c + 3p_c)} (1 + \mathcal{O}(\max(r^2, h - h_c))) \\ \frac{1}{2} r^2 &= \frac{3(h_c - h)}{4\pi(\rho_c + 3p_c)} (1 + \mathcal{O}(\max(r^2, h - h_c))) \\ r &= \sqrt{\frac{3(h_c - h)}{2\pi(\rho_c + 3p_c)}} (1 + \mathcal{O}(h - h_c)) \end{aligned} \quad (2.66)$$

となる。 $h - h_c$  について解けば

$$h_c - h = \frac{2\pi}{3}(\rho_c + 3p_c)r^2(1 + \mathcal{O}(r^2)) \quad (2.67)$$

となる。

更に2次の展開も求める。 $m$  に関しては最低次と同様にして

$$\begin{aligned} m &= \int_0^r d\tilde{r} 4\pi \tilde{r}^2 \left( \rho_c + \frac{d\rho}{dh} \Big|_c (h - h_c) + \mathcal{O}((h - h_c)^2) \right) \\ &= 4\pi \rho_c \int_0^r d\tilde{r} \tilde{r}^2 \left( 1 + \frac{2\pi(\rho_c + 3p_c)}{3\rho_c} \frac{d\rho}{dh} \Big|_c \tilde{r}^2 + \mathcal{O}(r^4) \right) \\ &= 4\pi \rho_c \left( \frac{1}{3} r^3 - \frac{2\pi(\rho_c + 3p_c)}{3\rho_c} \frac{d\rho}{dh} \Big|_c \frac{1}{5} r^5 + \mathcal{O}(r^7) \right) \\ &= \frac{4\pi}{3} \rho_c r^3 \left( 1 - \frac{3}{5} \frac{d\rho}{dh} \Big|_c \frac{h_c - h}{\rho_c} + \mathcal{O}((h_c - h)^2) \right) \end{aligned} \quad (2.68)$$

となる。これより

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dh} &= -r \left[ r - \frac{8\pi}{3} \rho_c r^3 \left( 1 - \frac{3}{5} \frac{d\rho}{dh} \Big|_c \frac{h_c - h}{\rho_c} + \mathcal{O}((h_c - h)^2) \right) \right] \\ &\quad \times \left[ \frac{4\pi}{3} \rho_c r^3 \left( 1 - \frac{3}{5} \frac{d\rho}{dh} \Big|_c \frac{h_c - h}{\rho_c} \right) + 4\pi r^3 (p_c + (\rho_c + p_c)(h - h_c)) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{O}((h_c - h)^{7/2}) \right]^{-1} \\ &= -r^2 \left[ 1 - \frac{8\pi}{3} \rho_c r^2 + \mathcal{O}((h_c - h)^2) \right] \left[ \frac{4\pi}{3} r^3 (\rho_c + 3p_c) \right]^{-1} \\ &\quad \times \left[ 1 + \frac{3}{5} \left( \frac{d\rho}{dh} \Big|_c + 5(\rho_c + p_c) \right) \frac{h - h_c}{\rho_c + 3p_c} + \mathcal{O}((h - h_c)^2) \right]^{-1} \\ &= -\frac{3}{4\pi(\rho_c + 3p_c)r} \left[ 1 - \frac{2\rho_c}{\rho_c + 3p_c} (h_c - h) + \mathcal{O}((h_c - h)^2) \right] \\ &\quad \times \left[ 1 + \frac{3}{5} \left( \frac{d\rho}{dh} \Big|_c + 5(\rho_c + p_c) \right) \frac{h - h_c}{\rho_c + 3p_c} + \mathcal{O}((h - h_c)^2) \right]^{-1} \\ &= -\frac{3}{4\pi(\rho_c + 3p_c)r} \left[ 1 + \left( \rho_c - 3p_c - \frac{3}{5} \frac{d\rho}{dh} \Big|_c \right) \frac{h - h_c}{\rho_c + 3p_c} + \mathcal{O}((h - h_c)^2) \right] \end{aligned} \quad (2.69)$$

となる。積分を実行すれば

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} r^2 &= -\frac{3}{4\pi(\rho_c + 3p_c)} \left[ (h - h_c) + \frac{1}{2} \left( \rho_c - 3p_c - \frac{3}{5} \frac{d\rho}{dh} \Big|_c \right) \frac{(h - h_c)^2}{\rho_c + 3p_c} \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{O}((h - h_c)^3) \right] \\ r &= \sqrt{\frac{3(h_c - h)}{2\pi(\rho_c + 3p_c)} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \rho_c - 3p_c - \frac{3}{5} \frac{d\rho}{dh} \Big|_c \right) \frac{h_c - h}{\rho_c + 3p_c} + \mathcal{O}((h_c - h)^2) \right]} \quad (2.70) \\ r &= \sqrt{\frac{3(h_c - h)}{2\pi(\rho_c + 3p_c)} \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \rho_c - 3p_c - \frac{3}{5} \frac{d\rho}{dh} \Big|_c \right) \frac{h_c - h}{\rho_c + 3p_c} + \mathcal{O}((h_c - h)^2) \right]} \end{aligned}$$

となる。

天体中心付近の解析解をまとめると

$$m = \frac{4\pi}{3} \rho_c r^3 \left( 1 - \frac{3}{5} \frac{d\rho}{dh} \Big|_c \frac{h_c - h}{\rho_c} + \mathcal{O}((h_c - h)^2) \right) \quad (2.71)$$

$$r = \sqrt{\frac{3(h_c - h)}{2\pi(\rho_c + 3p_c)} \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \rho_c - 3p_c - \frac{3}{5} \frac{d\rho}{dh} \Big|_c \right) \frac{h_c - h}{\rho_c + 3p_c} + \mathcal{O}((h_c - h)^2) \right]} \quad (2.72)$$

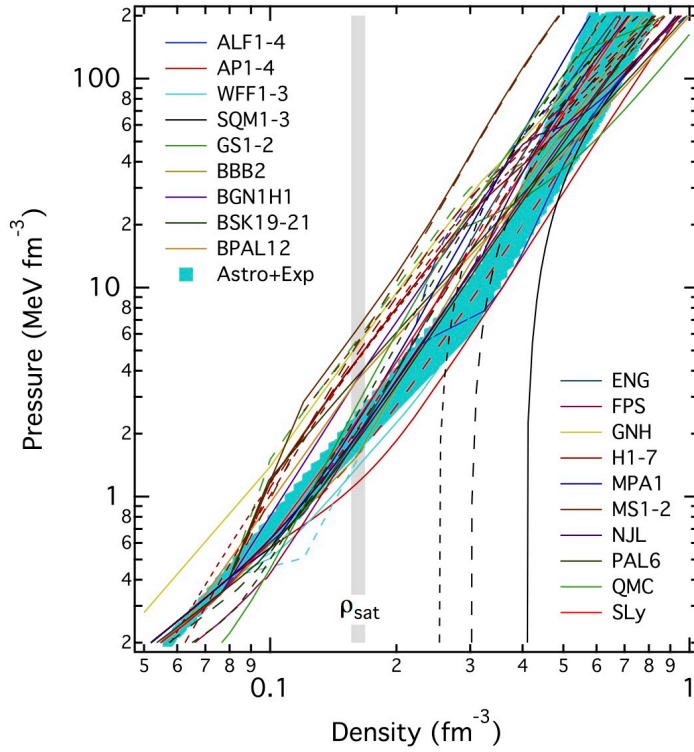


図2.1 現在までに提案されている状態方程式の一覧。図は文献 [37, 38, 8] から引用。  
原論文に基づき Web サイト [9] を参照した。

となる。よってこの式によって初期条件を構成し、 $h = 0$  まで数値積分を実行すればよい。

## 2.3 質量-半径関係

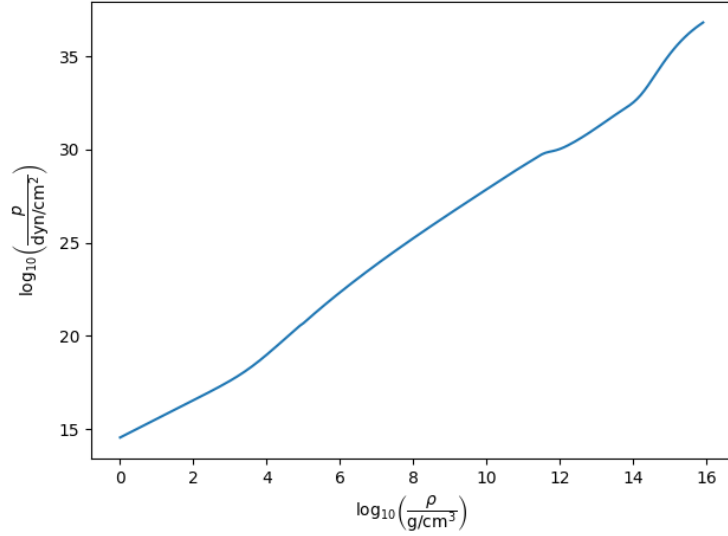
前節に従って TOV 方程式を解き、相対論的天体の質量-半径関係を求める。質量-半径関係を計算するには状態方程式  $p = p(\rho)$  が必要になる。前述の通り相対論的天体の内部構造には様々な予想がなされている。各内部構造に対応した状態方程式を選んで中性子星の質量-半径関係を計算する必要がある。中性子星の内核のモデルとしては外核と同様に  $n, p, e, \mu$  などの核物質であるとするもの、 $\Sigma, \Lambda, \Xi$  などのハイペロンであるとするもの、 $\pi$  中間子や  $K$  中間子による凝縮であるとするもの、 $u, d, s$  などのクォーク物質であるとするものがある [13]。例えば核物質に対する状態方程式としては FPS モデル [31] や SLy モデル [32] などがある。他にもエキゾチック物質としてハイペロンを考慮したモデル [33] や  $K$  中間子の凝縮を考慮したモデル [34]、クォーク物質を仮定したモデル [35] などがある。図2.1に現在までに提案されている状態方程式の一覧を示す。ここではデモとして SLy モデルにフィッティングを施した解析式 [36] を状態方程式として用いる。

このモデルでは

$$\xi = \log_{10} \left( \frac{\rho}{\text{g/cm}^3} \right), \quad \zeta = \log_{10} \left( \frac{p}{\text{dyn/cm}^2} \right), \quad f_0(x) = \frac{1}{e^x + 1} \quad (2.73)$$

|       |        |        |          |         |         |         |
|-------|--------|--------|----------|---------|---------|---------|
| $i$   | 1      | 2      | 3        | 4       | 5       | 6       |
| $a_i$ | 6.22   | 6.121  | 0.005925 | 0.16326 | 6.48    | 11.4971 |
| $i$   | 7      | 8      | 9        | 10      | 11      | 12      |
| $a_i$ | 19.105 | 0.8938 | 6.54     | 11.8421 | -22.003 | 1.5552  |
| $i$   | 13     | 14     | 15       | 16      | 17      | 18      |
| $a_i$ | 9.3    | 14.19  | 23.73    | -1.508  | 1.79    | 15.13   |

表2.1 状態方程式 (2.74) 式のフィッティングパラメータ。原論文 [36] より作成。

図2.2 回転のない相対論的天体に対する SLy モデルにフィッティングを行った解析式 (2.74) 式および (2.75) 式のグラフ。おおよそ  $11 < \xi$  が SLy モデルのフィッティングになっている [36]。

と定義すると、回転していない相対論的天体に対して状態方程式が

$$\zeta = \frac{a_1 + a_2\xi + a_3\xi^3}{1 + a_4\xi} f_0(a_5(\xi - a_6)) + (a_7 + a_8\xi) f_0(a_9(a_{10} - \xi)) + (a_{11} + a_{12}\xi) f_0(a_{13}(a_{14} - \xi)) + (a_{15} + a_{16}\xi) f_0(a_{17}(a_{18} - \xi)) \quad (2.74)$$

と与えられる。ただし各パラメータ  $a_i$  は表 2.1によって与えられる。この状態方程式は  $\xi > 5$  で有効である。 $\xi < 5$  では順圧 (barotropic) ではなく温度依存性が現れるが、 $10^7\text{K}$  の場合であれば OPAL 状態方程式 [39] に

$$p = 10^\zeta + 3.5 \times 10^{14} \rho \quad (2.75)$$

によって繋ぐことができる [36]。このようにして構成された状態方程式の概形を図 2.2に示す。

質量-半径関係を計算するにはまず状態方程式から図 2.3のように擬エンタルピーを計算しその後中心密度を初期条件として与えて天体表面まで解く。結果の一つが図 2.4である。擬エンタルピーを導入することで  $m, r$  が指数的に増大しないため、計算が容易になっていることがわかる。質量-半径関係を計算した結果は図 2.5である。結果から従来の核

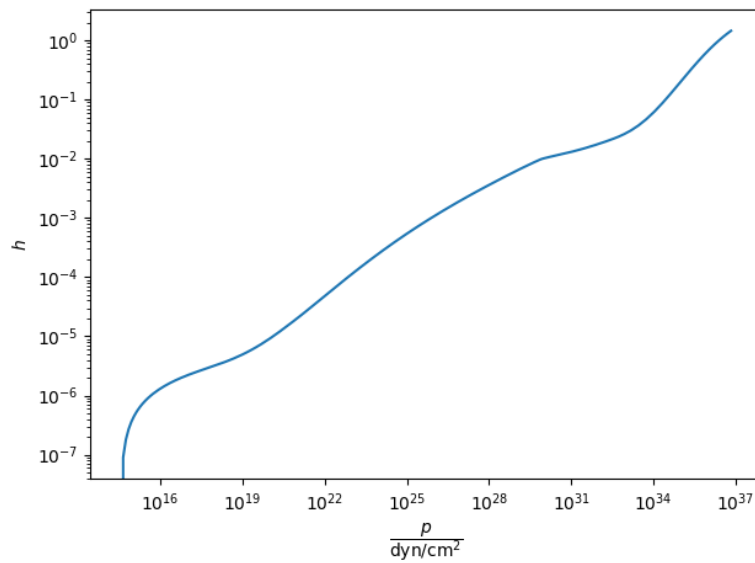


図2.3 擬エンタルピー (2.56) 式を状態方程式 (2.74) 式および (2.75) 式に対して計算したグラフ

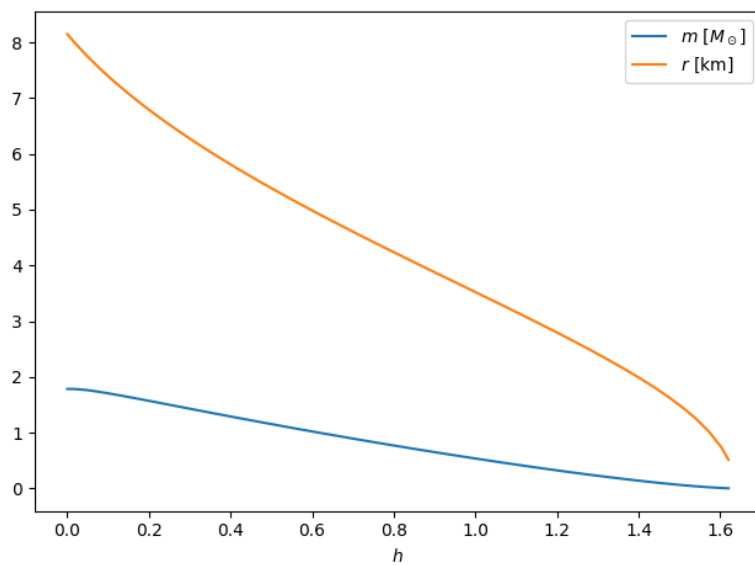


図2.4 中心密度を  $10^{16} \text{g/cm}^3$  としたときの質量  $m$  と動径座標  $r$  に対する擬エンタルピー  $h$  の依存性を表したグラフ

物質を想定した SLy モデルでは  $2M_{\odot}$  程度の相対論的天体が現れることがわかる。また図 2.6 から中性子星の系列と白色矮星の系列が不安定な系列を通じて実際に繋がっていることが読み取れる。他の状態方程式を用いた場合の結果を図2.7に示す。状態方程式には最大質量が  $2M_{\odot}$  に達するものとそうでないものがあることがわかる。観測で見つかっている  $2M_{\odot}$  の相対論的天体を説明するように高密度の状態方程式を立式する必要があることがわかる。

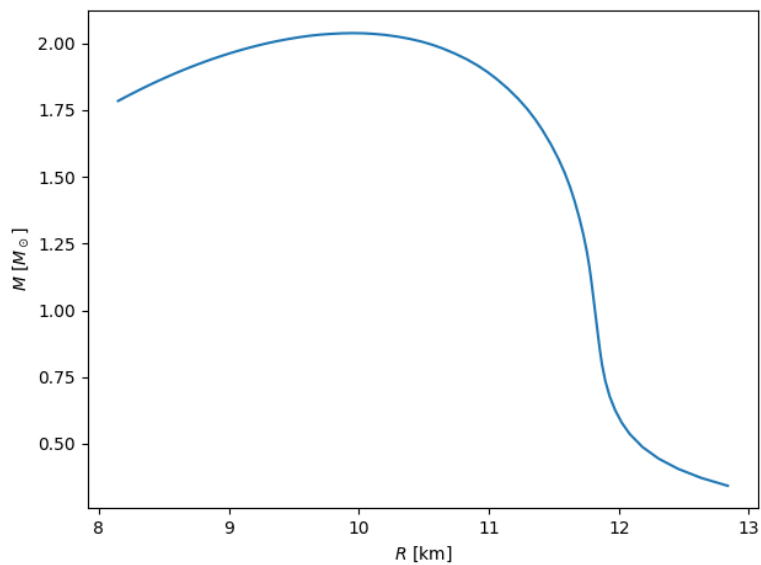


図2.5 状態方程式 (2.74) 式および (2.75) 式を用いて、TOV 方程式を中心密度  $10^{14.3}\text{g/cm}^3$  から  $10^{16}\text{g/cm}^3$  の場合まで解いた場合に得られた質量-半径関係。最大質量が  $2M_{\odot}$  に到達している。

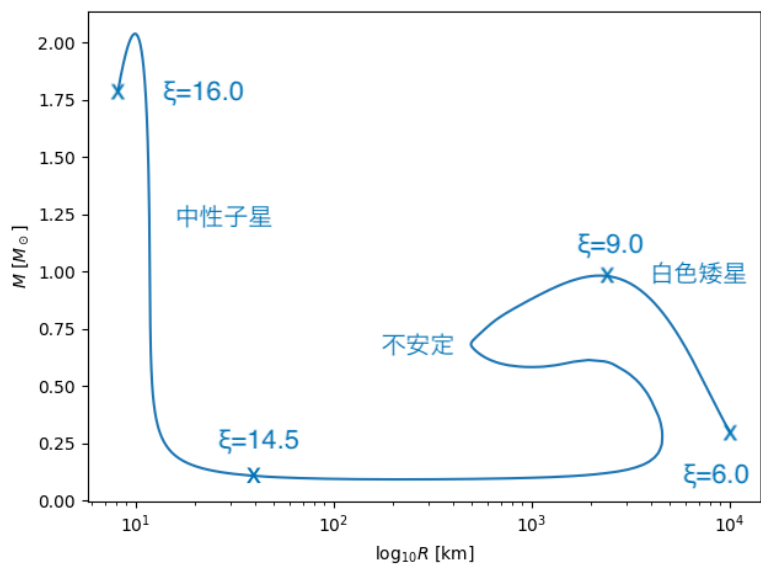


図2.6 状態方程式 (2.74) 式および (2.75) 式を用いて、TOV 方程式を中心密度  $10\text{g/cm}^3$  から  $10^{16}\text{g/cm}^3$  の場合まで解いた場合に得られた質量-半径関係。白色矮星の系列から不安定な系列を経由して中性子星の系列へと繋がる [14]。

