

学位論文

自然な大統一理論における  
超対称性の自発的な破れ

2020年2月7日

名古屋大学大学院理学研究科 E研

吉田 哲

## 概要

標準模型は現在の素粒子実験の結果を非常によく説明するが、一方で電荷の量子化やゲージ結合定数の統一、Yukawa 結合定数の階層性、暗黒物質等の説明出来ない事実が存在することも知られている。これらを自然に説明しうるモデルとして異常  $U(1)$  対称性を持つ超対称大統一模型が提案されていた。超対称性が破れのスケールは、電弱スケールの安定性のために、TeV スケールにあると期待されているが、一方で、TeV スケールで超対称性が破れる模型では標準模型において禁止あるいは強く抑制されている過程が一般には生じるため実験事実と合わなくなる。これまで提案されてきた模型では超対称性を自発的に破る隠れたセクターや、超対称性の破れを我々の世界に伝える媒介セクター等の複雑な機構を用意することでこれらの現象論的制限を回避していた。

本論文では、異常  $U(1)$  対称性を持つ超対称大統一模型に超対称性の自発的破れを組み込むことを目的として行った研究について述べる。ここで構築された模型では、大統一理論と超対称性が自発的に破れるセクターが統一されており、上記のような複雑な機構は必要ない。ただし、大域的な超対称性の枠組みでは模型に近似的な  $U(1)_R$  対称性が存在することに起因して、ゲージノの質量が超対称性の破れるエネルギースケールに対して極端に小さくなり、結果としてゲージノの質量を 1 TeV とした時、スクォーク・スレプトンの質量が  $10^5$  TeV になるという問題が生じた。本研究ではさらに超対称性を局所的な対称性にまで拡張した場合を考え、スクォーク・スレプトンの質量とゲージノの質量の差が 2–3 桁程度になりうることを明らかにし、ヒッグス粒子の質量に対する量子補正の問題が改善することを示した。

また、本研究ではこの模型の予言についても調べ、2つの現象論的予言を得た。一つはスクォーク・スレプトンが  $SO(10)$  での各表現の異常  $U(1)$  電荷によって決まる質量を獲得し、結果としてスクォーク・スレプトンの質量に大統一理論における物質場の統一の証拠が現れること。二つ目は質量が 1 TeV 程度の  $U(1)_{EM}$  電荷を持った長寿命粒子の存在である。スクォーク・スレプトンの質量は 100 – 1000 TeV と重いため、近い将来の実験による発見は難しいものの、電荷を持った長寿命粒子は LHC で発見される可能性がある。

# 目次

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>超対称性</b>	<b>7</b>
2.1	拡張された Lie 代数	7
2.2	Superfield Formalism	7
2.2.1	一般の Superfield	9
2.2.2	Chiral Superfield と Anti Chiral Superfield	9
2.2.3	Vector Superfield	13
2.3	Gauge invariant な一般のラグランジアン	15
2.3.1	可換なゲージ群の場合	15
2.3.2	非可換なゲージ群への拡張	16
2.4	$U(1)_R$ 対称性	18
2.5	超対称性の自発的破れ	19
2.5.1	O’Raifeartaigh 型の模型	20
2.5.2	Fayet-Iliopoulos term によって超対称性を破る模型	21
<b>3</b>	<b>Anomalous <math>U(1)</math> 対称性</b>	<b>22</b>
3.1	Anomalous $U(1)$ 対称性の一般的性質	22
3.2	超対称性を持つ真空	23
3.2.1	真空期待値の決定	24
3.2.2	SUSY zero mechanism	25
3.3	Metastable vacuum	26
3.4	Some Models	27
<b>4</b>	<b>大統一理論</b>	<b>30</b>
4.1	$SU(5)$ 大統一理論	30
4.2	ゲージ群の埋め込みと電荷の量子化	30
4.3	Higgs Sector - Doublet-Triplet splitting problem	34
4.4	Yukawa 相互作用 - Unrealistic Yukawa problem と陽子崩壊	34
<b>5</b>	<b><math>SU(5)</math> 超対称大統一理論</b>	<b>36</b>
5.1	ゲージ場が媒介する陽子崩壊	37
5.2	Triplet Higgs が媒介する陽子崩壊と Doublet Triplet splitting Problem	37
<b>6</b>	<b>自然な大統一理論</b>	<b>38</b>
6.1	$SO(10) \times U(1)_A \times Z_2$ 超対称大統一模型	38
6.1.1	Dimopoulos Wilczek 型の真空期待値	40
6.1.2	Higgs 場の質量行列と Doublet Triplet splitting	42
6.2	Yukawa 行列	45
6.3	Higgsino の質量	47