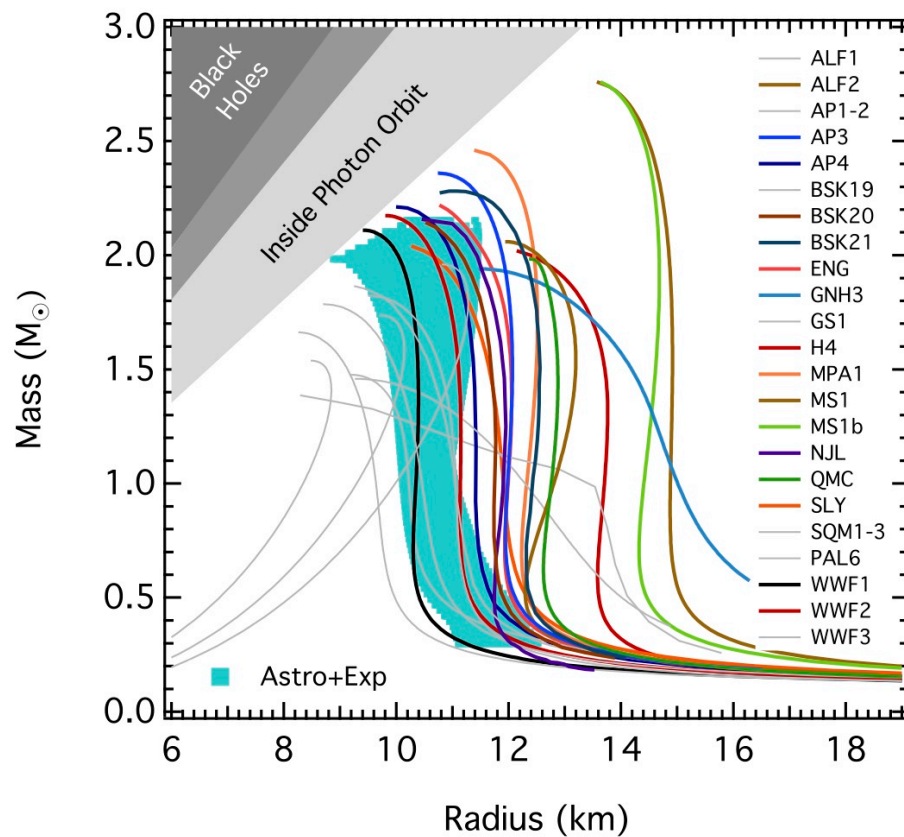


図2.7 状態方程式毎の質量-半径関係の一覧。図は文献 [40, 41, 8] より引用。原論文に基づき Web サイト [9] を参照した。

## 2.4 TOV 逆写像

これまででは状態方程式  $\rho = \rho(p)$  が与えられた場合に、質量-半径関係を数値的に構成する方法を求めた。実用上は逆に相対論的天体の観測で得られた質量-半径関係から、状態方程式  $\rho = \rho(p)$  を構築する方法 (TOV 逆写像) も重要である。擬エンタルピーを用いて書き直した TOV 方程式はこの目的に適している。(2.35) 式は未定関数が  $m(h)$ ,  $r(h)$  であるため、質量-半径関係のデータ  $(M, R)$  を初期条件として天体表面から天体中心に数値積分を行うことができる。TOV 逆写像を構成するのにキーとなるアイデアは、既知の低密度の状態方程式から未知の高密度の状態方程式へと外挿を逐次行っていくというものである。

まず前提条件として

- 状態方程式のうち  $p \leq p_i$  が既知
- 質量-半径関係が既知
- ただし  $p_i$  を中心密度とする相対論的天体の解が既知の質量-半径関係に含まれている

という状況を考える。このとき状態方程式を外挿する方法は

1.  $p_i$  を中心圧力とした解を  $(M_i, R_i)$  とする
2.  $(M-R)$  関係から) 中心圧力が  $p_i$  よりもわずかに大きい解  $(M_{i+1}, R_{i+1})$  を選ぶ
3. 天体表面から  $(M_{i+1}, R_{i+1})$  を初期条件として圧力  $p_i$  となるまで  $(m, r)$  を解く
4. 更に外挿式を用いて天体中心までの圧力・密度を求める
5.  $i \rightarrow i+1$  として以上を繰り返す

である。天体の中心付近から天体中心への外挿に必要な式は、ちょうど状態方程式から質量-半径関係を得る際に用いた天体中心からの解析解の逆関数のような式になるはずである。以降ではこの天体中心からの解析解の逆関数に相当するものを構成する。

まず  $\rho_c$  への外挿を求める。 $h = h_i$  に対する  $\rho_c$  の展開式は

$$\rho_c = \rho_i + \left. \frac{d\rho}{dh} \right|_i (h_c - h_i) + \mathcal{O}((h_c - h_i)^2) \quad (2.76)$$

である。この展開係数を求めるために  $m, r$  の  $h = h_c$  周りの展開式を  $h = h_i$  周りの展開式に書き直す。 $m$  に関しては

$$\begin{aligned} m_i &\equiv m(h = h_i) \\ &= \frac{4\pi}{3} \left( \rho_i + \left. \frac{d\rho}{dh} \right|_i (h_c - h_i) + \mathcal{O}((h_c - h_i)^2) \right) r_i^3 \\ &\quad \times \left[ 1 - \frac{3}{5} \left( \left. \frac{d\rho}{dh} \right|_i + \left. \frac{d^2\rho}{dh^2} \right|_i (h_c - h_i) + \mathcal{O}((h_c - h_i)^2) \right) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{h_c - h_i}{\rho_i + \left. \frac{d\rho}{dh} \right|_i (h_c - h_i) + \mathcal{O}((h_c - h_i)^2)} + \mathcal{O}((h_c - h_i)^2) \right] \end{aligned} \quad (2.77)$$

となるため

$$\begin{aligned} m_i &= \frac{4\pi}{3} \left( \rho_i + \left. \frac{d\rho}{dh} \right|_i (h_c - h_i) \right) r_i^3 \left( 1 - \frac{3}{5} \left. \frac{d\rho}{dh} \right|_i \frac{h_c - h_i}{\rho_i} \right) + \mathcal{O}((h_c - h_i)^{7/2}) \\ &= \frac{4\pi}{3} \rho_i r_i^3 + \frac{8\pi}{15} \left. \frac{d\rho}{dh} \right|_i r_i^3 (h_c - h_i) + \mathcal{O}((h_c - h_i)^{7/2}) \\ &= \frac{4\pi}{3} \rho_i r_i^3 \left( 1 + \frac{5}{2} \left. \frac{d\rho}{dh} \right|_i \frac{h_c - h_i}{\rho_i} + \mathcal{O}((h_c - h_i)^2) \right) \end{aligned} \quad (2.78)$$

である。これより

$$\left. \frac{d\rho}{dh} \right|_i (h_c - h_i) = \frac{5}{2} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) + \mathcal{O}(r_i^4) \quad (2.79)$$

となるため

$$\rho_c = \rho_i + \underbrace{\frac{5}{2} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right)}_{=\mathcal{O}(r_i^2)} + \mathcal{O}(r_i^4) \quad (2.80)$$

と求まる。次に  $p_c$  の外挿を求める。 $p_c$  の  $p_i$  周りの展開は

$$\begin{aligned} p_c &= p_i + \left. \frac{dp}{dh} \right|_i (h_c - h_i) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2p}{dh^2} \right|_i (h_c - h_i)^2 + \mathcal{O}((h_c - h_i)^3) \\ &= p_i + (\rho_i + p_i)(h_c - h_i) + \frac{1}{2} \left( \left. \frac{d\rho}{dh} \right|_i + \rho_i + p_i \right) (h_c - h_i)^2 + \mathcal{O}((h_c - h_i)^3) \\ &= p_i + (\rho_i + p_i)(h_c - h_i) + \frac{5}{4} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) (h_c - h_i) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\rho_i + p_i)(h_c - h_i)^2 + \mathcal{O}(r_i^6) \end{aligned} \quad (2.81)$$



となる。一方で  $r$  の展開の係数を  $h = h_i$  における値で書き換えれば

$$\begin{aligned}
r_i^2 &= \frac{3(h_c - h_i)}{2\pi(\rho_c + 3p_c)} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \rho_c - 3p_c - \frac{3}{5} \frac{d\rho}{dh} \Big|_c \right) \frac{h_c - h_i}{\rho_c + 3p_c} + \mathcal{O}((h_c - h_i)^2) \right] \\
&= \frac{3}{2\pi} \frac{h_c - h_i}{\rho_i + 3p_i} \left[ 1 - \left( \frac{d\rho}{dh} \Big|_i + 3(\rho_i + p_i) \right) \frac{h_c - h_i}{\rho_i + 3p_i} + \mathcal{O}((h_c - h_i)^2) \right] \\
&\quad \times \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \rho_i - 3p_i - \frac{3}{5} \frac{d\rho}{dh} \Big|_i \right) \frac{h_c - h_i}{\rho_i + 3p_i} + \mathcal{O}((h_c - h_i)^2) \right] \\
&= \frac{3}{2\pi} \frac{h_c - h_i}{\rho_i + 3p_i} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{7}{5} \frac{d\rho}{dh} \Big|_i + 7\rho_i + 3p_i \right) \frac{h_c - h_i}{\rho_i + 3p_i} + \mathcal{O}((h_c - h_i)^2) \right] \\
&= \frac{3}{2\pi} \frac{h_c - h_i}{\rho_i + 3p_i} \left[ 1 - \frac{7}{4} \frac{1}{(\rho_i + 3p_i)} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) - \frac{1}{2} (7\rho_i + 3p_i) \frac{h_c - h_i}{\rho_i + 3p_i} \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{O}((h_c - h_i)^2) \right]
\end{aligned} \tag{2.82}$$

となる。この式を  $h_c - h_i$  に関する 2 次方程式と見て整理すると

$$\begin{aligned}
&\frac{4\pi}{3} (\rho_i + 3p_i)^2 r_i^2 \\
&= 2(h_c - h_i) \left[ \rho_i + 3p_i - \frac{7}{4} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) \right] - (7\rho_i + 3p_i)(h_c - h_i)^2 + \mathcal{O}(r_i^6) \\
&(7\rho_i + 3p_i)(h_c - h_i)^2 - 2(h_c - h_i) \left[ \rho_i + 3p_i - \frac{7}{4} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) \right] \\
&\quad + \frac{4\pi}{3} (\rho_i + 3p_i)^2 r_i^2 + \mathcal{O}(r_i^6) = 0
\end{aligned} \tag{2.83}$$

となる。この式の両辺に  $7\rho_i + 3p_i$  を掛けて平方完成すると

$$\begin{aligned}
&\left\{ (7\rho_i + 3p_i)(h_c - h_i) - \left[ \rho_i + 3p_i - \frac{7}{4} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) \right] \right\}^2 \\
&= \left[ \rho_i + 3p_i - \frac{7}{4} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) \right]^2 - \frac{4\pi}{3} (7\rho_i + 3p_i)(\rho_i + 3p_i)^2 r_i^2 + \mathcal{O}(r_i^6)
\end{aligned} \tag{2.84}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
&\left[ \rho_i + 3p_i - \frac{7}{4} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) \right]^{-2} \\
&= (\rho_i + 3p_i)^{-2} \left[ 1 - \frac{7}{4(\rho_i + 3p_i)} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) \right]^{-2} \\
&= (\rho_i + 3p_i)^{-2} \left[ 1 + \frac{7}{2(\rho_i + 3p_i)} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) + \mathcal{O}(r_i^4) \right]
\end{aligned} \tag{2.85}$$

であるため

$$\begin{aligned}
(\text{RHS}) &= \left[ \rho_i + 3p_i - \frac{7}{4} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) \right]^2 \\
&\quad \times \left\{ 1 - \left[ \rho_i + 3p_i - \frac{7}{4} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) \right]^{-2} \right. \\
&\quad \left. \times \frac{4\pi}{3} (7\rho_i + 3p_i)(\rho_i + 3p_i)^2 r_i^2 + \mathcal{O}(r_i^6) \right\} \\
&= \left[ \rho_i + 3p_i - \frac{7}{4} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) \right]^2 \\
&\quad \times \left\{ 1 - \frac{4\pi}{3} (7\rho_i + 3p_i) r_i^2 \left[ 1 + \frac{7}{2(\rho_i + 3p_i)} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) \right] + \mathcal{O}(r_i^6) \right\}
\end{aligned} \tag{2.86}$$

となる。よって左辺において 1 項目よりも 2 項目が大きいことに気をつければ、上式の平方根は

$$\begin{aligned}
 & \left[ \rho_i + 3p_i - \frac{7}{4} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) \right] - (7\rho_i + 3p_i)(h_c - h_i) \\
 &= \left[ \rho_i + 3p_i - \frac{7}{4} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) \right] \\
 & \quad \times \left\{ 1 - \frac{2\pi}{3} (7\rho_i + 3p_i) r_i^2 \left[ 1 + \frac{7}{2(\rho_i + 3p_i)} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) \right] \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{8} \left( \frac{4\pi}{3} (7\rho_i + 3p_i) r_i^2 \right)^2 + \mathcal{O}(r_i^6) \right\}
 \end{aligned} \tag{2.87}$$

であるため

$$\begin{aligned}
 h_c - h_i &= \frac{2\pi}{3} r_i^2 \left[ \rho_i + 3p_i - \frac{7}{4} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) \right] \\
 & \quad \times \left[ 1 + \frac{7}{2(\rho_i + 3p_i)} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) + \frac{\pi}{3} (7\rho_i + 3p_i) r_i^2 \right] + \mathcal{O}(r_i^6) \\
 &= \frac{2\pi}{3} r_i^2 \left[ \rho_i + 3p_i - \frac{7}{4} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) \right] + \frac{2\pi}{3} r_i^2 \frac{7}{2} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) \\
 & \quad + \frac{2\pi^2}{9} (\rho_i + 3p_i)(7\rho_i + 3p_i) r_i^4 + \mathcal{O}(r_i^6) \\
 &= \frac{\pi}{3} \left[ (\rho_i + 3p_i) \left( 1 + \frac{\pi}{12} (7\rho_i + 3p_i) r_i^2 \right) + \frac{7}{4} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) \right] r_i^2
 \end{aligned} \tag{2.88}$$

となる。従って  $p_c$  の展開は

$$\begin{aligned}
 p_c &= p_i + (\rho_i + p_i) \frac{2\pi}{3} \left[ (\rho_i + 3p_i) \left( 1 + \frac{\pi}{3} (7\rho_i + 3p_i) r_i^2 \right) + \frac{7}{4} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) \right] r_i^2 \\
 & \quad + \frac{5}{4} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) \frac{2\pi}{3} (\rho_i + 3p_i) r_i^2 + \frac{1}{2} (\rho_i + p_i) \frac{4\pi^2}{9} (\rho_i + 3p_i)^2 r_i^4 + \mathcal{O}(r_i^6) \\
 &= p_i + \frac{2\pi}{3} (\rho_i + p_i) (\rho_i + 3p_i) r_i^2 \left[ 1 + \frac{\pi}{3} (7\rho_i + 3p_i) r_i^2 + \frac{\pi}{3} (\rho_i + 3p_i) r_i^2 \right] \\
 & \quad + \frac{\pi}{3} \left( \frac{7}{2} (\rho_i + p_i) + \frac{5}{2} (\rho_i + 3p_i) \right) \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) r_i^2 + \mathcal{O}(r_i^6) \\
 &= p_i + \frac{2\pi}{3} (\rho_i + p_i) (\rho_i + 3p_i) r_i^2 \left[ 1 + \frac{2\pi}{3} (4\rho_i + 3p_i) r_i^2 \right] \\
 & \quad + \frac{\pi}{3} (6\rho_i + 11p_i) \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) r_i^2 + \mathcal{O}(r_i^6)
 \end{aligned} \tag{2.89}$$

となる。最後に  $h$  の展開を求めると

$$\begin{aligned}
 h_c &= h_i + \frac{dh}{dp} \Big|_i (p_c - p_i) + \frac{1}{2} \frac{d^2h}{dp^2} \Big|_i (p_c - p_i)^2 + \mathcal{O}((p_c - p_i)^3) \\
 &= h_i + \frac{p_c - p_i}{\rho_i + p_i} - \frac{1}{2} \left( \frac{p_c - p_i}{\rho_i + p_i} \right)^2 \frac{d}{dp} (\rho + p) \Big|_i + \mathcal{O}((p_c - p_i)^3) \\
 &= h_i + \frac{p_c - p_i}{\rho_i + p_i} - \frac{1}{2} \left( \frac{p_c - p_i}{\rho_i + p_i} \right)^2 \left( \frac{(\rho_c + p_c) - (\rho_i + p_i)}{p_c - p_i} + \mathcal{O}(p_c - p_i) \right) \\
 & \quad + \mathcal{O}((p_c - p_i)^3) \\
 &= h_i + \frac{p_c - p_i}{\rho_i + p_i} - \frac{1}{2} \left( \frac{(p_c - p_i)(\rho_c + p_c)}{(\rho_i + p_i)^2} - \frac{p_c - p_i}{\rho_i + p_i} \right) + \mathcal{O}((p_c - p_i)^3) \\
 &= h_i + \frac{p_c - p_i}{2(\rho_i + p_i)} \left( 3 - \frac{\rho_c + p_c}{\rho_i + p_i} \right) + \mathcal{O}((p_c - p_i)^3)
 \end{aligned} \tag{2.90}$$

となる。外挿の式をまとめると

$$\rho_c = \rho_i + \frac{5}{2} \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) + \mathcal{O}(r_i^4) \quad (2.91)$$

$$p_c = p_i + \frac{2\pi}{3} (\rho_i + p_i) (\rho_i + 3p_i) r_i^2 \left[ 1 + \frac{2\pi}{3} (4\rho_i + 3p_i) r_i^2 \right] + \frac{\pi}{3} (6\rho_i + 11p_i) \left( \frac{3m_i}{4\pi r_i^3} - \rho_i \right) r_i^2 + \mathcal{O}(r_i^6) \quad (2.92)$$

$$h_c = h_i + \frac{p_c - p_i}{2(\rho_i + p_i)} \left( 3 - \frac{\rho_c + p_c}{\rho_i + p_i} \right) + \mathcal{O}((p_c - p_i)^3) \quad (2.93)$$

となる。この式を用いれば逆 TOV 写像を構築することができる。これまでの結果より (一般相対性理論では) 状態方程式と質量-半径関係には 1 対 1 対応があることがわかる。

## 2.5 $f(R)$ 重力理論での応用例

これまでで一般相対性理論における静的球対称解の解析を行ってきた。一方で相対論的天体のような強重力領域では一般相対性理論に対して強重力効果の補正・修正がなされる可能性がある。その例として考えられているのが  $f(R)$  重力理論である。 $f(R)$  重力理論の作用は

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2\kappa^2} f(R) + \mathcal{L}_{\text{matter}} \right] \quad (2.94)$$

で与えられる。 $f(R)$  は  $R$  の任意関数であり曲率の高次項による強重力の効果などが取り入れられている。この運動方程式は

$$f_R \equiv \frac{df(R)}{dR} \quad (2.95)$$

とすると

$$\begin{aligned} \kappa^2 T_{\mu\nu} &= f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f + (g_{\mu\nu} \nabla^2 - \nabla_\mu \nabla_\nu) f_R \\ &= f_R G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (f - R f_R) + (g_{\mu\nu} \nabla^2 - \nabla_\mu \nabla_\nu) f_R \\ &= G_{\mu\nu} + (f_R - 1) \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (f - R f_R) + (g_{\mu\nu} \nabla^2 - \nabla_\mu \nabla_\nu) f_R \\ &= G_{\mu\nu} + (f_R - 1) R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (R - f) g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} \nabla^2 - \nabla_\mu \nabla_\nu) f_R \\ &= G_{\mu\nu} + (f_R - 1) R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (R - f) g_{\mu\nu} \\ &\quad + (g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) f_R + (\Gamma_{\mu\nu}^\gamma - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma) \partial_\gamma f_R \\ &= G_{\mu\nu} + (f_R - 1) R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (R - f) g_{\mu\nu} \\ &\quad + (g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta) (\partial_\alpha \partial_\beta f_R - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma f_R) \\ &\equiv \Sigma_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.96)$$

である。この式のトレースをとることで  $R$  に関する運動方程式

$$\Sigma \equiv 3\nabla^2 f_R + f_R R - 2f = \kappa^2 T \quad (2.97)$$

を得る。 $f(R)$  重力理論では  $R$  を新たな自由度として取り扱い、この Trace の式によって解を構成する。

また運動方程式の発散は

$$\begin{aligned}
 \nabla_\alpha \Sigma^\alpha_\mu &= g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \Sigma_{\beta\mu} \\
 &= g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \left[ f_R R_{\beta\mu} - \frac{1}{2} g_{\beta\mu} f + (g_{\beta\mu} \nabla^2 - \nabla_\beta \nabla_\mu) f_R \right] \\
 &= g^{\alpha\beta} \left[ R_{\beta\mu} \nabla_\alpha f_R + f_R \nabla_\alpha \left( R_{\beta\mu} - \frac{1}{2} g_{\beta\mu} R \right) \right. \\
 &\quad \left. + (g_{\beta\mu} \nabla_\alpha \nabla^2 - \nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\mu) f_R \right] \\
 &= R^\alpha_\mu \nabla_\alpha f_R + [\nabla_\mu, \nabla^2] f_R \\
 &= R^\alpha_\mu \nabla_\alpha f_R + g^{\alpha\beta} ([\nabla_\mu, \nabla_\alpha] \nabla_\beta + \nabla_\alpha [\nabla_\mu, \nabla_\beta]) f_R \\
 &= R^\alpha_\mu \nabla_\alpha f_R + g^{\alpha\beta} \left[ R_{\beta\gamma\mu\alpha} \nabla^\gamma + \nabla_\alpha (\partial_{[\mu} \partial_{\beta]} - \Gamma_{[\mu\beta]}^\gamma \nabla_\gamma) \right] f_R \\
 &= R^\alpha_\mu \nabla_\alpha f_R - R_{\gamma\mu} \nabla^\gamma f_R \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.98}$$

であるため一般相対性理論と同じようにエネルギー・運動量保存則

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0 \tag{2.99}$$

が満たされる。

$G^\mu_\nu$  を抜き出した形の運動方程式を書き下すと

$$\Sigma^t_t = f_R \left[ e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \right] - \frac{1}{2} (f - R f_R) + e^{-\lambda} \left[ f_R'' + \left( \frac{2}{r} - \frac{\lambda'}{2} \right) f_R' \right] \tag{2.100}$$

$$\Sigma^r_r = f_R \left[ e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \right] - \frac{1}{2} (f - R f_R) + e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{2} + \frac{2}{r} \right) f_R' \tag{2.101}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma^\theta_\theta &= \Sigma^\phi_\phi \\
 &= f_R \frac{e^{-\lambda}}{2} \left( \nu'' + \frac{(\nu')^2}{2} - \frac{\nu' \lambda'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) - \frac{1}{2} (f - R f_R) \\
 &\quad + e^{-\lambda} \left[ f_R'' + \left( \frac{\nu' - \lambda'}{2} + \frac{1}{r} \right) f_R' \right]
 \end{aligned} \tag{2.102}$$

となる。 $R^\mu_\nu$  を抜き出した運動方程式の場合は

$$\begin{aligned}
 -\kappa^2 \rho &= \Sigma^t_t \\
 &= e^{-\lambda} \left[ f_R'' + \left( \frac{2}{r} - \frac{\lambda'}{2} \right) f_R' + \left( -\frac{\nu''}{2} - \frac{(\nu')^2}{4} + \frac{\nu' \lambda'}{4} - \frac{\nu'}{r} \right) f_R \right] - \frac{1}{2} f
 \end{aligned} \tag{2.103}$$

$$\begin{aligned}
 \kappa^2 p &= \Sigma^r_r \\
 &= e^{-\lambda} \left[ \left( \frac{\nu'}{2} + \frac{2}{r} \right) f_R' + \left( -\frac{\nu''}{2} - \frac{(\nu')^2}{4} + \frac{\nu' \lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r} \right) f_R \right] - \frac{1}{2} f
 \end{aligned} \tag{2.104}$$

$$\begin{aligned}
 \kappa^2 p &= \Sigma^\theta_\theta = \Sigma^\phi_\phi \\
 &= e^{-\lambda} \left[ f_R'' + \left( \frac{\nu' - \lambda'}{2} + \frac{1}{r} \right) f_R' + \left( -\frac{1}{2r} (\nu' - \lambda') - \frac{1}{r^2} \right) f_R \right] \\
 &\quad + \frac{1}{r^2} f_R - \frac{1}{2} f
 \end{aligned} \tag{2.105}$$

となる。トレースの式は

$$\begin{aligned}\Sigma &= e^{-\lambda} \left[ 3f_R'' + \frac{3}{2} \left( \nu' - \lambda' + \frac{4}{r} \right) f_R' \right] + f_R R - 2f = \kappa^2 (-\rho + 3p) \\ f_R'' &= - \left( \frac{\nu' - \lambda'}{2} + \frac{2}{r} \right) f_R' + \frac{1}{3} e^\lambda [\kappa^2 (-\rho + 3p) - f_R R + 2f]\end{aligned}\quad (2.106)$$

である。これは  $R = R^\mu{}_\mu$  を新たな自由度として残すため独立な式となる。ここで

$$f_R' = R' f_{2R} \quad (2.107)$$

$$f_R'' = (R')^2 f_{3R} + R'' f_{2R} \quad (2.108)$$

なので

$$R'' + \frac{f_{3R}}{f_{2R}} (R')^2 + \frac{1}{2} \left( \nu' - \lambda' + \frac{4}{r} \right) R' + \frac{e^\lambda}{3f_{2R}} [\kappa^2 (\rho - 3p) + f_R R - 2f] = 0 \quad (2.109)$$

となる。 $rr$  成分に関する式から

$$\nu' = \frac{2e^\lambda}{2f_R r + f_R' r^2} \left[ \kappa^2 p r^2 + 1 - e^{-\lambda} + \frac{1}{2} (f - R f_R) - \frac{2f_R'}{r} e^{-\lambda} \right] \quad (2.110)$$

を得る。また  $tt$  成分に関する式から  $f_R''$  と  $\nu'$  を消去すると

$$\begin{aligned}& [r(e^{-\lambda} - 1)]' \\ &= \frac{1}{f_R} \left\{ \kappa^2 \frac{2\rho + 3p}{3} r^2 + \frac{1}{6} (f + R f_R) r^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{f_R' r^2}{2f_R r + f_R' r^2} \left[ \kappa^2 p r^2 + 1 - e^{-\lambda} + \frac{1}{2} (f - R f_R) - \frac{2f_R'}{r} e^{-\lambda} \right] \right\}\end{aligned}\quad (2.111)$$

を得る。

これより  $f(R)$  重力理論での運動方程式は  $\nu, \lambda$  によるものと  $R$  によるものがある。つまり一般相対性理論の場合と比べて  $R$  について解く必要があり、それに対応した境界条件が必要となる。一般相対性理論では天体表面での接続条件を適切に選ぶことで無限遠での境界条件を満たすことができた。 $f(R)$  重力理論では状況は異なり無限遠での境界条件を  $R$  に関する微分方程式の境界条件とすることができ [42, 43, 44]。つまり天体中心での  $R$  の値を無限遠で  $R$  が 0 となるように選ぶ。

実際に  $f(R)$  重力理論では相対論的天体の最大質量が改善される例がある [42, 43, 44]。これらの例では

$$f(R) = R + \alpha R^2 \quad (2.112)$$

$$f(R) = R + \alpha R^2 (1 + \gamma R) \quad (2.113)$$

$$f(R) = R + \epsilon R \ln R \quad (2.114)$$

などの関数系を想定して質量-半径関係を計算している。



## 第 3 章

# 有質量重力理論における相対論的天体の解

本研究では修正重力理論として近年提唱された dRGT 有質量重力理論 [45, 46] を用いる。この dRGT 有質量重力理論は遠距離領域の重力を修正し、宇宙項を重力子の質量によって自然に説明することを目的としている。一方で短距離領域には Vainshtein 機構 [47] によって新たな自由度が遮蔽され、一般相対性理論と同等の振る舞いをすると考えられている。この議論は質点粒子に対する限定的な議論がほとんどであり、本研究が対象とする相対論的天体に対する効果は非自明である。この節では dRGT 有質量重力理論において実際に相対論的天体の解を構成し、その解が実際に Vainshtein 機構を持つか調べる。

### 3.1 dRGT 有質量重力理論

有質量重力理論は修正重力理論の一種である。一般相対性理論では重力子が無質量粒子だと仮定して理論を構築している。有質量重力理論はその仮定を用いずに、有質量重力子に対する理論まで一般相対性理論を拡張したものになっている。現在までに重力子の質量が分散関係、ポテンシャル関数、および自由度 (第 5 の力) によって検証されている [48]。表 3.1 にこれらの違いをまとめる。最も強い制限では

$$m_g \leq 10^{-33} \text{eV} \sim \sqrt{\Lambda} \quad (3.1)$$

程度となっている [48]。有質量重力理論はこのような微小かつ非ゼロの質量を持った重力子の理論を記述する。

| 質量  | 分散関係                   | 重力ポテンシャル | 自由度   |
|-----|------------------------|----------|-------|
| 無質量 | $\omega^2 = k^2$       | クーロン型    | 2 自由度 |
| 有質量 | $\omega^2 = k^2 + m^2$ | 湯川型      | 5 自由度 |

表 3.1 無質量重力子と有質量重力子の性質の違い

有質量重力理論の構築は歴史的には平坦な時空上の有質量スピン 2 の場を考えることから始まった。平坦な時空上の有質量スピン 2 の場の理論は Fierz-Pauli 理論 [49] と呼ばれ、この理論を記述する Fierz-Pauli 作用は Einstein-Hilbert 作用に対して

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

の線形化を行ったものに質量項

$$-\frac{1}{2}m^2(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - (h^\mu_\mu)^2) \quad (3.3)$$

を加えた形になっている。上記以外の  $h_{\mu\nu}$  の質量項では不安定なスカラー自由度が現れるため不適切である [50]。Fierz-Pauli 理論の質量 0 極限  $m_g \rightarrow 0$  における物質との相互作用は、線形化された一般相対性理論の物質との相互作用と異なることが知られている [51, 52]。この不連続性は vDVZ 不連続性と呼ばれ、例えば質点に対する解の違いとして理解することができる [53]。この不連続性は有質量重力子のスカラー自由度がエネルギー・運動量テンソルのトレースと結合し、重力子の質量 0 極限でこの結合が消えないことに由来する [53, 50]。有質量重力理論は重力子が小さくなるほど低エネルギー領域で非線形性が重要になる構造をしているため、重力子の質量 0 極限では線形化が破綻する [47]。つまり vDVZ 不連続性は重力の非線形性を考慮することで解消することができる。

有質量重力理論でスカラー自由度が非線形性によって抑制される機構を Vainshtein 機構 [47] と呼ぶ。修正重力理論ではしばしば一般相対性理論に加えて新たな自由度が現れることがある。一般相対性理論で説明できる (短距離領域の) 観測結果を再現するために、修正重力理論では新たな自由度を抑制する機構が複数提案されている。このような短距離領域でスカラー自由度を抑制する機構はスクリーニング機構と呼ばれる。スクリーニング機構には Vainshtein 機構に加え、カメレオン機構 [54] や Damour-Polyakov 機構 [55] などが知られている。カメレオン機構は物質が分布している領域でスカラー自由度の質量を増大させることで、スカラー自由度の重力ポテンシャルへの影響を抑制する [56]。一方で Vainshtein 機構はスカラー自由度の非線形運動項によって短距離領域でスカラー自由度の結合を抑制する [50]。Vainshtein 機構において結合を抑制する特徴的な長さスケールを Vainshtein 半径と呼ぶ。質点分布において Vainshtein 半径は非線形運動項の大きさと質点の質量に依存する。

vDVZ 不連続性を回避するために非線形有質量重力理論を考える必要がある。単純に Einstein-Hilbert 作用に Fierz-Pauli 作用の質量項を加えた作用では、非線形性に由来する新たな不安定な自由度が現れることが知られている [57]。この自由度は Boulware-Deser (BD) ゴーストと呼ばれる。BD ゴーストはスカラー自由度の高階微分に由来するもので、重力子のポテンシャル関数を適切に選ぶことで消去することができる [58]。このポテンシャル関数は有限の項で書き下すことが可能で、全体の作用は

$$S_{\text{dRGT}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-\det(g)} \left[ R - 2m_g^2 \sum_{n=0}^4 \beta_n e_n(\sqrt{g^{-1}}f) \right] + S_{\text{matter}}, \quad (3.4)$$

$$e_k(X) = \frac{1}{k!} X^{I_1}_{[I_1} \cdots X^{I_k}_{I_k]}, \quad (3.5)$$

$$\left( \sqrt{g^{-1}}f \right)^\mu{}_\alpha \left( \sqrt{g^{-1}}f \right)^\alpha{}_\nu = g^{\mu\alpha} f_{\alpha\nu} \quad (3.6)$$

となる [45, 46]。この理論は dRGT 有質量重力理論と呼ばれる。ランク 2 のテンソル  $f_{\mu\nu}$  は非力学的で、モデルに応じて与える必要がある。理論のパラメータは重力子の質量  $m$  とポテンシャル関数の係数  $\beta_n$  である。重力子の質量の制限は式 (3.1) であるため  $n = 0$  の項が宇宙項  $\Lambda$  に相当する働きをする可能性がある。係数  $\beta_n$  にも理論の UV 完全性の条件から制限がつく [59]。この理論に不安定な自由度が含まれていないことは Hamilton 解析によって示されている [60, 61]。



dRGT 有質量重力理論の運動方程式はポテンシャル関数の変分が必要になる。ポテンシャル関数の変分は  $n$  次の行列  $X$  のトレースに対する変分公式

$$\begin{aligned}\delta \operatorname{Tr}(X^n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Tr}(X^k(\delta X)X^{n-k-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Tr}(X^{n-k-1}X^k(\delta X)) \\ &= n \operatorname{Tr}(X^{n-1}\delta X)\end{aligned}\quad (3.7)$$

を利用する。 $X = \sqrt{g^{-1}f}$  として  $\delta$  を  $g$  に対する変分とすれば

$$\begin{aligned}\delta \operatorname{Tr} \left[ \left( \sqrt{g^{-1}f} \right)^n \right] &= n \operatorname{Tr} \left[ \left( \sqrt{g^{-1}f} \right)^{n-1} \delta \sqrt{g^{-1}f} \right] \\ &= \frac{n}{2} \operatorname{Tr} \left[ \left( \sqrt{g^{-1}f} \right)^{n-2} \sqrt{g^{-1}f} \delta \sqrt{g^{-1}f} + \sqrt{g^{-1}f} \left( \sqrt{g^{-1}f} \right)^{n-2} \delta \sqrt{g^{-1}f} \right] \\ &= \frac{n}{2} \operatorname{Tr} \left[ \left( \sqrt{g^{-1}f} \right)^{n-2} \left( \sqrt{g^{-1}f} \delta \sqrt{g^{-1}f} + \delta \sqrt{g^{-1}f} \cdot \sqrt{g^{-1}f} \right) \right] \\ &= \frac{n}{2} \operatorname{Tr} \left[ \left( \sqrt{g^{-1}f} \right)^{n-2} \delta \left( \sqrt{g^{-1}f} \sqrt{g^{-1}f} \right) \right] = \frac{n}{2} \operatorname{Tr} \left[ f \left( \sqrt{g^{-1}f} \right)^{n-2} \delta g^{-1} \right] \\ &= \frac{n}{2} \operatorname{Tr} \left[ g \left( \sqrt{g^{-1}f} \right)^n \delta g^{-1} \right]\end{aligned}\quad (3.8)$$

となる。この公式を用いることで  $e_n \left( \sqrt{g^{-1}f} \right)$  の変分が求まる。以降では簡便のため  $\operatorname{Tr}[\dots] \equiv [\dots]$  と表記する。 $e_n \left( \sqrt{g^{-1}f} \right)$  の変分は

$$\delta \left( \sqrt{-\det(g)} \cdot e_n \left( \sqrt{g^{-1}f} \right) \right) = \frac{1}{2} (-1)^{n+1} \sqrt{-\det(g)} \left[ g Y_{(n)} \left( \sqrt{g^{-1}f} \right) \delta g^{-1} \right] \quad (3.9)$$

となる。ただし

$$Y_{(1)} := \sqrt{g^{-1}f} - \left[ \sqrt{g^{-1}f} \right] \mathbf{1}, \quad (3.10)$$

$$Y_{(2)} := g^{-1}f - [g^{-1}f] \sqrt{g^{-1}f} + \frac{1}{2} \left( \operatorname{Tr} \left[ \sqrt{g^{-1}f} \right]^2 - \operatorname{Tr} [g^{-1}f] \right) \mathbf{1}, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}Y_{(3)} &:= \left( \sqrt{g^{-1}f} \right)^3 - \left[ \sqrt{g^{-1}f} \right] \left( \sqrt{g^{-1}f} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \left[ \sqrt{g^{-1}f} \right]^2 - [g^{-1}f] \right) \sqrt{g^{-1}f} \\ &\quad - \frac{1}{6} \left( \left[ \sqrt{g^{-1}f} \right]^3 - 3 \left[ \sqrt{g^{-1}f} \right] [g^{-1}f] + 2 \left[ \left( \sqrt{g^{-1}f} \right)^3 \right] \right) \mathbf{1}\end{aligned}\quad (3.12)$$

$$Y_{(4)} := 0 \quad (3.13)$$

である。 $n = 4$  の場合に関しては

$$e_4 \left( \sqrt{g^{-1}f} \right) = \det \left( \sqrt{g^{-1}f} \right) \quad (3.14)$$

であるのでポテンシャル項は

$$\begin{aligned}\sqrt{-\det(g)} \cdot e_4 \left( \sqrt{g^{-1}f} \right) &= \sqrt{-\det(g)} \sqrt{\det \left( \sqrt{g^{-1}f} \right)^2} \\ &= \sqrt{-\det(g) \det(g^{-1}f)} = \sqrt{-\det(f)}\end{aligned}\quad (3.15)$$

となるので  $g$  依存性がないことに気をつける。この結果から

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S_{\text{dRGT}} \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-\det(g)} \\ &\quad \times \left( G_{\mu\nu} + m_g^2 \sum_{n=0}^3 (-1)^n g_{\mu\alpha} Y_{(n)\nu}^{\alpha} \left( \sqrt{g^{-1}f} \right) - \kappa^2 T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.16)$$

となるので、運動方程式は

$$G_{\mu\nu} + m_g^2 I_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (3.17)$$

$$I_{\mu\nu} := \sum_{n=0}^3 (-1)^n g_{\mu\alpha} Y_n^{\alpha} \left( \sqrt{g^{-1}f} \right) \quad (3.18)$$

である。Bianchi 恒等式とエネルギー・運動量保存則

$$\nabla_{\mu} G^{\mu}{}_{\nu} = 0, \quad \nabla_{\mu} T^{\mu}{}_{\nu} = 0 \quad (3.19)$$