<b>7</b>	<b>超対称性が自発的に破れる自然な超対称大統一理論</b>	<b>49</b>
7.1	超対称性の破れるスケールと $Z_2$ パリティ対称性	49
7.2	ゲージノの質量	51
<b>8</b>	<b>超重重力理論の効果</b>	<b>52</b>
8.1	Simplest model	53
8.2	Model with Neutral Field	54
8.3	Contribution from Moduli Field	55
8.3.1	モジュライの安定化に関する条件	56
8.3.2	Contribution from Moduli Field	56
8.4	この章の結論	57
<b>9</b>	<b>再び超対称性が自発的に破れる超対称大統一理論</b>	<b>58</b>
9.1	Sfermion の質量	58
9.2	Long Lived Charged Lepton	60
<b>10</b>	<b>Summary</b>	<b>62</b>
<b>A</b>	<b>8章の計算</b>	<b>63</b>
A.1	Simplest model	63
A.2	Model with Neutral Field	66
	謝辞	<b>69</b>
	参考文献	<b>70</b>

# 1 序論

現在, 自然には電磁気力, 弱い力, 強い力, 重力の 4 つの力が存在することが知られている. S.Glashow, S.Weinberg, A.Salam らは電磁気力と弱い力を統一的に扱うことで標準模型を完成させ, 今日加速器等を用いて行われるほとんどすべての実験結果を説明可能にした. [1-3] しかしその一方で, 電荷の量子化やゲージ結合定数の統一, Yukawa 結合定数の階層性, ヒッグス粒子の質量に対する量子補正の問題, 暗黒物質の存在等, 標準模型の枠組みでは説明できない事実が存在することも知られている. これらの事実の存在は標準模型を超える理論の存在を示唆しており, その候補として, 大統一理論 [4] や最小超対称標準模型 [5, 6] が提案されてきた.

大統一理論は, 高いエネルギースケールにおいて標準模型のゲージ対称性を含むような対称性を考え, その対称性の一部が自発的に破れることで標準模型が実現される理論である. これによってゲージ結合定数の統一や電荷の量子化を説明することが可能である. また, 最小超対称標準模型は, 標準模型にボソンとフェルミオンを入れ替える大域的な対称性 (超対称性) を課すものである. この理論は標準模型の粒子全てにパートナーとなる超対称粒子の存在を予言し, それらの粒子の存在によってヒッグス粒子の質量に対する量子補正に現れる 2 次発散を無くすることができる. この理論ではヒッグス粒子の質量に対する量子補正は超対称性の破れるエネルギースケールに比例した形で現れるため, 超対称性が電弱スケールに近い  $O(1 \text{ TeV})$  程度のエネルギースケールで破れていればヒッグス粒子の質量に対する量子補正の問題は解決できる. さらに, 最も安定な超対称粒子は暗黒物質の候補となりうる.

現在, 標準模型を超える理論の候補として有望なものの一つが大統一理論と超対称性理論を組み合わせた超対称大統一理論である. [7, 8] 超対称大統一理論は標準模型の問題の多くを解決しうる魅力的な理論ではあるが, 同時に以下に挙げるこの理論に特有の新たな問題を持つことも知られている.

- 一般に大統一理論では陽子崩壊が予言されるが, 現在までの観測結果に矛盾しない陽子の寿命を予言する模型を構築する必要がある. [9-11]
- 大統一理論では標準模型には存在しない新たなヒッグス粒子が導入され, 標準模型のヒッグス粒子はそれと共にゲージ群の一つの表現に埋め込まれる. 陽子が十分安定であるためには, ゲージ対称性の破れに伴って, 新たに導入されるヒッグス粒子が標準模型のヒッグスに比べて非常に大きい質量を得る必要があるが, そのような模型を作ることは一般的に難しい. [12-14]
- 大統一理論では標準模型の粒子をゲージ群の同じ表現の中に埋め込むが, これによってダウン型クォークとレプトンの Yukawa 結合定数が等しくなったり, 模型によっては全てのクォークとレプトンの Yukawa 結合定数がツリーレベルで等しくなる.
- 標準模型のヒッグス粒子とその超対称性パートナー粒子との質量の差を説明できない.
- 超対称性を導入すると, 一般に標準模型にはない Flavor を変える中性カレント (Flavor Changing Neutral Current, FCNC) や  $CP$  対称性を破る項が現れ, これらに関する実験の制限にかからない模型を構築する必要がある.

多くの超対称大統一理論に存在するこれらの問題を解決しうる魅力的な模型として  $SO(10) \times U(1)_A \times Z_2$  超対称大統一模型が提案されてきた. [15, 16] この模型では, 対称性によって理論の

相互作用項をコントロールすることで、超対称大統一理論の問題を自然に解決することができる。ここで言う“自然”とは、理論をその対称性だけで決定し、対称性から許される相互作用項は全て  $O(1)$  係数で導入するということである。したがって、パラメーターの微調整や模型にとって望ましくない項を手で落とすことは必要ない。この模型は魅力的ではあるが、依然として考えなければならない点を含んでいる。それは超対称性の破れの機構についてである。超対称性粒子が現在まで実験で観測されていないことから、超対称性は電弱スケールよりも高いエネルギースケールで破れていなければならない。従来の模型では超対称性が破れる隠れたセクターやその破れを我々の世界に伝える媒介セクター等の複雑なセクターを用意する必要があった。

超対称性の自発的な破れと関係の深い対称性として超対称性の電荷を回転する大域的な  $U(1)$  対称性 ( $U(1)_R$  対称性) がある。一般に理論に  $U(1)_R$  対称性が存在しない場合には、ポテンシャルの最小点において超対称性が破れないことが示されている。[17,18] 一方で、 $U(1)_R$  対称性が存在するとゲージ場の超対称パートナー粒子 (ゲージノ) の質量項が禁止され、現実的な模型を構築することができないだけでなく、 $U(1)_R$  対称性が自発的に破れる模型では対称性の破れにともなって質量を持たない Nambu-Goldstone 粒子が現れる。このように、超対称性の自発的な破れを実現する現実的な模型の構築は  $U(1)_R$  対称性に起因する困難を持つ。一方で、 $U(1)_R$  対称性を持たない理論においては、ポテンシャルの最小点とは別の準安定な真空において超対称性を自発的に破ることでこの困難を回避する模型が知られている。[19-26] このような模型では、ゲージノの質量項は禁止されず、 $U(1)_R$  対称性の破れにともなう Nambu-Goldstone 粒子も現れない。よって、準安定な真空の寿命が十分長ければ超対称性の自発的な破れを実現する現実的な模型を構築することが可能である。

本研究の動機は、 $SO(10) \times U(1)_A \times Z_2$  超対称大統一模型に準安定な真空で超対称性が自発的に破れる機構を組み込むことであったが、大域的な超対称性と  $U(1)_A$  対称性を持った理論の枠組みでは、準安定な真空で  $U(1)_R$  対称性が小さくしか破れていないことが指摘されていた。[20] 実際、本研究の中で最初に考えた模型においても準安定な真空において  $U(1)_R$  対称性の破れは小さく、これに起因してゲージノの質量は超対称性が破れるエネルギースケールに対して非常に小さくなった。超対称性の破れるエネルギースケールを高くすることで現実的なゲージノの質量を得ようとする、ヒッグス粒子の質量に対する量子補正の問題が生じ、パラメーターの微調整が必要になる。そこで本研究では、局所的な超対称性を持つ理論 (超重力理論) の効果によって、超対称性が破れるエネルギースケールとゲージノの質量の差が小さくなる可能性について探った。これは、超重力理論では小さな宇宙項を実現するために準安定な真空においても  $U(1)_R$  対称性が完全に破れている必要があり、これがゲージノの質量に対して大きな寄与を持つことが期待されたためである。本研究では、実際に  $U(1)_A$  対称性を持ついくつかの模型を用いた計算を行い、 $O(100 \text{ TeV})$  の超対称性の破れのスケールに対してゲージノが  $O(1 \text{ TeV})$  の現実的な質量を得るという結論を得た。また、この結論を踏まえて超対称性が自発的に破れる模型について調べ、スフェルミオンがこの模型に特有の質量スペクトラムを持つことや、長寿命の電荷を持った粒子の存在が预言されるという結論を得た。

最後に本論文の構成について述べる。2章から6章まではレビューである。2章では超対称性について、3章では  $U(1)_A$  対称性について、4及び5章では大統一理論についてのレビューを行っ