から

$$\nabla_{\mu} I^{\mu}{}_{\nu} = 0 \quad (3.20)$$

であることに注意する。

有質量重力理論のパラメータ  $\beta_n$  の間には代数関係が存在する。例えば真空  $T_{\mu\nu} = 0$  で平坦な時空  $G_{\mu\nu} = 0$  では  $I_{\mu\nu} = 0$  であるので

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= f_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \\ \sqrt{g^{-1}f} &= 1, \quad \left[ \left( \sqrt{g^{-1}f} \right)^n \right] = [1] = 4, \\ Y_0 \left( \sqrt{g^{-1}f} \right) &= 1, \quad Y_1 \left( \sqrt{g^{-1}f} \right) = -3 \cdot 1 \\ Y_2 \left( \sqrt{g^{-1}f} \right) &= -3 \cdot 1 + \frac{4^2 - 4}{2} 1 = 3 \cdot 1, \\ Y_3 \left( \sqrt{g^{-1}f} \right) &= -3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 - \frac{4^3 - 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4}{6} 1 = -1. \end{aligned} \quad (3.21)$$

であるから

$$I_{\mu\nu} \left( \sqrt{g^{-1}f} \right) = (\beta_0 + 3\beta_1 + 3\beta_2 + \beta_3) \eta_{\mu\nu} = 0 \quad (3.22)$$

より

$$\beta_0 + 3\beta_1 + 3\beta_2 + \beta_3 = 0 \quad (3.23)$$

となる。このように  $\beta_{n=0,1,2,3}$  は各々独立ではない。ポテンシャル関数のパラメータには2つの代数関係

$$\beta_2 = 1 - \beta_0 - 2\beta_1, \quad \beta_3 = -3 + 2\beta_0 + 3\beta_1 \quad (3.24)$$

がある [46]。また  $\beta_4$  は運動方程式に現れない。そのためこの理論は重力子の質量  $m$  とポテンシャル関数のパラメータ2つで特徴づく。

dRGT 有質量重力理論での静的球対称解としてはブラックホール解として Schwarzschild-de Sitter 型の解や定数密度の天体の解が知られている [62]。本研究では状態方程式を与えて静水圧平衡を実際に解く。相対論的天体の構築を行うため、静的球対称性を持つ  $g_{\mu\nu}$ ,  $f_{\mu\nu}$  テンソルとして一般的な

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} &= -e^{2\nu(r)} dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \\ f_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} &= -dt^2 + d\chi(r)^2 + \chi(r)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \end{aligned} \quad (3.25)$$

の場合を考える。ただし  $f_{\mu\nu}$  テンソルは簡便のため  $\chi$  を動径座標とした Minkowski 計量に設定してある。また  $g_{\mu\nu}$  テンソルは修正項  $I^\mu{}_\nu$  が単純になるよう

$$\nu \rightarrow 2\nu, \quad \lambda \rightarrow 2\lambda \quad (3.26)$$

の変更を行なっている。Einstein テンソルなどは一般相対性理論の結果に対してこの置き換えを行えば得られる。ここで注意すべきなのは  $g_{\mu\nu}$  テンソルと  $f_{\mu\nu}$  テンソルで動径座標が異なることである。動径座標の違いは Stueckelberg 場 [63] と似た働きをする。Stueckelberg 場はゲージ場を有質量化したときに失われるゲージ対称性を、(見かけ上)回復させるために導入される場である。有質量重力理論では一般相対性理論が持つ一般共変性が失われるため、問題に適した座標変換を適宜施すことができない。上記の場合は  $\chi = \chi(r)$  という適切な Stueckelberg 場のゲージ固定がなされていると見ることができる。そのため一般共変性が失われているものの、 $g_{\mu\nu}$  テンソルは一般相対性理論の場合と同様の解の仮定を行うことができる。 $\chi = \chi(r)$  の詳細は運動方程式の解として得られる。したがって相対論的天体の解を構築する場合は同時に  $\chi(r)$  についても解く必要がある。

運動方程式を求める。Einstein テンソルとエネルギー・運動量テンソルは一般相対性理論の場合と同様である。有質量重力理論による修正部分  $I_{\mu\nu}$  を求める。式 (3.25) より

$$\sqrt{g^{-1}f} = \text{diag}\left(e^{-\nu}, \chi'e^{-\lambda}, \frac{\chi}{r}, \frac{\chi}{r}\right) \quad (3.27)$$

であるので

$$Y_1 = \text{diag}\left(-\frac{2\chi}{r} - \chi'e^{-\lambda}, -\frac{2\chi}{r} - e^{-\nu}, -\frac{\chi}{r} - \chi'e^{-\lambda} - e^{-\nu}, -\frac{\chi}{r} - \chi'e^{-\lambda} - e^{-\nu}\right) \quad (3.28)$$

$$Y_2 = \text{diag}\left(\frac{\chi^2}{r^2} + \frac{2\chi}{r}\chi'e^{-\lambda}, \frac{\chi^2}{r^2} + \frac{2\chi}{r}e^{-\nu}, \frac{\chi}{r}e^{-\nu} + \chi'e^{-\nu-\lambda} + \frac{\chi}{r}\chi'e^{-\lambda}, \frac{\chi}{r}e^{-\nu} + \chi'e^{-\nu-\lambda} + \frac{\chi}{r}\chi'e^{-\lambda}\right) \quad (3.29)$$

$$Y_3 = \text{diag}\left(-\frac{\chi^2}{r^2}\chi'e^{-\lambda}, -\frac{\chi^2}{r^2}e^{-\nu}, -\frac{\chi}{r}\chi'e^{-\nu-\lambda}, -\frac{\chi}{r}\chi'e^{-\nu-\lambda}\right) \quad (3.30)$$

となる。したがって有質量重力理論による修正部分  $I_{\mu\nu}$  は

$$I^t_t = \beta_0 + \beta_1\left(\frac{2\chi}{r} + \chi'e^{-\lambda}\right) + \beta_2\left(\frac{\chi^2}{r^2} + \frac{2\chi\chi'}{r}e^{-\lambda}\right) + \beta_3\frac{\chi^2\chi'}{r^2}e^{-\lambda} \quad (3.31)$$

$$I^r_r = \beta_0 + \beta_1\left(\frac{2\chi}{r} + e^{-\nu}\right) + \beta_2\left(\frac{\chi^2}{r^2} + \frac{2\chi}{r}e^{-\nu}\right) + \beta_3\frac{\chi^2}{r^2}e^{-\nu} \quad (3.32)$$

$$I^\theta_\theta = \beta_0 + \beta_1\left(\frac{\chi}{r} + \chi'e^{-\lambda} + e^{-\nu}\right) + \beta_2\left(\frac{\chi\chi'}{r}e^{-\lambda} + \frac{\chi}{r}e^{-\nu} + \chi'e^{-\lambda-\nu}\right) + \beta_3\frac{\chi\chi'}{r}e^{-\lambda-\nu} \quad (3.33)$$

$$I^\phi_\phi = I^\theta_\theta \quad (3.34)$$

となる。これで運動方程式が導出できた。 $\chi = \chi(r)$  を決定する式はこの運動方程式に含まれており、 $\nabla_\mu I^\mu{}_\nu = 0$  によって得られる。具体的には

$$\begin{aligned} 0 = & (\beta_1 r^2 + 2\beta_2 r\chi + \beta_3 \chi^2)(e^\nu)' \\ & + [2\beta_2(e^\nu - e^{\lambda+\nu}) + 2\beta_3(1 - e^\lambda)]\chi \\ & + 2\beta_1 r(e^\nu - e^{\lambda+\nu}) + 2\beta_2 r(1 - e^\lambda) \end{aligned} \quad (3.35)$$

となる。この方程式は  $\chi$  に関する代数方程式となっている。dRGT 有質量重力理論で相対論的天体の解を得るには、この代数方程式を満たすように微分方程式を解く必要がある。

### 3.2 最小模型における質量-半径関係

dRGT 有質量重力理論が最も単純になるのは

$$\beta_0 = 3, \quad \beta_1 = -1, \quad \beta_2 = \beta_3 = 0 \quad (3.36)$$

の場合である。このように  $n = 2, 3$  の高次のポテンシャル項が存在しない模型を最小模型と呼ぶ。運動方程式は

$$-\kappa^2 \rho = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} e^{-\lambda} + \frac{1}{r} (e^{-2\lambda})' + m_g^2 \left( 3 - \frac{2\chi}{r} + \chi' e^{-\lambda} \right) \quad (3.37)$$

$$\kappa^2 p = -\frac{1}{r^2} + \frac{1+2r\nu'}{r^2} e^{-2\lambda} + m_g^2 \left( 3 - \frac{2\chi}{r} - e^{-\nu} \right) \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \kappa^2 p = & \left( \nu'' + \nu'^2 + \frac{\nu'}{r} \right) e^{-2\lambda} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \nu' \right) (e^{-2\lambda})' \\ & + m_g^2 \left( 3 - \frac{\chi}{r} - \chi' e^{-\lambda} - e^{-\nu} \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

となる。ただしエネルギー・運動量保存則と質量パラメータ  $m$  の定義は

$$\nu' = -\frac{p'}{p+\rho} \quad (3.40)$$

$$e^{-\lambda} = \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} = \left( 1 + \frac{r}{2} \nu' \right)^{-1} = \left( 1 - \frac{r}{2} \frac{p'}{p+\rho} \right)^{-1} \quad (3.41)$$

である。この場合での  $\nabla_\mu I^\mu_\nu = 0$  は

$$\left( \frac{2}{r} + \nu' \right) e^{-\lambda} - \frac{2}{r} = 0 \quad (3.42)$$

となる。 $\nu'$  を消去するように運動方程式を組み合わせると

$$\frac{2}{r} \left[ \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1/2} - 1 \right] = \nu' = \frac{m + 4\pi p r^3 - \frac{1}{2} m_g^2 \left( 3 - \frac{2\chi}{r} + e^{-\nu} \right) r^3}{r(r-2m)} \quad (3.43)$$

となる。この式は  $\chi$  に関する 1 次方程式であって

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{r}{2} (3 - e^{-\nu}) \\ & + \frac{2}{m_g^2 r^2} \left[ \left( \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} - 1 + \frac{2m}{r} \right) r - m - 4\pi p r^3 \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

の解を持つ。この解を運動方程式に代入することで  $\chi$  を消去することができて、一般相対性理論における TOV 方程式と同様に解くことができる。また  $\nabla_\mu I^\mu_\nu = 0$  から  $\nu', \lambda$  を消去すると

$$\begin{aligned} & \left( \frac{2}{r} - \frac{p'}{p+\rho} \right) \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} - \frac{2}{r} = 0 \\ & \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} = \left( 1 - \frac{r}{2} \frac{p'}{p+\rho} \right)^{-1} \\ & m = \frac{r}{2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{r}{2} \frac{p'}{p+\rho} \right)^{-2} \right] \end{aligned} \quad (3.45)$$

よ  $m$  の別の表式が得られる。つまり運動方程式から  $m$  を消去することが可能で、 $p$  の独立な微分方程式を立式できる。これらを行うと

$$\begin{aligned} \kappa^2(3p + 2\rho) = & \frac{1}{r^2} + 2\left(\nu'' + \nu'^2 + \frac{2\nu'}{r} - \frac{1}{2r^2}\right)e^{-2\lambda} \\ & + \left(\nu' - \frac{1}{r}\right)(e^{-2\lambda})' + 3m_g^2(1 - e^{-\nu}) \end{aligned} \quad (3.46)$$

を得る。 $\nu$  の値は境界条件に依存する不定性を持つ。式全体に対して微分を行った式を用いると  $\nu$  自身を消去されて

$$\begin{aligned} & \kappa^2[3p' + 2\rho' - \nu'(3p + 2\rho)] \\ = & -\frac{2}{r^3} + \left(\nu''' + 2\nu'\nu'' + \frac{2\nu''}{r} - \frac{2\nu''}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right)e^{-2\lambda} \\ & + \left(\nu'' + \nu'^2 + \frac{2\nu'}{r} - \frac{1}{2r^2}\right)(e^{-2\lambda})' \\ & + \left(\nu'' + \frac{1}{r^2}\right)(e^{-2\lambda})' + \left(\nu' - \frac{1}{2}\right)(e^{-2\lambda})'' \\ & - 3m_g^2\left[\frac{1}{r^2} + 2\left(\nu'' + \nu'^2 + \frac{2\nu'}{r} - \frac{1}{2r^2}\right)e^{-2\lambda} + \left(\nu' - \frac{1}{r}\right)(e^{-2\lambda})'\right] \end{aligned} \quad (3.47)$$

を得る。この微分方程式は  $\nu, \lambda, \rho$  を消去すれば  $p$  の 3 階微分方程式として扱うことができる。よってこの微分方程式を解いて  $p$  を求めて、式 (3.45) を用いれば  $m$  が求まる。

数値解を求める場合は式 (3.47) が 3 階微分方程式であるため、 $p''(r=0)$  をパラメータとして狙い撃ち法をする必要がある。dRGT 有質量重力理論では天体の解が無限遠で Minkowski 型になるかどうかは非自明である。本研究では天体の質量を比較する目的で、dRGT 有質量重力理論における相対論的天体の中心密度と半径を、一般相対性理論における相対論的天体の解と同一になるように選んだ。状態方程式として SL<sub>y</sub> モデル式 (2.74) を選び、重力子質量を制限の上限値に近い

$$m_g = \sqrt{\Lambda} \quad (3.48)$$

を用いて数値計算を行った。結果を図3.1に示す。dRGT 有質量重力理論の最小模型は一般相対性理論よりも質量が小さい相対論的天体の解を持つことがわかる。定性的には最小模型では Vainshtein 機構が働かないため、第 5 の力によって重力が強くなるからだ予想できる。実際に最小模型では高次のポテンシャル項がないために Vainshtein 機構が働かない可能性が指摘されている [64]。この結果は現在までに見つかっている  $2M_\odot$  程度の質量を持つ相対論的天体を説明することに、最小模型が一般相対性理論よりも適していないことを示している。

この解における Vainshtein 機構の有無について考察する。dRGT 有質量重力理論の一般相対性理論に対する修正は  $\chi(r)$  によって特徴づくので、 $\chi(r)$  の振る舞いについて考える。まず RGT 有質量重力理論における相対論的天体の解には 2 つの長さスケールが存在することに注意する。一つは相対論的天体の質量で特徴づく Schwarzschild 半径

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (3.49)$$

である。数 km スケールであり天体物理学のスケールになる。もう一つは重力子の質量で特徴づくコンプトン波長

$$\lambda_g = \frac{h}{m_g c} \quad (3.50)$$

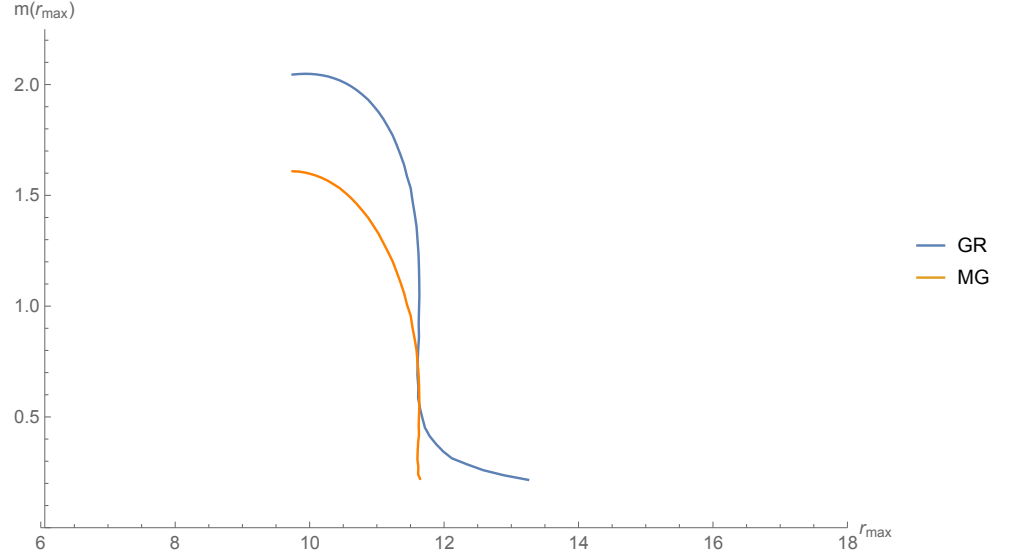


図3.1 SLy モデルに対する質量-半径関係 [65]。青線が一般相対性理論の場合で、橙色が dRGT 有質量重力理論の最小模型の場合である。中心密度の解が等しい解で半径が等しくなるように境界条件を設定している。最小模型のほうが質量が大きく減少することがわかる。

である。ただし  $h$  はプランク定数である。これはハッブルスケールで  $10^{26}\text{m}$  ほどで宇宙論のスケールになる。つまり  $\chi(r)$  は短距離と長距離で性質が変化すると予想できる。Vainshtein 半径がこの短距離領域と長距離領域を分ける目安となる。

Vainshtein 半径  $r_V$  は理論の非線形性が重要になる領域  $r \ll r_V$  を特徴づける長さスケールである。Vainshtein 半径  $r_V$  は有質量重力子の相互作用が現れるカットオフスケール  $\Lambda$  と、重力子の振る舞いを決める天体の質量  $M$  によって特徴づく。dRGT 有質量重力理論では相互作用のカットオフスケールが

$$\Lambda_3 \equiv (M_{\text{pl}} m_g^2)^{1/3} \quad (3.51)$$

以上になっており、非線形性が現れるスケールである Vainshtein 半径は

$$r_V = \left( \frac{M}{M_{\text{pl}}} \right)^{1/3} \frac{1}{\Lambda_3} = \left( \frac{M}{M_{\text{pl}}^2 m_g^2} \right)^{1/3} \quad (3.52)$$

となる。この詳細は付録Cにおいて解説されている。

最小模型において Vainshtein 機構が働いていれば短距離領域の外部解は Schwarzschild 型になっているはずである。そこで短距離領域ではあるが天体から十分離れた領域  $r_g \ll r \ll r_V$  に注目する。この領域において  $r_V$  に達さない範囲で  $g_{\mu\nu}$  漸近的に平坦であれば Vainshtein 機構が働いているとわかる。今の議論ではこの条件を  $\chi = \chi(r)$  に対する条件に読み替える必要がある。我々は  $g_{\mu\nu}$  が上記の意味で漸近的に平坦であることは、 $\chi(r) = r$  が上記の意味で漸的に達成されることと同値であることを示した [66]。以下でそれを示す。

まず  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  と仮定する。真空であるので  $T_{\mu\nu} = 0$  であり仮定から  $G_{\mu\nu} = 0$  である

ので、 $I_{\mu\nu} = 0$  である。(3.31)-(3.34) 式より

$$0 = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{2\chi}{r} + \chi' \right) + \beta_2 \left( \frac{\chi^2}{r^2} + \frac{2\chi\chi'}{r} \right) + \beta \frac{\chi^2\chi'}{r^2} \quad (3.53)$$

$$0 = (\beta_0 + \beta_1) + 2(\beta_1 + \beta_2) \frac{\chi}{r} + (\beta_2 + \beta_3) \left( \frac{\chi}{r} \right)^2 \quad (3.54)$$

$$0 = (\beta_0 + \beta_1) + (\beta_1 + \beta_2) \left( \frac{\chi}{r} + \chi' \right) + (\beta_2 + \beta_3) \frac{\chi\chi'}{r} \quad (3.55)$$

となる。 $\beta_n$  間の代数関係 (3.24) 式を使うと (3.54) 式は

$$0 = \left( \frac{\chi}{r} - 1 \right) \left[ (\beta_0 + \beta_1 - 2) \frac{\chi}{r} - (\beta_0 + \beta_1) \right] \quad (3.56)$$

となるため解

$$\frac{\chi}{r} = 1, \quad \frac{\beta_0 + \beta_1}{\beta_0 + \beta_1 - 2} \quad (3.57)$$

を得る。つまり  $\chi \propto r$  である。(3.55) 式も同様の結果を与える。そこで

$$A \equiv 1, \quad \frac{\beta_0 + \beta_1}{\beta_0 + \beta_1 - 2} \quad (3.58)$$

を用いて  $\chi = Ar$  として残りの (3.53) 式に代入してみると

$$(A - 1) \left[ (2\beta_0 + 3\beta_1 - 3)A^2 - (\beta_0 + 3\beta_1)A - \beta_0 \right] = 0 \quad (3.59)$$

となる。この方程式は明らかに  $A = 1$  の解を持ち、その他にも

$$(2\beta_0 + 3\beta_1 - 3)A^2 - (\beta_0 + 3\beta_1)A - \beta_0 = 0 \quad (3.60)$$

を満たす解をもつ。(3.60) 式の解は  $A = 1$  ではなく、特定の  $\beta_0, \beta_1$  の組のみが解となることがわかる。よって少なくとも  $A = 1$  の整合的な解が存在して、場合によっては  $A \neq 1$  の解が存在することがわかった。一方で  $A \neq 1$  であっても  $Ar \rightarrow r$  と再定義を行えば  $A = 1$  の場合と同様となる。よって  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  であれば  $\chi = r$  となることがわかった。

逆に  $\chi = r$  を仮定する。運動方程式は

$$0 = \beta_0 + \beta_1 (2 + e^{-\lambda}) + \beta_2 (1 + 2e^{-\lambda}) + \beta_3 e^{-\lambda} \quad (3.61)$$

$$2re^{2\lambda}\nu' = (1 - e^{-2\lambda}) - m_g^2 r^2 [\beta_0 + \beta_1 (2 + e^{-\nu}) + \beta_2 (1 + 2e^{-\nu}) + \beta_3 e^{-\nu}] \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} 0 = & \left( \nu'' + \nu^2 + \frac{\nu'}{r} \right) e^{-2\lambda} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \nu' \right) (e^{-2\lambda})' \\ & + m_g^2 [\beta_0 + \beta_1 (1 + e^{-\lambda} + e^{-\nu}) \\ & + \beta_2 (e^{-\lambda} + e^{-\nu} + e^{-\lambda-\nu}) + \beta_3 e^{-\lambda-\nu}] \end{aligned} \quad (3.63)$$

となる。 $\beta_n$  間の代数関係 (3.24) 式を用いて式を整理すると

$$e^{\lambda} = 1 \quad (3.64)$$

$$0 = \frac{2\nu'}{r} + m_g^2 (1 - e^{-\nu}) \quad (3.65)$$

$$0 = \nu'' + \nu'^2 + \frac{\nu'}{r} + m_g^2 (1 - e^{-\nu}) \quad (3.66)$$

となり、ここから更に

$$e^{\nu} = 1 \quad (3.67)$$

となる。つまり  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  である。よって  $g_{\nu\nu}$  が短距離領域内で漸近的に平坦であることと、 $\chi$  が短距離領域内で漸近的に  $r$  に近づくことが同値であることがわかった。

このことから最小模型における  $\chi$  が短距離領域内で漸近的に  $r$  に近づくか調べれば、Vainshtein 機構が働いているか判断することができる。(3.44) 式から外部解では

$$\chi = \frac{r}{2} \left\{ 3 - e^{-\nu} + \frac{1}{m_g^2 r^2} [(4e^\lambda - 3)e^{-2\lambda} - 1] \right\} \quad (3.68)$$

となる。Vainshtein 機構を仮定して

$$e^{2\nu} = 1 - \frac{2M}{r}, \quad e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2M}{r} \quad (3.69)$$

とすると

$$\begin{aligned} \frac{\chi}{r} &= 1 - \frac{M}{2r} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{r^2}\right) + \frac{1}{m_g^2 r^2} \left[ \frac{M}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{r^2}\right) \right] \\ &= \left(\frac{r_V}{r}\right)^3 \left[ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{M}{r}\right) \right] + 1 - \frac{M}{2r} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{r^2}\right) \end{aligned} \quad (3.70)$$

となる。注目するスケールでは  $r \ll r_V$  で  $1 \ll r_V/r$  であるので明らかに  $\chi$  は漸近的に  $r$  に近づかない。よって矛盾するので Vainshtein 機構が働いていないことがわかった。

### 3.3 一般の場合における相対論的天体の解

前節では dRGT 有質量重力理論の最小模型では Vainshtein 機構が働かず、相対論的天体の解が一般相対性理論よりも軽くなってしまうことを示した。一方で dRGT 有質量重力理論は最小模型ではない場合において Vainshtein 機構が働くと期待され、一般相対性理論の場合と同等の結果が得られる可能性がある。本研究では最小模型以外の場合で相対論的天体に対する運動方程式においてどのような解があるかを調べた。以降ではそれを示す。

最小模型の場合と同様に  $\nabla_\mu I^\mu{}_\nu = 0$  から得られる  $\chi$  の代数方程式の解の  $r_g \ll r \ll r_V$  における振る舞いについて考察する。式を簡単化するために  $\nu'$  を

$$\nu' \equiv n_0 - m_g^2 n_1 I^r{}_r \quad (3.71)$$

$$n_0 \equiv \frac{1}{2} \kappa^2 p r e^{2\lambda} + \frac{1}{2r} (e^{2\lambda} - 1) \quad (3.72)$$

$$n_1 \equiv \frac{1}{2} r e^{2\lambda} \quad (3.73)$$

と書く。 $n_0$  は一般相対性理論でも存在した項で、 $n_1$  は dRGT 有質量重力理論によって現



れた修正項の一部分である。このとき  $\nabla_\mu I^\mu_r = 0$  は

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{m_g^2 n_1 e^\nu}{r^2} \beta_3 (\beta_2 + \beta_3 e^{-\nu}) \chi^4 \\
& -\frac{2m_g^2 n_1 e^\nu}{r} [\beta_2 (\beta_2 + \beta_3 e^{-\nu}) + \beta_3 (\beta_1 + \beta_2 e^{-\nu})] \chi^3 \\
& + \{ \beta_3 n_0 e^\nu - m_g^2 n_1 e^\nu [\beta_1 (\beta_2 + \beta_3 e^{-\nu}) \\
& - 4\beta_2 (\beta_1 + \beta_2 e^{-\nu}) - \beta_3 (\beta_0 + \beta_1 e^{-\nu})] \} \chi^2 \\
& + \{ 2 [\beta_2 n_0 r e^\nu + \beta_2 (e^\nu - e^{\lambda+\nu}) + \beta_3 (1 - e^\lambda)] \\
& - 2m_g^2 n_1 r e^\nu [\beta_1 (\beta_1 + \beta_2 e^{-\nu}) + \beta_2 (\beta_0 + \beta_1 e^{-\nu})] \} \chi \\
& + r [2\beta_1 (e^\nu - e^{\lambda+\nu}) + 2\beta_2 (1 - e^\lambda) + \beta_1 n_0 r e^\nu] \\
& - m_g^2 n_1 r^2 e^\nu \beta_1 (\beta_0 + \beta_1 e^{-\nu}) .
\end{aligned} \tag{3.74}$$

となる。これは  $\chi$  の 4 次方程式として見ることができる。以降では

$$\chi^4 + a\chi^3 - \frac{1}{m_g^2} [(b_0 + m_g^2 b_1)\chi^2 + (c_0 + m_g^2 c_1)\chi + (d_0 + m_g^2 d_1)] = 0, \tag{3.75}$$

と書く。ただし

$$\begin{aligned}
a &= \frac{2r [\beta_3 (\beta_1 + \beta_2 e^{-\nu}) + \beta_2 (\beta_2 + \beta_3 e^{-\nu})]}{\beta_3 (\beta_2 + \beta_3 e^{-\nu})}, \\
b_0 &= \frac{n_0 r^2}{n_1 (\beta_2 + \beta_3 e^{-\nu})}, \\
b_1 &= -\frac{r^2 [4\beta_2^2 e^{-\nu} + \beta_0 \beta_3 + \beta_1 (5\beta_2 + 2\beta_3 e^{-\nu})]}{\beta_3 (\beta_2 + \beta_3 e^{-\nu})}, \\
c_0 &= \frac{2r^2 [\beta_2 r n_0 + \beta_2 (1 - e^\lambda) + \beta_3 (e^{-\nu} - e^{\lambda-\nu})]}{n_1 \beta_3 (\beta_2 + \beta_3 e^{-\nu})}, \\
c_1 &= -\frac{2r^3 [\beta_2 (\beta_0 + \beta_1 e^{-\nu}) + \beta_1 (\beta_1 + \beta_2 e^{-\nu})]}{\beta_3 (\beta_2 + \beta_3 e^{-\nu})}, \\
d_0 &= \frac{r^3 [\beta_1 r n_0 + 2\beta_1 (1 - e^\lambda) + 2\beta_2 (e^{-\nu} - e^{\lambda-\nu})]}{n_1 \beta_3 (\beta_2 + \beta_3 e^{-\nu})}, \\
d_1 &= -\frac{r^4 \beta_1 (\beta_0 + \beta_1 e^{-\nu})}{\beta_3 (\beta_2 + \beta_3 e^{-\nu})}.
\end{aligned} \tag{3.76}$$

である。

最小模型と同様に Vainshtein 機構が働くと仮定して、(3.69) 式を用いて  $\chi$  の 4 次方程式を近似する。外部解では  $p = 0$  であるので

$$n_0 = \frac{1}{r} \left[ \frac{M}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{r^2}\right) \right], \quad \frac{1}{n_1} = \frac{2}{r} \left[ 1 - \frac{2M}{r} \right] \tag{3.77}$$

となる。ここで  $\beta_n$  は理論的制限 [59] によって極端に大きい値や小さな値を取ることができないことを用いる。 $\beta_n = \mathcal{O}(1)$  として係数 (3.76) 式を展開すると

$$\begin{aligned}
a &= 2r \left[ A + \tilde{A} \frac{M}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{r^2}\right) \right], \\
b_0 &= B_0 \frac{M}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{r^2}\right), \quad b_1 = -r^2 \left[ B_1 + \tilde{B}_1 \frac{M}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{r^2}\right) \right], \\
c_0 &= r C_0 \left[ \frac{M}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{r^2}\right) \right], \quad c_1 = -2r^3 \left[ C_1 + \tilde{C}_1 \frac{M}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{r^2}\right) \right], \\
d_0 &= r^2 D_0 \left[ \frac{M}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{r^2}\right) \right], \quad d_1 = -r^4 \left[ D_1 + \tilde{D}_1 \frac{M}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{r^2}\right) \right],
\end{aligned} \tag{3.78}$$

となる。ただし

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\beta_3(\beta_1 + \beta_2) + \beta_2(\beta_2 + \beta_3)}{\beta_3(\beta_2 + \beta_3)}, \quad \tilde{A} = \frac{2\beta_2\beta_3 - \beta_3^2 A}{\beta_3(\beta_2 + \beta_3)}, \\
B_0 &= \frac{2\beta_3}{\beta_3(\beta_2 + \beta_3)}, \quad B_1 = \frac{4\beta_2^2 + \beta_0\beta_3 + \beta_1(5\beta_2 + 2\beta_3)}{\beta_3(\beta_2 + \beta_3)}, \\
\tilde{B}_1 &= \frac{(4\beta_2^2 + 2\beta_1\beta_3) - \beta_3^2 B_1}{\beta_3(\beta_2 + \beta_3)}, \quad C_0 = \frac{-4\beta_3}{\beta_3(\beta_2 + \beta_3)}, \\
C_1 &= \frac{\beta_2(\beta_0 + \beta_1) + \beta_1(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_3(\beta_2 + \beta_3)}, \quad \tilde{C}_1 = \frac{2\beta_1\beta_2 - \beta_3^2 C_1}{\beta_3(\beta_2 + \beta_3)}, \\
D_0 &= \frac{-2\beta_1 - 4\beta_2}{\beta_3(\beta_2 + \beta_3)}, \quad D_1 = \frac{\beta_1(\beta_0 + \beta_1)}{\beta_3(\beta_2 + \beta_3)}, \quad \tilde{D}_1 = \frac{\beta_1^2 - \beta_3^2 D_1}{\beta_3(\beta_2 + \beta_3)}.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

である。よって  $\chi$  の 4 次方程式は

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{\chi}{r}\right)^4 + \left[2A + 2\tilde{A}\frac{M}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{r^2}\right)\right] \left(\frac{\chi}{r}\right)^3 \\
&\quad - \frac{1}{m_g^2 r^2} \left\{ \left[B_0\frac{M}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{r^2}\right)\right] - m_g^2 r^2 \left[B_1 + \tilde{B}_1\frac{M}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{r^2}\right)\right] \right\} \left(\frac{\chi}{r}\right)^2 \\
&\quad - \frac{1}{m_g^2 r^2} \left\{ \left[C_0\frac{M}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{r^2}\right)\right] - m_g^2 r^2 \left[2C_1 + 2\tilde{C}_1\frac{M}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{r^2}\right)\right] \right\} \left(\frac{\chi}{r}\right) \\
&\quad - \frac{1}{m_g^2 r^2} \left\{ \left[D_0\frac{M}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{r^2}\right)\right] - m_g^2 r^2 \left[D_1 + \tilde{D}_1\frac{M}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{r^2}\right)\right] \right\}.
\end{aligned} \tag{3.80}$$

となる。 $r_g \ll r \ll r_V$  では  $m_g^2 r^2 \ll M/r \ll 1$  であることを使えば更に近似ができて

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{\chi}{r}\right)^4 + \left[2A + 2\tilde{A}\frac{M}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{r^2}\right)\right] \left(\frac{\chi}{r}\right)^3 \\
&\quad - \left(\frac{r_V}{r}\right)^3 \left\{ \left[B_0 + \mathcal{O}\left(\frac{M}{r}\right)\right] \left(\frac{\chi}{r}\right)^2 + \left[C_0 + \mathcal{O}\left(\frac{M}{r}\right)\right] \left(\frac{\chi}{r}\right) + \left[D_0 + \mathcal{O}\left(\frac{M}{r}\right)\right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.81}$$

となる。ここで Vainshtein 機構の仮定から注目するスケールでは  $\chi/r = \mathcal{O}(1)$  なので、結局  $\chi$  の 4 次と 3 次も無視できて

$$0 = \left[B_0 + \mathcal{O}\left(\frac{M}{r}\right)\right] \left(\frac{\chi}{r}\right)^2 + \left[C_0 + \mathcal{O}\left(\frac{M}{r}\right)\right] \left(\frac{\chi}{r}\right) + \left[D_0 + \mathcal{O}\left(\frac{M}{r}\right)\right] \tag{3.82}$$

となる。この解は

$$\frac{\chi}{r} = \frac{-C_0 \pm \sqrt{C_0^2 - 4B_0 D_0}}{2B_0} + \mathcal{O}\left(\frac{M}{r}\right) \tag{3.83}$$

であり、 $\chi/r = \mathcal{O}(1)$  の仮定と無矛盾である。よって dRGT 有質量重力理論では最小模型ではなければ Vainshtein 機構が働くことがわかった。この事実は注目するスケールでの漸近平坦性を境界条件として数値解を構成できることも示している。またこの解から相対論的天体の解の有無は条件  $D \equiv C_0^2 - 4B_0 D_0 \geq 0$  と  $\chi/r > 0$  によって判断できることもわかる。

上記の近似では  $\chi$  の 4 次方程式を近似によって  $\chi$  の 2 次方程式に帰着させた。そのため失われた解が存在する。この解は最小模型で得られた解に相当し Vainshtein 機構が働

いていない。これを確かめるために  $\chi$  の 4 次方程式の解を  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  として調べる。これらの解は

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = - \left[ 2A + \mathcal{O}\left(\frac{M}{r}\right) \right], \quad (3.84)$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = - \left(\frac{r_V}{r}\right)^3 \left[ B_0 + \mathcal{O}\left(\frac{M}{r}\right) \right], \quad (3.85)$$

$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = \left(\frac{r_V}{r}\right)^3 \left[ C_0 + \mathcal{O}\left(\frac{M}{r}\right) \right], \quad (3.86)$$

$$\alpha\beta\gamma\delta = - \left(\frac{r_V}{r}\right)^3 \left[ D_0 + \mathcal{O}\left(\frac{M}{r}\right) \right]. \quad (3.87)$$

を満たす。ここで (3.83) 式によって得られた解に相当するものが  $\alpha, \beta$  だとすると

$$\alpha + \beta = -\frac{C_0}{B_0} + \mathcal{O}\left(\frac{M}{r}\right), \quad \alpha\beta = \frac{D_0}{B_0} + \mathcal{O}\left(\frac{M}{r}\right) \quad (3.88)$$

である。そのため近似で失われた解に相当する  $\gamma, \delta$  には

$$\gamma + \delta = \left(\frac{C_0}{B_0} - 2A\right) + \mathcal{O}\left(\frac{M}{r}\right), \quad \gamma\delta = -\left(\frac{r_V}{r}\right)^3 \frac{B_0}{D_0} \quad (3.89)$$

の関係がある。よって  $\gamma, \delta$  は

$$\gamma = \sqrt{\frac{B_0}{D_0}} \left(\frac{r_V}{r}\right)^{3/2} + \mathcal{O}(1), \quad (3.90)$$

$$\delta = -\sqrt{\frac{B_0}{D_0}} R \left(\frac{r_V}{r}\right)^{3/2} + \mathcal{O}(1) \quad (3.91)$$

となる。この解は  $B_0/D_0$  の場合に現れる解で、注目するスケールで漸近的に平坦とならない解である。

これらの議論から dRGT 有質量重力理論の相対論的天体の運動方程式は

$$\chi = \left(\frac{r_V}{r}\right)^{3/2} + \mathcal{O}(1), \quad 1 + \mathcal{O}\left(\frac{M}{r}\right) \quad (3.92)$$

で特徴づく修正を受けることがわかった (上記は適切な  $r$  のリスケーリングを行っている)。各々の解が現れるかどうかは  $\beta_n$  の値によって変化する。前者の解は最小模型に存在していた解で Vainshtein 機構を持たない。一方で最小模型以外の場合で適切な  $\beta_n$  を選ぶと後者の解が現れて、実際に Vainshtein 機構が働く解が得られる。



## 第 4 章

# 考察と今後の展望

### 4.1 本研究に対する考察

本研究では dRGT 有質量重力理論における相対論的天体の解の構成およびその性質に対する解析を行った。従来の天体の解に対する研究はブラックホールや点粒子に対する解析が主であり、相対論的天体を取り扱うものは少なかった。本研究では定数密度の相対論的天体ではなく、静水圧平衡を考えることでより現実的な解の構築と解析を行った。最小モデルでは相対論的天体の最大質量が一般相対性理論と比較して大幅に減少した。この原因は最小モデルでは Vainshtein 機構が働かないためであった。このことを確認するために dRGT 有質量重力理論による修正部分を特徴づける  $\chi$  の振る舞いを解析した。Vainshtein 機構が働いていれば、Vainshtein 半径よりも十分小さなスケールで  $r$  の増大に伴って  $g_{\mu\nu}$  は Minkowski 型になるはずである。本研究では上記の意味で漸近的に  $g_{\mu\nu}$  が平坦になることと  $\chi \sim r$  となることが同値であることを示し、最小モデルでは上記の意味で漸近的に  $\chi \sim r$  とならないことから Vainshtein 機構が働いていないことを示した。この議論を応用して最小モデル以外の相対論的天体の解を求め、その振る舞いを調べた。相対論的天体の解は最大で 2 つの解を持ち、一方は最小モデルに存在した Vainshtein 機構を持たない解で、もう一方は Vainshtein 機構を持つ現実的な解であった。このことから dRGT 有質量重力理論は適切な理論パラメータを選ぶことによって、一般相対性理論と同等の相対論的天体の解を構築できることを確かめることができた。