た. また6章は  $SO(10) \times U(1)_A \times Z_2$  超対称大統一模型についてのレビューである. 7章では大域的な超対称性が自発的に破れる  $SO(10) \times U(1)_A \times Z_2$  超対称大統一模型の構築と, この模型において超対称性の破れるエネルギースケールを下げるのがどのようにして可能か, またゲージノの質量がどのように得られるかについて述べた. 8章では7章の模型に対して超重力理論の効果がどのように現れるかを具体的な模型を用いて検証し, 超重力理論の効果によってゲージノの獲得する質量がより大きくなることを示した. 9章では超対称性が自発的に破れる模型の予言について述べてた. また, 8章での計算はやや煩雑なため, 計算の詳細は付録に記してある.

## 2 超対称性

### 2.1 拡張された Lie 代数

この節では、この後の議論で重要になる超対称性の代数とその表現について簡単に見る。Coleman-Mandula の定理では、4次元時空上の量子論が” 相対論的不変性を持つ ”, ” 相互作用がある ”, ” 確率が保存する ” 等の非常に一般的な仮定を満たすならば、S 行列の対称性の群としてはポアンカレ群と内部対称性の群の直積しか許されることが示された。[27] ただし、ここでは代数が交換関係によって与えられる群のみが考えられており、R. Haag, J. Lopuzanski, M. Sohnius らによって代数が反交換関係で与えられるような群まで対称性の群を拡張するならば、他にも許される対称性が存在することが示された。[28] この群の代数を拡張された Lie 代数あるいは超対称性代数と呼ぶことにする。  $\mathcal{Q}$ , を代数の反交換部分,  $\mathcal{X}$  を代数の交換部分 (ポアンカレ群, 内部対称性の群) とすると拡張された Lie 代数は以下のように書ける。

$$\{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'\} = \mathcal{X}, \quad [\mathcal{X}, \mathcal{X}'] = \mathcal{X}'', \quad [\mathcal{Q}, \mathcal{X}] = \mathcal{Q}'' \quad (2.1.1)$$

新たに一組の反交換関係で定義される生成子を考えた時、 $\mathcal{Q}$  について (2.1.1) 式を具体的に書くと以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \{\mathcal{Q}_\alpha, \bar{\mathcal{Q}}_{\dot{\beta}}\} &= 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \mathcal{P}_\mu \\ \{\mathcal{Q}_\alpha, \mathcal{Q}_\beta\} &= \{\bar{\mathcal{Q}}_{\dot{\alpha}}, \bar{\mathcal{Q}}_{\dot{\beta}}\} = 0 \\ [\mathcal{P}_\mu, \mathcal{Q}_\alpha] &= [\mathcal{P}_\mu, \bar{\mathcal{Q}}_{\dot{\alpha}}] = 0 \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

ここで  $\mathcal{P}_\mu$  はポアンカレ群の並進の演算子である。  $\mathcal{Q}$  は Lorentz Spinor として変換し、(2.1.2) の第 1 式からわかるように質量次元  $\frac{1}{2}$  を持つ。  $\mathcal{Q}$  による変換の下での対称性を超対称性 (Super symmetry, SUSY) と呼ぶ。  $\mathcal{Q}, \bar{\mathcal{Q}}$  の組が  $N$  組存在する時の超対称性のことを  $\mathcal{N} = N$  SUSY と呼ぶ。ただし、4次元時空上で  $\mathcal{N} \geq 2$  の超対称性を持った理論から出発すると標準模型を実現するようなカイラルな理論が構築できないので、この論文では  $\mathcal{N} = 1$  の場合しか扱わない。

### 2.2 Superfield Formalism

前節で与えられた代数の表現を考える。のちの計算上の便宜のためグラスマン数のパラメーター  $\epsilon_\alpha, \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}}$  を用いて書き直すと (2.1.2) は全て交換関係を使って表せる。

$$\begin{aligned} [\epsilon \mathcal{Q}, \bar{\epsilon} \bar{\mathcal{Q}}] &= 2\epsilon \sigma^\mu \bar{\epsilon} \mathcal{P}_\mu \\ [\epsilon \mathcal{Q}, \epsilon' \mathcal{Q}] &= [\bar{\epsilon} \bar{\mathcal{Q}}, \bar{\epsilon}' \bar{\mathcal{Q}}] = 0 \\ [\mathcal{P}_\mu, \epsilon \mathcal{Q}] &= [\mathcal{P}_\mu, \bar{\epsilon} \bar{\mathcal{Q}}] = 0 \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