上記のことから dRGT 有質量重力理論は重い相対論的天体を説明する場合、一般相対性理論に対して優位性を持たないものの同等の結果を与える理論である事がわかった。つまり一般相対性理論において重い相対論的天体を説明できる状態方程式であれば、dRGT 有質量重力理論においても重い相対論的天体が説明可能である。現実的には相対論的天体の質量を観測で推定するにあたって Shapiro 遅延などの一般相対性理論の効果を利用しているので、これらも dRGT 有質量重力理論でどのような変更を受けるか考慮する必要がある。もし観測で用いられるこれらの効果でも Vainshtein 機構が働くと確かめられた場合、相対論的天体に対して一般相対性理論と dRGT 有質量重力理論の間には観測的に差異がなくなる。この結果は dRGT 有質量重力理論および双計量重力理論 [67] などの発展理論が相対論的天体に適用可能であり、一般相対性理論に対して同等の結果を与えることを示唆している。

## 4.2 今後の展望

本研究では dRGT 有質量重力理論に注目して解析を行った。修正重力理論にはこの他にも様々な理論が存在し、適切な修正によって相対論的天体の最大質量が増大する可能性がある。相対論的天体の性質は重力理論の修正やハドロン物理の修正といった複数の不定性が存在する。観測から各修正の効果を分離して解析するには工夫が必要となる。本研究では相対論的天体の質量-半径関係のみに注目したが、潮汐変形率 [68, 69, 70] といった物理量の観測なども提案されている。近年では潮汐変形率は重力波の観測を通して推定が始まっている [71]。相対論的天体に対する複数の物理量を推定することで、各修正の効果を独立に推定できる可能性がある。

これまでの研究では修正重力理論とハドロンのモデルを組み合わせて質量-半径関係が計算されている [42, 42, 43, 65] が、観測可能な物理量から重力理論とハドロンモデルを決定するという逆問題もなされる必要がある。本学位論文のレビュー部分で示したように一般相対性理論の場合では逆 TOV 写像が構築されている [30]。つまり一般相対性理論を仮定すると、相対論的天体の質量-半径関係が観測されれば逆 TOV 写像を用いてハドロンモデルを決定することができる。今後は質量-半径だけではなく潮汐変形率などに対しても逆問題を解析することが重要となると考えられる。また修正重力理論においても逆 TOV 写像を構築することは、重力理論とハドロンモデルの双方を決定する手法を構築する上で有用になると考えられる。相対論的天体に対して複数の観測結果が得られた場合、逆問題の手法を用いることで強重力効果と高密度物質の双方の詳細が明らかになる可能性がある。

相対論的天体の研究は従来から連星パルサーや X 線天文学の観測を足がかりとして行われてきた。近年の重力波天文学の成立に伴って更に相対論的天体の性質が明らかになってきている。これから得られる (であろう) 多くの観測結果から強重力や高密度物質の特徴を効果的に抜き出すためには、予め多くの修正重力理論とハドロンモデルで解析を行っておく必要がある。また将来的に相対論的天体における修正重力理論とハドロンモデルを確定させるには、これらの分析を包括的かつ系統的に行う手法を生み出す必要があると考えられる。

## 付録 A

# 変分公式

共変計量テンソル  $\delta g_{\mu\nu}$  をベースに議論する。

■  $\delta g^{\mu\nu}$  の変分

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\delta g_{\mu\nu}^2) \quad (\because \delta(g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu}) = 0) \quad (\text{A.1})$$

■  $g$  の変分 余因子展開 (ラプラス展開) を行う。

$$\det(g) \delta_\nu^\mu = \tilde{g}^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} \quad (\text{A.2})$$

計量の正則性とヤコビの公式を用いて余因子について二通りで解く。

$$\det(g) g^{\mu\nu} = \tilde{g}^{\mu\nu} = \frac{\partial \det(g)}{\partial g_{\mu\nu}} \quad (\text{A.3})$$

よって

$$\delta \det(g) = \det(g) g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (\text{A.4})$$

あるいは

$$\delta \sqrt{-\det(g)} = \frac{1}{2} \sqrt{-\det(g)} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (\text{A.5})$$

■  $R_{\mu\nu}$  の変分 局所慣性系をとれば

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} \stackrel{*}{=} \partial_\mu \delta \Gamma_{\sigma\nu}^\rho - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \quad (\text{A.6})$$

である。 $\delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho$  は擬テンソルの差でテンソルになっている。つまり任意の系で成立するように共変化すれば

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \nabla_\mu \delta \Gamma_{\sigma\nu}^\rho - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \quad (\text{A.7})$$

となる。また

$$\delta R_{\sigma\nu} = \nabla_\alpha \delta \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\alpha\sigma}^\alpha \quad (\text{A.8})$$

で convention を変えれば

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha \quad (\text{A.9})$$

となる。

■  $R$  の変分

$$\begin{aligned}
\delta R &= R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (\nabla_\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha) \\
&= R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\mu (g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - g^{\mu\alpha} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\beta)
\end{aligned} \tag{A.10}$$

更に計算を進めれば

$$\begin{aligned}
\delta R &= R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} \nabla^2 - \nabla_\mu \nabla_\nu) \delta g^{\mu\nu} \\
&= R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla^\mu (\nabla^\alpha \delta g_{\mu\alpha} - g^{\alpha\beta} \nabla_\mu \delta g_{\alpha\beta})
\end{aligned} \tag{A.11}$$



## 付録 B

# 一般相対性理論の Hamilton 形式

以下の解説は教科書 [72] に基づく。ここでは時空多様体  $\mathcal{M}$  上の超曲面  $\Sigma_t$  を考える。

■超曲面の法線ベクトル 超曲面の法線ベクトル  $n^\mu$  は

$$n^\mu n_\mu = \epsilon = \begin{cases} -1 & \Sigma_t \text{ が spacelike のとき} \\ +1 & \Sigma_t \text{ が timelike のとき} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

を満たす。

■フレーム場  $e_m^\mu$  と超曲面上の計量  $h_{mn}$  超曲面  $\Sigma_t$  上の無限微小線素  $ds_\Sigma^2$  を超曲面  $\Sigma_t$  上の座標  $y^m$  で書き直すと

$$\begin{aligned} ds_\Sigma^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^m} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^n} dy^m dy^n \\ &\equiv g_{\mu\nu} e_m^\mu e_n^\nu dy^m dy^n \equiv h_{mn} dy^m dy^n \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

となる。よって超曲面  $\Sigma_t$  上の計量  $h_{mn}$  は

$$h_{mn} \equiv g_{\mu\nu} e_m^\mu e_n^\nu \quad (\text{B.3})$$

となりフレーム場  $e_m^\mu$  は

$$e_m^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^m} \quad (\text{B.4})$$

と書ける。フレーム場の性質として

$$e_{m,n}^\mu = \frac{\partial}{\partial y^n} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^m} = \frac{\partial}{\partial y^m} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^n} = e_{n,m}^\mu \quad (\text{B.5})$$

に注意する。

■足の変換 時空多様体  $\mathcal{M}$  の足  $\mu, \nu, \dots$  と超曲面  $\Sigma_t$  の足  $a, b, \dots$  は  $e_m^\mu$  によって結びつく。この足の変換はただの取り替えではなく、 $\mathcal{M} \rightarrow \Sigma_t$  であれば  $n^\mu$  の成分を落とす射影であることに注意する。

■完全性関係と射影 ( $e_m^\mu, n^\mu$ ) が基底をなす場合の完全性関係は

$$\begin{aligned} \delta_\mu^\nu &= g_{\mu\alpha} (h^{mn} e_m^\alpha e_n^\nu + \epsilon n^\alpha n^\nu) \\ &= h^{mn} e_{m\mu} e_n^\nu + \epsilon n_\mu n^\nu \\ &= h_\mu^\nu + \epsilon n_\mu n^\nu \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

である。これは基底  $(e_m^\mu, n^\mu)$  に対して  $\delta_\mu^\nu$  がクロネッカーのデルタとして働くことからわかる。ただし

$$h_\mu^\nu \equiv h^{mn} e_{m\mu} e_n^\nu = e_\mu^a e_a^\nu \quad (\text{B.7})$$

である。これより  $\Sigma_t$  上への射影  $P: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  は

$$h_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu - \epsilon n_\mu n^\nu \quad (\text{B.8})$$

と書ける。

■超曲面  $\Sigma_t$  に対する接ベクトル場  $A^\mu$  以降の議論は

$$A^\alpha n_\alpha = 0 \quad (\text{B.9})$$

を満たす超曲面  $\Sigma_t$  に対する接ベクトル場  $A^\mu$  に議論を限る。このような接ベクトルは自由に添字の種類を変えることができる。つまり

$$A^\mu = \delta_\alpha^\mu A^\alpha = (e_a^\mu e_\alpha^a + \epsilon n^\mu n_\alpha) A^\alpha = (A^\alpha e_\alpha^a) e_a^\mu \equiv A^a e_a^\mu \quad (\text{B.10})$$

である。逆の変換も

$$A^a e_a^\mu = (A^\alpha e_\alpha^a) e_a^\mu = A^\alpha h_\alpha^\mu = A^\alpha (h_\alpha^\mu + \epsilon n^\mu n_\alpha) = A^\alpha \delta_\alpha^\mu = A^\mu \quad (\text{B.11})$$

によって可能である。

■内部共変微分 内部共変微分を

$$A_{m|n} \equiv e_m^\alpha e_n^\beta A_{\alpha;\beta} \quad (\text{B.12})$$

で定義する。射影  $P: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  の形で表せば

$$A_{\mu|\nu} \equiv e_\mu^a e_\nu^b A_{a|b} = h_\mu^\alpha h_\nu^\beta A_{\alpha;\beta} = P(A_{\mu;\nu}) \quad (\text{B.13})$$

となる。内部共変微分の接続は

$$\begin{aligned} A_{m|n} &= A_{\alpha;\beta} e_m^\alpha e_n^\beta \\ &= [(A_\alpha e_m^\alpha)_{;\beta} - A_\alpha e_{m;\beta}^\alpha] e_n^\beta \\ &= [A_{m,\beta} - A_a e_\alpha^a e_{m;\beta}^\alpha] e_n^\beta \\ &= A_{m,n} - (e_\alpha^a e_{m;\beta}^\alpha e_n^\beta) A_a \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

より

$$\Gamma_{mn}^a = e_\alpha^a e_{m;\beta}^\alpha e_n^\beta \Leftrightarrow \Gamma_{cab} = e_c^\gamma e_{a\gamma;\beta} e_b^\beta \quad (\text{B.15})$$

となる。

■内部共変微分の接続 内部共変微分の接続の  $h_{mn}$  による表示を求める。まず

$$\begin{aligned} \Gamma_{cab} &= e_c^\gamma e_{a\gamma;\beta} e_b^\beta = [(e_c^\gamma e_{a\gamma})_{;\beta} - e_{c;\beta}^\gamma e_{a\gamma}] e_b^\beta \\ &= h_{ca;\beta} e_b^\beta - e_{a\gamma} e_{c;\beta}^\gamma e_b^\beta = h_{ca,b} - e_a^\gamma e_{c\gamma;\beta} e_b^\beta \\ &= h_{ca,b} - \Gamma_{acb} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

である。一方で

$$\begin{aligned}
\Gamma_{cab} &= e_c^\gamma e_{a\gamma;\beta} e_b^\beta = e_{c\gamma} e_{a;\beta}^\gamma e_b^\beta \\
&= e_{c\gamma} \left( e_{a,\beta}^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e_a^\alpha \right) e_b^\beta = e_{c\gamma} \left( e_{a,b}^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e_a^\alpha e_b^\beta \right) \\
&= e_{c\gamma} \left( e_{b,a}^\gamma + \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma e_b^\beta e_a^\alpha \right) = e_{c\gamma} \left( e_{b,\alpha}^\gamma + \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma e_b^\beta \right) e_a^\alpha \\
&= e_{c\gamma} e_{b;\alpha}^\gamma e_a^\alpha = e_c^\gamma e_{b\gamma;\alpha} e_a^\alpha = \Gamma_{cba}
\end{aligned} \tag{B.17}$$

である。まとめると

$$\Gamma_{cab} + \Gamma_{acb} = h_{ca,b} \tag{B.18}$$

$$\Gamma_{cab} - \Gamma_{cba} = 0 \tag{B.19}$$

である。これより

$$\begin{aligned}
h_{bc,a} + h_{ca,b} - h_{ab,c} &= (\Gamma_{bca} + \Gamma_{cba}) + (\Gamma_{cab} + \Gamma_{acb}) - (\Gamma_{abc} + \Gamma_{bac}) \\
&= (\Gamma_{cba} + \Gamma_{cab}) + (\Gamma_{bca} - \Gamma_{bac}) + (\Gamma_{acb} - \Gamma_{abc}) \\
&= 2\Gamma_{cab}
\end{aligned} \tag{B.20}$$

なので

$$\Gamma_{cab} = \frac{1}{2}(h_{bc,a} + h_{ca,b} - h_{ab,c}) \tag{B.21}$$

となり従来の定義と整合的で metricity も存在する。

■外曲率 Gauss-Weingarten 方程式が

$$\begin{aligned}
e_{m;n}^\mu &= \delta_\alpha^\mu e_{m;n}^\alpha = (e_a^\mu e_\alpha^a + \epsilon n^\mu n_\alpha) e_{m;n}^\alpha \\
&= (e_\alpha^a e_{m;n}^\alpha) e_a^\mu + \epsilon (n_\alpha e_{m;n}^\alpha) n^\mu \\
&= \delta_{m|n}^a e_a^\mu e_{m;n}^\alpha - \epsilon (e_m^\alpha n_{\alpha;n}) n^\mu \\
&= \Gamma_{mn}^a e_a^\mu - \epsilon n_{m|n} n^\mu
\end{aligned} \tag{B.22}$$

によって導かれる。ここで外曲率を

$$K_{mn} \equiv n_{m|n} \tag{B.23}$$

と定義する。外曲率は対称テンソルである。なぜなら

$$\begin{aligned}
K_{mn} &= n_{\alpha;\beta} e_m^\alpha e_n^\beta = -n_\alpha e_{m;\beta}^\alpha e_n^\beta \\
&= -n_\alpha e_{m;n}^\alpha = -n_\alpha e_{n;m}^\alpha \\
&= -n_\alpha e_{n;\beta}^\alpha e_m^\beta = n_{\alpha;\beta} e_n^\alpha e_m^\beta \\
&= K_{nm}
\end{aligned} \tag{B.24}$$

だからである。また外曲率の縮約は

$$\begin{aligned}
n_{;\alpha}^\alpha &= g^{\alpha\beta} n_{\alpha;\beta} \\
&= (e_a^\alpha e^{a\beta} + \epsilon n^\alpha n^\beta) n_{\alpha;\beta} \\
&= n_{a|b} h^{ab} + \epsilon n^\alpha n^\beta n_{\alpha;\beta} \\
&= K + \frac{\epsilon}{2} n^\beta (n^\alpha n_\alpha)_{;\beta} \\
&= K
\end{aligned} \tag{B.25}$$

である。

■ Gauss-Coddazi 方程式 Gauss-Weingarten 方程式の微分として

$$e_{a;bc}^\alpha = (\Gamma_{ab}^d e_d^\alpha - \epsilon K_{ab} n^\alpha)_{;c} \quad (\text{B.26})$$

が得られる。ここで左辺は

$$\begin{aligned} (\text{LHS}) &= (e_{a;\beta}^\alpha e_b^\beta)_{;c} = e_{a;\beta c}^\alpha e_b^\beta + e_{a;\beta}^\alpha e_{b;c}^\beta \\ &= e_{a;\beta c}^\alpha e_b^\beta + e_{a;\beta}^\alpha (\Gamma_{bc}^d e_d^\beta - \epsilon K_{bc} n^\beta) \\ &= e_{a;\beta c}^\alpha e_b^\beta + \Gamma_{bc}^d e_{a;d}^\alpha - \epsilon K_{bc} e_{a;\beta}^\alpha n^\beta \\ &= e_{a;\beta\gamma}^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma + \Gamma_{bc}^d (\Gamma_{ad}^e e_e^\alpha - \epsilon K_{ad} n^\alpha) - \epsilon K_{bc} e_{a;\beta}^\alpha n^\beta \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

となる。第 2・第 3 項は  $b, c$  の反対称化に伴って消える。右辺に関しては

$$\begin{aligned} (\text{RHS}) &= \Gamma_{ab,c}^d e_d^\alpha + \Gamma_{ab}^d e_{d;c}^\alpha - \epsilon K_{ab,c} n^\alpha - \epsilon K_{ab} n_{;c}^\alpha \\ &= \Gamma_{ab,c}^d e_d^\alpha + \Gamma_{ab}^d (\Gamma_{dc}^e e_e^\alpha - \epsilon K_{dc} n^\alpha) - \epsilon K_{ab,c} n^\alpha - \epsilon K_{ab} n_{;c}^\alpha \\ &= (\Gamma_{ab,c}^e + \Gamma_{ab}^d \Gamma_{dc}^e) e_e^\alpha - \epsilon (K_{ab,c} + \Gamma_{ab}^d K_{dc}) n^\alpha - \epsilon K_{ab} n_{;c}^\alpha \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

となる。更に

$$\begin{aligned} n_{;c}^\alpha &= n_{;c}^\beta \delta_\beta^\alpha = n_{;c}^\beta (e_a^\alpha e_\beta^a + \epsilon n^\alpha n_\beta) \\ &= (n_{\beta;c} e_a^\beta) e^{a\alpha} + \epsilon (n_{;c}^\beta n_\beta) n^\alpha \\ &= -e_{a;c}^\beta n_\beta e^{a\alpha} + \frac{\epsilon}{2} (n^\beta n_\beta)_{;c} n^\alpha \\ &= -(\Gamma_{ac}^b e_b^\beta - \epsilon K_{ac} n^\beta) n_\beta e^{a\alpha} \\ &= K_c^a e_a^\alpha \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

の分解から

$$(\text{RHS}) = (\Gamma_{ab,c}^e + \Gamma_{ab}^d \Gamma_{dc}^e - \epsilon K_{ab} K_c^e) e_e^\alpha - \epsilon (K_{ab,c} + \Gamma_{ab}^d K_{dc}) n^\alpha \quad (\text{B.30})$$

となる。Gauss-Weingarten 方程式の微分に対して  $b, c$  の反対称化を行うと

$$\begin{aligned} e_{a;[\beta\gamma]}^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma &= (\Gamma_{a[b,c]}^e + \Gamma_{a[b}^d \Gamma_{c]d}^e - \epsilon K_{a[b} K_{c]}^e) e_e^\alpha \\ &\quad - \epsilon (K_{ab,c} - \Gamma_{ac}^d K_{db} - \Gamma_{bc}^d K_{ad}) n^\alpha + \epsilon (K_{ac,b} - \Gamma_{ab}^d K_{bc} - \Gamma_{bc}^d K_{ad}) n^\alpha \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

となる。(内部) 曲率テンソルの定義は

$$e_{a;[\beta\gamma]}^\mu = -R_{\alpha\beta\gamma}^\mu e_a^\alpha \quad (\text{B.32})$$

$$\Gamma_{a[b,c]}^m + \Gamma_{a[b}^d \Gamma_{c]d}^m = -R_{abc}^m \quad (\text{B.33})$$

であるので Gauss-Weingarten 方程式の微分の式に  $-1$  倍して各項を書き直せば

$$R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma = [R^m{}_{abc} + \epsilon K_{a[b} K_{c]}^m] e_m^\mu + \epsilon K_{a[b} n_{c]}^\mu \quad (\text{B.34})$$

となる。この式 (あるいは  $e_{d\mu}$  や  $n_\mu$  で射影した式) を Gauss-Codazzi 方程式と呼ぶ。

■リッチスカラーの分解 リッチスカラー  $R$  を曲率テンソル  $R^\mu_{\alpha\nu\beta}$  の射影を考える。

対称性

$$R_{\mu\alpha\nu\beta} = R_{\alpha\mu\beta\nu} = -R_{\mu\alpha\beta\nu} \quad (\text{B.35})$$

より

$$R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\alpha n^\beta e^{a\mu} e^\nu_a = R_{\alpha\mu\beta\nu} n^\alpha n^\beta e^{a\mu} e^\nu_a = R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\nu e^{a\alpha} e^\beta_a \quad (\text{B.36})$$

$$R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\alpha n^\nu n^\beta = -R_{\mu\alpha\beta\nu} n^\mu n^\alpha n^\beta n^\nu = -R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\alpha n^\nu n^\beta = 0 \quad (\text{B.37})$$

に気をつけると

$$\begin{aligned} R &= g^{\alpha\beta} \delta^\nu_\mu R^\mu_{\alpha\nu\beta} = g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta} \\ &= (e^{a\alpha} e^\beta_a + \epsilon n^\alpha n^\beta) (e^{b\mu} e^\nu_b + \epsilon n^\mu n^\nu) R_{\mu\alpha\nu\beta} \\ &= [e^{a\alpha} e^\beta_a e^{b\mu} e^\nu_b + 2(\epsilon e^{a\alpha} e^\beta_a + n^\alpha n^\beta) n^\mu n^\nu] R_{\mu\alpha\nu\beta} \\ &= [e^{a\alpha} e^\beta_a e^{b\mu} e^\nu_b + 2\epsilon g^{\alpha\beta} n^\mu n^\nu] R_{\mu\alpha\nu\beta} \\ &= e^{a\alpha} e^\beta_a e^{b\mu} e^\nu_b R_{\mu\alpha\nu\beta} + 2\epsilon R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \\ &= h^{ab} h^{mn} (R_{manb} + \epsilon K_{a[n} K_{b]m}) + 2\epsilon R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \\ &= {}^3R + \epsilon(K^{ab} K_{ab} - K^2) + 2\epsilon R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

となる。更に 2 項目は

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta &= -n^\alpha_{;\alpha\beta} n^\beta = -n^\alpha_{;\alpha\beta} n^\beta + n^\alpha_{;\beta\alpha} n^\beta \\ &= -(n^\alpha_{;\alpha} n^\beta)_{;\beta} + n^\alpha_{;\alpha} n^\beta_{;\beta} + (n^\alpha_{;\beta} n^\beta)_{;\alpha} - n^\alpha_{;\beta} n^\beta_{;\alpha} \\ &= (n^\alpha_{;\beta} n^\beta - n^\beta_{;\beta} n^\alpha)_{;\alpha} + K^2 - n^\alpha_{;\beta} n^\beta_{;\alpha} \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

となる。このうち 4 項目は

$$\begin{aligned} n^\alpha_{;\beta} n^\beta_{;\alpha} &= (h^{\mu\nu} + \epsilon n^\mu n^\nu) (h^{\alpha\beta} + \epsilon n^\alpha n^\beta) n_{\mu;\alpha} n_{\beta;\nu} \\ &= \left[ h^{\mu\nu} n_{\mu;\alpha} + \frac{\epsilon}{2} (n^\mu n_\mu)_{;\alpha} n^\nu \right] \left[ h^{\alpha\beta} n_{\beta;\nu} + \frac{\epsilon}{2} n^\alpha (n^\beta n_\beta)_{;\nu} \right] \\ &= h^{\mu\nu} h^{\alpha\beta} n_{\mu;\alpha} n_{\beta;\nu} = h^{mn} h^{ab} n_{m|a} n_{b|n} \\ &= K^{ab} K_{ab} \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

となる。まとめると

$$\begin{aligned} R &= {}^3R + \epsilon(K^{ab} K_{ab} - K^2) + 2\epsilon \left[ (n^\alpha_{;\beta} n^\beta - n^\beta_{;\beta} n^\alpha)_{;\alpha} + K^2 - K^{ab} K_{ab} \right] \\ &= {}^3R + \epsilon(K^2 - K^{ab} K_{ab}) + 2\epsilon(n^\alpha_{;\beta} n^\beta - n^\beta_{;\beta} n^\alpha)_{;\alpha} \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

となる。

時空多様体  $\mathcal{M}$  の葉層構造 (foliation) を考える。葉 (leaf) として  $\Sigma_t$  を考える。各  $\Sigma_t$  における幾何学量の分解は超曲面の項目と同様である。ただし葉を空間的にとるので、以下では  $\epsilon = -1$  である。

■ラプス 各  $\Sigma_t$  に対する法線ベクトル  $n_\mu(t)$  を構成する。 $\Sigma_t$  に対する接ベクトル  $e^\mu_m(t)$  は超曲面に対する議論と同様に

$$e^\mu_m(t) \equiv \left. \frac{\partial x^\mu}{\partial y^m} \right|_t \quad (\text{B.42})$$

と定義される。よって法線ベクトル  $n_\mu(t)$  は

$$n_\mu \equiv \epsilon N \partial_\mu t = N \frac{\partial t}{\partial x^\mu}, \quad N = \frac{1}{\sqrt{-g^{\mu\nu} \partial_\mu t \partial_\nu t}} \quad (\text{B.43})$$

と定義すれば

$$n_\mu e_m^\mu(t) = -N \frac{\partial t}{\partial y^m} = 0 \quad (\text{B.44})$$

となる単位ベクトルとなる。またこの規格化因子  $N$  をラプスと呼ぶ。

■シフトベクトル 各  $\Sigma_t$  の関連を考える。無限小変位  $dx^\mu$  は

$$\begin{aligned} dx^\mu &= \left. \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \right|_y dt + \left. \frac{\partial x^\mu}{\partial y^m} \right|_t dy^m \\ &\equiv t^\mu dt + e_m^\mu dy^m \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

と書ける。ここで無限小変位  $dx^\mu$  の  $dt$  成分  $t^\mu$  は必ずしも葉  $\Sigma_t$  に垂直とは限らない。ここで

$$t^\mu n_\mu = -N \left. \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \right|_y \frac{\partial t}{\partial x^\mu} = -N \frac{\partial t}{\partial t} = -N \quad (\text{B.46})$$

より

$$\begin{aligned} t^\mu &= t^\alpha (e_a^\mu e_\alpha^a - n^\mu n_\alpha) \\ &= (t^\alpha e_\alpha^a) e_a^\mu + N n^\mu \\ &\equiv N^m e_m^\mu + N n^\mu \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

と書ける。ここで定義した

$$N^m \equiv t^\alpha e_\alpha^m \quad (\text{B.48})$$

をシフトベクトルと呼ぶ。これより無限小変位  $dx^\mu$  は

$$\begin{aligned} dx^\mu &= (N^m e_m^\mu + N n^\mu) dt + e_m^\mu dy^m \\ &= (N dt) n^\mu + (dy^m + N^m dt) e_m^\mu \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

となる。

■計量の分解 上記の分解を無限小線素に適用すると

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= g_{\mu\nu} [(N dt) n^\mu + (dy^m + N^m dt) e_m^\mu] [(N dt) n^\nu + (dy^n + N^n dt) e_n^\nu] \\ &= -N^2 dt^2 + h_{mn} (dy^m + N^m dt) (dy^n + N^n dt) \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

となる。

■計量の行列式の分解 余因子展開 (ラプラス展開) より

$$g \delta_\nu^\mu = \tilde{g}^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} \Leftrightarrow g g^{\mu\nu} = \tilde{g}^{\mu\nu} \Rightarrow g g^{tt} = \tilde{g}^{tt} = h \quad (\text{B.51})$$

である。ここで

$$g^{tt} = \frac{\partial t}{\partial x^\mu} \frac{\partial t}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} = \frac{n_\mu}{N} \frac{n_\nu}{N} g^{\mu\nu} = -\frac{1}{N^2} \quad (\text{B.52})$$

であるので

$$-\frac{g}{N^2} = h \Leftrightarrow g = -N^2 h \Leftrightarrow \sqrt{-g} = N \sqrt{h} \quad (\text{B.53})$$

となる。

■Einstein-Hilbert 作用の分解 以上の事実から

$$S_G = \frac{1}{16\pi G} \int dt d^3y N \sqrt{h} ({}^3R + K^{ab} K_{ab} - K^2) + S_{\text{boundary}} \quad (\text{B.54})$$

となる。(全微分項)を除いた Lagrangian は

$$L_G = \frac{1}{16\pi G} \int d^3y N \sqrt{h} ({}^3R + K^{ab} K_{ab} - K^2) \quad (\text{B.55})$$

となる。これより Lagrangian 密度を

$$(16\pi G) \sqrt{-g} \mathcal{L}_G := N \sqrt{h} ({}^3R + K^{mn} K_{mn} - K^2) \quad (\text{B.56})$$

と定義する。

■時間微分と Lie 微分 Hamiltonian を構成するためには変数の時間微分を与え、共変運動量を定義する必要がある。超曲面  $\Sigma_{t=0}$  の各点  $P$  に対して  $t^\mu$  による積分曲線  $c(t; P)$  を考える。このとき点  $P$  に対する変換

$$\varphi_t(P) := c_P(t) \in \Sigma_t \quad (\text{B.57})$$

は点  $P$  に対する時空多様体  $\mathcal{M}$  上の 1 パラメータ変換群をなす。ADM 形式における時間微分は、この 1 パラメータ変換群  $\varphi_t$  に対する Lie 微分として定義される。

例えば  $\varphi_t$  を用いて関数  $f$  から

$$(\varphi_t)^* f(P) := f(\varphi_t(P)) \quad (\text{B.58})$$

のように点  $P$  における新たな関数  $(\varphi_t)^* f$  が構築できる。この関数  $(\varphi_t)^* f$  はパラメータ  $t$  によって特徴付く。そこでパラメータ  $t$  に関する微分として

$$\mathcal{L}_t f := \left. \frac{d(\varphi_t)^* f}{dt} \right|_{t=0} := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_t)^* f - f}{t} \quad (\text{B.59})$$

を定義して  $f$  に対する  $t$  方向の Lie 微分と呼ぶ。ただし

$$\mathbf{t} := t^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (\text{B.60})$$

である。積分曲線の局所座標表示を

$$\varphi_t(P) := c_P(t) = (x_P^0(t), x_P^1(t), x_P^2(t), x_P^3(t)) \quad (\text{B.61})$$

として具体的に点  $P$  で評価すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t f(P) &= \left. \frac{df(\varphi_t(P))}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\partial f(x_P)}{\partial x_P^\mu} \frac{dx_P^\mu(t)}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= \left( t^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} f \right) (P) := (\mathbf{t}(f))(P) \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

となって反変ベクトル  $t^\mu$  による方向微分と等しくなる。

同様に反変ベクトルに対しても Lie 微分が定義できる。例としてベクトル場  $X$  を考える。1 パラメータ変換群  $\varphi_t$  の微分  $d\varphi_t$  を

$$((d\varphi_t)_P(X_P))(f) := X_P(f \circ \varphi_t) \quad (\text{B.63})$$

によって定義する。このとき

$$((\varphi_{-t})_*X)_{\varphi_{-t}(P)} := (d\varphi_{-t})_P(X_P) \quad (\text{B.64})$$

によって新たなベクトル場を構築できる。これはパラメータ  $t$  によって特徴付くベクトル場になっている。関数  $f$  の場合と同様にパラメータ  $t$  に関する微分として

$$\mathcal{L}_{\mathbf{t}}(X) := \left. \frac{d(\varphi_{-t})_*X}{dt} \right|_{t=0} := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_{-t})_*X - X}{t} \quad (\text{B.65})$$

として  $X$  に対する  $t$  方向の Lie 微分を定義できる。具体的には任意の点  $P$  について成り立つ。

$$\begin{aligned} (((\varphi_{-t})_*X)(f))(P) &= (\varphi_t)^*((\varphi_{-t})_*(((\varphi_{-t})_*X)(f)))(P) \\ &= (\varphi_t)^*((\varphi_{-t})_*X)(f(\varphi_{-t}(P))) = (\varphi_t)^*((d\varphi_{-t})_P(X_P))(f) \\ &= (\varphi_t)^*(X_P(f(\varphi_{-t}(P)))) = (\varphi_t)^*(X((\varphi_{-t})^*f)(P)) \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

を用いると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{t}}(X)f &= \left. \frac{d}{dt} [(\varphi_t)^*(X((\varphi_{-t})^*f))] \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} (\varphi_t)^*(Xf) \right|_{t=0} + X \left( \left. \frac{d}{dt} (\varphi_{-t})^*f \right|_{t=0} \right) \\ &= \mathbf{t}(Xf) - X(\mathbf{t}f) = [\mathbf{t}, X]f \end{aligned} \quad (\text{B.67})$$

と評価できる。 $e_m = e_m^\mu \partial_\mu$  の場合であれば

$$\mathcal{L}_{\mathbf{t}}(e_m) = [\mathbf{t}, e_m] = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{y^a}, \left( \frac{\partial}{\partial y^m} \right)_t \right] = 0 \quad (\text{B.68})$$

である。

上記の結果から 1-形式  $\alpha$  の Lie 微分が定まる。つまり

$$\mathcal{L}_{\mathbf{t}}(\alpha(X)) = \mathcal{L}_{\mathbf{t}}(\alpha)(X) + \alpha(\mathcal{L}_{\mathbf{t}}(X)) = \mathcal{L}_{\mathbf{t}}(\alpha)(X) + \alpha([\mathbf{t}, X]) \quad (\text{B.69})$$

であり

$$\mathcal{L}_{\mathbf{t}}(\alpha(X)) = \mathbf{t}(\alpha(X)) = (\mathbf{t}\alpha)(X) + \alpha(\mathbf{t}X) \quad (\text{B.70})$$

であるので

$$\mathcal{L}_{\mathbf{t}}(\alpha)(X) = (\mathbf{t}\alpha)(X) + \alpha(X\mathbf{t}) \quad (\text{B.71})$$

となる。成分表示をすると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{t}}(\alpha)(X) &= t^\mu \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial x^\mu} X^\nu + \alpha_\mu \left( X^\nu \frac{\partial t^\mu}{\partial x^\nu} \right) \\ &= (t^\mu \alpha_{\nu,\mu} + \alpha_\mu t^\mu_{;\nu}) X^\nu \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

である。この結果から一般のテンソルに対する Lie 微分の拡張が可能である。



■共役運動量 ADM 分解では  $\Sigma_t$  上の計量  $h_{mn}(y; t)$  が変数になっている。この微分は

$$\dot{h}_{mn} := \mathcal{L}_t h_{mn} = \mathcal{L}_t(g_{\mu\nu} e_m^\mu e_n^\nu) = \mathcal{L}_t(g_{\mu\nu}) e_m^\mu e_n^\nu \quad (\text{B.73})$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t(g_{\mu\nu}) &= (t^\alpha g_{\mu\nu;\alpha} + t^\alpha_{;\mu} g_{\alpha\nu} + t^\alpha_{;\nu} g_{\mu\alpha}) = t_{\mu;\nu} + t_{\nu;\mu} \\ &= (N^m e_{\mu m} + N n_\mu)_{;\nu} + (N^m e_{\nu m} + N n_\nu)_{;\mu} \\ &= N_{\mu;\nu} + N_{\nu;\mu} + N(n_{\mu;\nu} + n_{\nu;\mu}) + N_{,\mu} n_\nu + N_{,\nu} n_\mu \end{aligned} \quad (\text{B.74})$$

であるので

$$\dot{h}_{mn} = 2NK_{mn} + N_{m|n} + N_{n|m} \quad (\text{B.75})$$

となる。このことから

$$\begin{aligned} (16\pi G)p^{mn} &:= \frac{\partial}{\partial \dot{h}_{mn}} (16\pi G \sqrt{-g} \mathcal{L}_G) = \frac{\partial K_{ab}}{\partial \dot{h}_{mn}} \frac{\partial}{\partial K_{ab}} (16\pi G \sqrt{-g} \mathcal{L}_G) \\ &= \sqrt{h} (K^{mn} - K h^{mn}) \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

となる。

■Hamiltonian 密度 以上の結果より

$$\mathcal{H}_G := p^{ab} \dot{h}_{ab} - \sqrt{-g} \mathcal{L}_G \quad (\text{B.77})$$

とすれば

$$\begin{aligned} (16\pi G)\mathcal{H}_G &= \sqrt{h} (K^{mn} - K h^{mn}) (2NK_{mn} + N_{m|n} + N_{n|m}) \\ &\quad - N\sqrt{h} ({}^3R + K^{mn} K_{mn} - K^2) \\ &= N(K^{ab} K_{ab} - K^2 - {}^3R) \sqrt{h} - 2N_a (K^{ab} - K h^{ab})_{|b} \sqrt{h} \\ &\quad + 2((K^{ab} - K h^{ab}) N_a)_{|b} \sqrt{h} \end{aligned} \quad (\text{B.78})$$

となる。最後の項は全微分項に相当し、境界項となる。このことから  $N, N_a$  が Lagrange の未定定数となり、拘束条件が現れることがわかる。理論の変数は  $h_{ab}, p^{ab}$  の  $(6 \times 2)$  個存在し、(第 1 類) 拘束条件が  $(2 + 2 \times 3)$  個存在するので、正味の自由度は  $(2 \times 2)$  だけになる。



## 付録 C

# Vainshtein 機構

以下では Hinterbichler のレビュー論文 [53] に基づいて、カットオフスケールと Vainshtein 半径の説明を行う。まずポテンシャル項に対して Stueckelberg トリックと呼ばれる

$$h_{\mu\nu} \rightarrow H_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu A^\alpha \partial_\nu A_\alpha + 2\partial_\mu \partial_\nu \phi + \partial_\mu \partial^\alpha \phi \partial_\nu \partial_\alpha \phi + \dots \quad (\text{C.1})$$

の置き換えを行うことを考える。Stueckelberg トリックは新たな自由度を加えることで、重力子の有質量化で失われたゲージ対称性を回復する。このトリックを用いることで有質量重力子のモードが見やすくなる。このときもともと  $h$  の多項式であったポテンシャル項は

$$m^2 M_{\text{pl}} h^{n_h} (\partial A)^{n_A} (\partial^2 \phi)^{n_\phi} \quad (\text{C.2})$$

のような項を持つ。更に各モードを

$$\hat{h} = \frac{1}{2} M_{\text{pl}} h, \quad \hat{A} = \frac{1}{2} m M_{\text{pl}} A, \quad \hat{\phi} = \frac{1}{2} m^2 M_{\text{pl}} \phi \quad (\text{C.3})$$

によって規格化すれば

$$\Lambda_\lambda^{4-n_h-2n_A-3n_\phi} \hat{h}^{n_h} (\partial \hat{A})^{n_A} (\partial^2 \hat{\phi})^{n_\phi} \quad (\text{C.4})$$

$$\Lambda_\lambda \equiv (M_{\text{pl}} m^{\lambda-1})^{1/\lambda}, \quad (\text{C.5})$$

$$\lambda = \frac{3n_\phi + 2n_A + n_h - 4}{n_\phi + n_A + n_h - 2} \quad (\text{C.6})$$

となる。 $m < M_P$  であって相互作用を考えると  $n_\phi + n_A + n_h \geq 3$  である。このうち最も低エネルギーで抑制される項は  $n_\phi = 3, n_A = n_h = 0$  の場合で

$$\frac{(\partial^2 \hat{\phi})^3}{\Lambda_5^5}, \quad \Lambda_5 \equiv (M_{\text{pl}} m_g^4)^{1/5} \quad (\text{C.7})$$

というスカラーモードの 3 次相互作用である [73]。Fierz-Pauli 理論ではこの  $\Lambda_5$  カットオフスケールから重力子の相互作用が現れる。この  $\Lambda_5$  カットオフスケールで現れる高階微分相互作用はハミルトニアンが下に非有界になる Ostrogradsky 不安定 [74, 75, 76] の元になっていて、dRGT 有質量重力理論ではこのような相互作用がなくなるようポテンシャル項が調整されている。dRGT 有質量重力理論では  $n_h = 1, n_A = 0$  あるいは  $n_h = 0, n_A = 2$  の場合の

$$\frac{\hat{h} (\partial^2 \hat{\phi})^n}{\Lambda_3^{3(n-1)}}, \quad \frac{(\partial \hat{A})^2 (\partial^2 \hat{\phi})^n}{\Lambda_3^{3n}} \quad (\text{C.8})$$

といった相互作用が最も低エネルギーで現れるようになっており、カットオフスケールが

$$\Lambda_3 \equiv (M_{\text{pl}} m_g^2)^{1/3} \quad (\text{C.9})$$

に上昇している [58]。この場合の非線形性が現れるスケールは

$$\hat{\phi}, \hat{h} \sim \frac{M}{M_{\text{pl}}} \frac{1}{r} \quad (\text{C.10})$$

とした場合に (C.8) 式が無視できなくなるスケールのことである。つまり Vainshtein 半径は

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\Lambda_3^3} \sim \frac{M}{M_{\text{pl}}} \frac{1}{\Lambda_3^3 r^3} \quad (\text{C.11})$$

であるのでこの係数が  $\mathcal{O}(1)$  となる

$$r_V = \left( \frac{M}{M_{\text{pl}}} \right)^{1/3} \frac{1}{\Lambda_3} = \left( \frac{M}{M_{\text{pl}}^2 m_g^2} \right)^{1/3} \quad (\text{C.12})$$

になる。 $M \sim M_\odot$  として  $c, \hbar$  を明記し Vainshtein 半径を計算すると

$$r_V \sim \frac{\hbar}{c} \left( \frac{G M_\odot}{\hbar c m_g^2} \right)^{1/3} = \left( \frac{G M_\odot}{c^2} \frac{(\hbar c)^2}{(m_g c^2)^2} \right)^{1/3} \sim 10^{16} \text{km} \quad (\text{C.13})$$

ほどになる。

ここで dRGT 有質量重力理論に対して  $\Lambda_3$  脱結合極限と呼ばれる

$$\Lambda_3 = \text{fixed.}, M_{\text{Pl}} \rightarrow \infty, m_g \rightarrow 0 \quad (\text{C.14})$$

の極限を考えると  $\Lambda_3$  のエネルギースケールで抑制される相互作用のみになり、上記の議論からスカラーモード  $\hat{\phi}$  が微分相互作用  $\partial^2 \hat{\phi}$  の形のみで現れることに注意する。このため dRGT 有質量重力理論の  $\Lambda_3$  脱結合極限におけるスカラーモードは、微分相互作用を含むスカラー場  $\pi$  のモデルであるガリレオン理論

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial\pi)^2 - \frac{1}{\Lambda_3^3}(\partial\pi)^2 \square \pi + \frac{1}{M_{\text{Pl}}} \pi T, \quad (\text{C.15})$$

に類似した振る舞いをすると予想できる。このガリレオン理論の静的球対称解を具体的に考えることによって、Vainshtein 機構をより明確に理解することができる。以下の議論は de Rham のレビュー [50] に基づく。まず質点分布として

$$T_0 = -M\delta^{(3)}(r) = -M \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} \quad (\text{C.16})$$

を考え、静的球対称性を持つ解

$$\pi = \pi_0(r) \quad (\text{C.17})$$

を仮定する。このとき運動方程式は

$$\frac{1}{r^2} \partial_r \left[ r^3 \left( \frac{\pi_0'(r)}{r} + \frac{1}{\Lambda_3^3} \left( \frac{\pi_0'(r)}{r} \right)^2 \right) \right] = \frac{M}{4\pi M_{\text{Pl}}} \frac{\delta(r)}{r^2} \quad (\text{C.18})$$

となる。この両辺を積分してガリレオン理論の解を得ると

$$\frac{\pi_0'(r)}{r} + \frac{1}{\Lambda_3^3} \left( \frac{\pi_0'(r)}{r} \right)^2 = \frac{M}{M_{\text{Pl}}} \frac{1}{4\pi r^3} \quad (\text{C.19})$$

となる。この解はヴァインシュタイン半径

$$r_V = \frac{1}{\Lambda_3} \left( \frac{M}{M_{\text{Pl}}} \right)^{1/3} \quad (\text{C.20})$$

で大きく振る舞いが変化する。つまり

$$\begin{aligned} \text{for } r \gg r_V, \quad \pi'_0(r) &\sim \frac{M}{4\pi M_{\text{Pl}}} \frac{1}{r^2} \\ \text{for } r \ll r_V, \quad \pi'_0(r) &\sim \frac{M}{4\pi M_{\text{Pl}}} \frac{1}{r_V^{3/2} r^{1/2}} \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

である。重力への寄与としてはニュートン重力での力の大きさを  $F_{\text{Newton}}$  として

$$\frac{F_\pi}{F_{\text{Newton}}} = \frac{\pi'(r)/M_P}{M/(M_P^2 r^2)} = \begin{cases} \sim \left( \frac{r}{r_V} \right)^{3/2} \ll 1, & r \ll r_V \\ \sim 1, & r \gg r_V \end{cases} \quad (\text{C.22})$$

となる。この結果からヴァインシュタイン半径よりも十分短距離領域ではスカラー場  $\pi$  の寄与が非常に小さいことがわかる。具体的に数値を見積もると

$$\Lambda_3 \equiv (M_{\text{Pl}} m_g^2)^{1/3} \sim (10^3 \text{km})^{-1} \quad (\text{C.23})$$

であるので  $M \sim M_\odot$  として

$$r_V = \frac{1}{\Lambda_3} \left( \frac{M}{M_{\text{Pl}}} \right)^{1/3} \sim 10^{15} \text{km} \quad (\text{C.24})$$

であるので  $r \sim r_g \ll r_V$  において

$$\frac{F_\pi}{F_{\text{Newton}}} \sim \left( \frac{r_g}{r_V} \right)^{3/2} \sim 10^{-23} \quad (\text{C.25})$$

となる。



# 謝辞

本論文は筆者が名古屋大学大学院理学研究科素粒子宇宙物理学専攻(素粒子宇宙物理学系)の重力・素粒子的宇宙論研究室(QG研)に在籍中の研究成果をまとめたものである。同専攻教授である野尻伸一先生には指導教員としてご指導を戴き、本研究に関する議論を行っていただいた。自由に研究取り組むことができたのは野尻伸一先生のおかげであり、ここに深謝の意を表する。本研究室卒業生であり華中師範大学准教授の桂川大志氏には共同研究という形で研究の背景から解析の手法に至るまで多くの議論に付き合っていた。ここに深謝の意を表する。ICREA(Catalan Institution for Research and Advanced Studies)の研究教授である Sergei D. Odintsov 氏にも共同研究という形で議論を行っていただいた。ここに同氏に対して感謝の意を表する。本専攻 QG 研およびクォーク・ハドロン理論研究室(H研)の各位には研究遂行にあたり日頃より有益なご助言を戴いた。ここに感謝の意を表する。また家族には経済と生活の両面で多大な支援をいただいた。ここに感謝の意を表する。

本研究の一部は文部科学省による名古屋大学博士課程教育リーディングプログラム(N01)によった。





## 参考文献

- [1] Dimitrios Psaltis. Probes and Tests of Strong-Field Gravity with Observations in the Electromagnetic Spectrum. *Living Rev. Rel.*, 11:9, 2008.
- [2] James M Lattimer. The Nuclear Equation of State and Neutron Star Masses. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 62(1):485–515, 2012.
- [3] Irwin I. Shapiro. Fourth Test of General Relativity. *Physical Review Letters*, 13(26):789–791, 12 1964.
- [4] Joel M Weisberg and Joseph H Taylor. Relativistic binary pulsar B1913+16: Thirty years of observations and analysis. *ASP Conf. Ser.*, 328:25, 2005.
- [5] Paul Demorest, Tim Pennucci, Scott Ransom, Mallory Roberts, and Jason Hessels. Shapiro Delay Measurement of A Two Solar Mass Neutron Star. *Nature*, 467:1081–1083, 2010.
- [6] James M Lattimer and Madappa Prakash. The Ultimate energy density of observable cold matter. *Phys. Rev. Lett.*, 94:111101, 2005.
- [7] ChristianD. Ott. Observed Neutron Star Masses. Retrieved November 9, 2019, from <https://stellarcollapse.org/nsmasses>.
- [8] Feryal Özel and Paulo Freire. Masses, Radii, and the Equation of State of Neutron Stars. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 54:401–440, 2016.
- [9] Feryal Ozel. Neutron Stars | Observations and Models of Compact Stars. Retrieved November 25, 2019, from <http://xtreme.as.arizona.edu/NeutronStars/>.
- [10] Gordon Baym, Christopher Pethick, and Peter Sutherland. The Ground state of matter at high densities: Equation of state and stellar models. *Astrophys. J.*, 170:299–317, 1971.
- [11] N Chamel and P Haensel. Physics of Neutron Star Crusts. *Living Rev. Rel.*, 11:10, 2008.
- [12] Max Camenzind. *Compact Objects in Astrophysics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2007.
- [13] Fridolin Weber. Strange Quark Matter and Compact Stars. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 54:193–288, 7 2004.
- [14] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 1984.
- [15] R P Feynman. *Feynman lectures on gravitation*.
- [16] Tomas Ortin. *Gravity and strings*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge Univ. Press, 2004.
- [17] 茂木勇 and 伊藤光弘. 微分幾何学とゲージ理論. 共立出版株式会社, 1986.

- [18] N Aghanim and others. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters.
- [19] Gregory Walter Horndeski. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *Int.J.Theor.Phys.*, 10:363–384, 1974.
- [20] Hans A Buchdahl. Non-linear Lagrangians and cosmological theory. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 150:1, 1970.
- [21] Alexei A Starobinsky. A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity. *Adv.Ser.Astrophys.Cosmol.*, 3:130–133, 1987.
- [22] Gia Dvali, Stefan Hofmann, and Justin Khoury. Degravitation of the cosmological constant and graviton width. *Phys. Rev.*, D76:84006, 2007.
- [23] Th. Kaluza. Zum Unitätsproblem der Physik. In *Zum Unitätsproblem der Physik*, volume 27, page 1870001, 2018.
- [24] Oskar Klein. Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English). In *Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English)*, volume 37, pages 895–906, 1926.
- [25] Lisa Randall and Raman Sundrum. A Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys.Rev.Lett.*, 83:3370–3373, 1999.
- [26] Lisa Randall and Raman Sundrum. An Alternative to compactification. *Phys.Rev.Lett.*, 83:4690–4693, 1999.
- [27] G R Dvali, Gregory Gabadadze, and Massimo Porrati. 4-D gravity on a brane in 5-D Minkowski space. *Phys.Lett.B*, 485:208–214, 2000.
- [28] Philip Bull and others. Beyond  $\Lambda$ CDM: Problems, solutions, and the road ahead. *Phys. Dark Univ.*, 12:56–99, 2016.
- [29] J R Oppenheimer and G M Volkoff. On Massive Neutron Cores. *Phys. Rev.*, 55(4):374–381, 1939.
- [30] Lee Lindblom. Determining the Nuclear Equation of State from Neutron-Star Masses and Radii. *The Astrophysical Journal*, 398:569–573, 1992.
- [31] V R Pandharipande and D G Ravenhall. Hot Nuclear Matter. In Madeleine Soyeur, Hubert Flocard, Bernard Tamain, and Madeleine Porneuf, editors, *Nuclear Matter and Heavy Ion Collisions: Proceedings of a NATO Advanced Research Workshop on Nuclear Matter and Heavy Ion Collisions, held February 7–16, 1989, in Les Houches, France*, pages 103–132. Springer US, Boston, MA, 1989.
- [32] F Douchin and P Haensel. A unified equation of state of dense matter and neutron star structure. *Astron. Astrophys.*, 380:151, 2001.
- [33] N K Glendenning and S A Moszkowski. Reconciliation of neutron star masses and binding of the lambda in hypernuclei. *Phys. Rev. Lett.*, 67:2414–2417, 1991.
- [34] Norman K Glendenning and Jurgen Schaffner-Bielich. First order kaon condensate. *Phys. Rev.*, C60:25803, 1999.
- [35] M Prakash, J R Cooke, and J M Lattimer. Quark - hadron phase transition in protoneutron stars. *Phys. Rev.*, D52:661–665, 1995.
- [36] P Haensel and Alexander Y Potekhin. Analytical representations of unified equations of state of neutron-star matter. *Astron. Astrophys.*, 428:191–197, 2004.

- 
- [37] J M Lattimer and M Prakash. Neutron Star Structure and the Equation of State. *Astrophys. J.*, 550:426, 2 2000.
  - [38] Jocelyn S Read, Benjamin D Lackey, Benjamin J Owen, and John L Friedman. Constraints on a phenomenologically parameterized neutron-star equation of state. *Phys. Rev.*, D79:124032, 2009.
  - [39] Forrest J Rogers, Fritz J Swenson, and Carlos A Iglesias. OPAL equation of state tables for astrophysical applications. *Astrophys. J.*, 456:902, 1996.
  - [40] Feryal Özel, Dimitrios Psaltis, Tolga Güver, Gordon Baym, Craig Heinke, and Sebastien Guillot. the Dense Matter Equation of State From Neutron Star Radius and Mass Measurements. *The Astrophysical Journal*, 820(1):28, 2016.
  - [41] Slavko Bogdanov, Craig O Heinke, Feryal Özel, and Tolga Güver. NEUTRON STAR MASS-RADIUS CONSTRAINTS OF THE QUIESCENT LOW-MASS X-RAY BINARIES X7 AND X5 IN THE GLOBULAR CLUSTER 47 TUC. *The Astrophysical Journal*, 831(2):184, 2016.
  - [42] Artyom V Astashenok, Salvatore Capozziello, and Sergei D Odintsov. Nonperturbative models of quark stars in  $f(R)$  gravity. *Physics Letters B*, 742:160–166, 12 2014.
  - [43] Artyom V Astashenok, Sergei D Odintsov, and Alvaro de la Cruz-Dombriz. The realistic models of relativistic stars in  $f(R) = R + \alpha R^2$  gravity. *Class. Quant. Grav.*, 34(20):205008, 2017.
  - [44] Salvatore Capozziello, Mariafelicia De Laurentis, Ruben Farinelli, and Sergei D. Odintsov. Mass-radius relation for neutron stars in  $f(R)$  gravity. *Physical Review D*, 93(2):023501, 1 2016.
  - [45] Claudia de Rham, Gregory Gabadadze, and Andrew J Tolley. Resummation of Massive Gravity. *Physical Review Letters*, 106(23):231101, 6 2011.
  - [46] S F Hassan and Rachel A Rosen. On Non-Linear Actions for Massive Gravity. *JHEP*, 07:9, 2011.
  - [47] A I Vainshtein. To the problem of nonvanishing gravitation mass. *Phys.Lett.B*, 39:393–394, 1972.
  - [48] Claudia de Rham, J Tate Deskins, Andrew J Tolley, and Shuang-Yong Zhou. Graviton Mass Bounds. *Rev. Mod. Phys.*, 89(2):25004, 2017.
  - [49] M Fierz and W Pauli. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 173(953):211–232, 11 1939.
  - [50] Claudia de Rham. Massive Gravity. *Living Reviews in Relativity*, 17, 1 2014.
  - [51] H van Dam and M J G Veltman. Massive and massless Yang-Mills and gravitational fields. *Nucl.Phys.B*, 22:397–411, 1970.
  - [52] V I Zakharov. Linearized gravitation theory and the graviton mass. *JETP Lett.*, 12:312, 1970.
  - [53] Kurt Hinterbichler. Theoretical Aspects of Massive Gravity. *Rev. Mod. Phys.*, 84:671–710, 2012.
  - [54] Justin Khoury and Amanda Weltman. Chameleon fields: Awaiting surprises for

- tests of gravity in space. *Phys.Rev.Lett.*, 93:171104, 2004.
- [55] T Damour and Alexander M Polyakov. The String dilaton and a least coupling principle. *Nucl. Phys.*, B423:532–558, 1994.
- [56] Philippe Brax. Screening mechanisms in modified gravity. *Class.Quant.Grav.*, 30:214005, 2013.
- [57] D G Boulware and Stanley Deser. Can gravitation have a finite range? *Phys.Rev.D*, 6:3368–3382, 1972.
- [58] Claudia de Rham and Gregory Gabadadze. Generalization of the Fierz-Pauli action. *Physical Review D*, 82(4):044020, 8 2010.
- [59] Clifford Cheung and Grant N Remmen. Positive signs in massive gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2016(4):1–17, 4 2016.
- [60] S F Hassan and Rachel A Rosen. Resolving the Ghost Problem in non-Linear Massive Gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 108:41101, 2012.
- [61] S F Hassan and Rachel A Rosen. Confirmation of the Secondary Constraint and Absence of Ghost in Massive Gravity and Bimetric Gravity. *JHEP*, 04:123, 2012.
- [62] Mikhail S Volkov. Self-accelerating cosmologies and hairy black holes in ghost-free bigravity and massive gravity. *Class. Quant. Grav.*, 30:184009, 2013.
- [63] E C G Stueckelberg. Theory of the radiation of photons of small arbitrary mass. *Helv. Phys. Acta*, 30:209–215, 1957.
- [64] Sebastien Renaux-Petel. On the Vainshtein mechanism in the minimal model of massive gravity. *JCAP*, 1403:43, 2014.
- [65] Taishi Katsuragawa, Shin’Ichi Nojiri, Sergei D. Odintsov, and Masashi Yamazaki. Relativistic stars in de Rham-Gabadadze-Tolley massive gravity. *Physical Review D*, 93(12):124013, 6 2016.
- [66] Masashi Yamazaki, Taishi Katsuragawa, Sergei D Odintsov, and Shin’ichi Nojiri. Screened and unscreened solutions for relativistic star in de Rham-Gabadadze-Tolley massive gravity. *Physical Review D*, 100(8):084060, 10 2019.
- [67] S F Hassan and Rachel A Rosen. Bimetric Gravity from Ghost-free Massive Gravity. *JHEP*, 02:126, 2012.
- [68] Kip S Thorne. Tidal stabilization of rigidly rotating, fully relativistic neutron stars. *Phys.Rev.D*, 58:124031, 1998.
- [69] Tanja Hinderer. Tidal Love numbers of neutron stars. *Astrophys.J.*, 677:1216–1220, 2008.
- [70] Tanja Hinderer, Benjamin D Lackey, Ryan N Lang, and Jocelyn S Read. Tidal deformability of neutron stars with realistic equations of state and their gravitational wave signatures in binary inspiral. *Phys.Rev.D*, 81:123016, 2010.
- [71] B P Abbott and others. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. *Phys.Rev.Lett.*, 119(16):161101, 2017.
- [72] Eric Poisson. *A Relativist’s Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, 2009.
- [73] Nima Arkani-Hamed, Howard Georgi, and Matthew D Schwartz. Effective field theory for massive gravitons and gravity in theory space. *Annals Phys.*, 305:96–

---

118, 2003.

- [74] M Ostrogradsky. Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres. *Mem. Acad. St. Petersbourg*, 6(4):385–517, 1850.
- [75] Richard P Woodard. Avoiding dark energy with  $1/r$  modifications of gravity. *Lect. Notes Phys.*, 720:403–433, 2007.
- [76] Richard P Woodard. Ostrogradsky’s theorem on Hamiltonian instability. *Scholarpedia*, 10(8):32243, 2015.