超対称性変換の元

$$G(x, \theta, \bar{\theta}) = \exp\left\{i(-x^\mu \mathcal{P}_\mu + \theta \mathcal{Q} + \bar{\theta} \bar{\mathcal{Q}})\right\} \quad (2.2.2)$$

に対して (2.2.1) を用いてその積を計算すると、

$$\begin{aligned} G(0, \epsilon, \bar{\epsilon})G(x, \theta, \bar{\theta}) &= \exp\left[i\left\{-(x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\epsilon} - i\epsilon\sigma^\mu\bar{\theta})\mathcal{P}_\mu + (\theta + \xi)\mathcal{Q} + (\bar{\theta} + \bar{\epsilon})\bar{\mathcal{Q}}\right\}\right] \\ &= G(x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\epsilon} - i\epsilon\sigma^\mu\bar{\theta}, \theta + \epsilon, \bar{\theta} + \bar{\epsilon}) \end{aligned}$$



となって、この変換は Super space (時空の座標  $x^\mu$  及びグラスマン数の座標  $\theta, \bar{\theta}$  で張られる空間) 上での並進になっているから、 $Q, \bar{Q}$  の一つの具体的表現  $Q, \bar{Q}$  はこれらの座標の微分演算子として以下のように与えられることがわかる。

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} - i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu \\ \bar{Q}^{\dot{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} \theta_\beta \partial_\mu \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

$Q, \bar{Q}$  は以下の代数を満たす。

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} &= 2i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \partial_\mu = 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 0 = \{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

また、これらと反可換な微分演算子 (超微分)

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\beta \sigma^{\mu\beta\dot{\alpha}} \partial_\mu \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

が存在し、以下の反交換関係を満たす。

$$\begin{aligned} \{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} &= -2i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \partial_\mu \\ \{D_\alpha, D_\beta\} &= \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0 \\ \{D, Q\} &= \{D, \bar{Q}\} = \{\bar{D}, Q\} = \{\bar{D}, \bar{Q}\} = 0 \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

$D, \bar{D}$  は超対称性の生成子と交換するから、これらあるいはこれらの積を用いて、適当な超対称性の可約表現を規約な表現に射影する演算子を構成できることになる。この章の後半でその具体例を見る。

次に進む前にグラスマン数の取り扱いについて以後必要になる事項をまとめておく。グラスマン数  $\eta$  の積分を以下で定義する。

$$\int d\eta \eta = 1, \quad \int d\eta 1 = 0$$

すると、 $f(\eta), g(\eta)$  を  $\eta$  の関数として、

$$\int d\eta (C_1 f(\eta) + C_2 g(\eta)) = C_1 \int d\eta f(\eta) + C_2 \int d\eta g(\eta) \quad (C_1, C_2 \in \mathcal{C}) \quad (2.2.7)$$

$$\int d\eta \left( \frac{\partial}{\partial \eta} f(\eta) \right) = 0 \quad (2.2.8)$$

線型性 (2.2.7) と部分積分可能性 (2.2.8) が成り立ち、さらに、グラスマン数での測度を

$$d^2\theta = -\frac{1}{4} d\theta^\alpha d\theta^\beta \epsilon_{\alpha\beta}, \quad d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{4} d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} d\bar{\theta}_{\dot{\beta}} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$$

と定義すると、

$$\int d^2\theta (\theta\theta) = 1, \quad \int d^2\bar{\theta} (\bar{\theta}\bar{\theta}) = 1$$

が成り立つ。

### 2.2.1 一般の Superfield

Super space 上の関数  $S(x, \theta, \bar{\theta})$  を考える. この関数は Superfield と呼ばれ, 超対称性変換の下で可約表現として変換する. Superfield をグラスマン座標についてベキ展開すると,

$$S(x, \theta, \bar{\theta}) = A(x) + \theta\psi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta B(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}C(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\xi}(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) \quad (2.2.9)$$

となる.  $A(x), \psi(x), \dots$ などを Component field と呼ぶことにする.  $A(x), B(x), C(x), D(x)$  は Lorentz scalar,  $\psi(x), \bar{\chi}, \lambda(x), \bar{\xi}(x)$  は Weyl spinor,  $v_\mu$  は Lorentz vector である. Superfield の超対称性変換は以下のように定義される.

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon S(x, \theta, \bar{\theta}) &= \delta_\epsilon A(x) + \theta\delta_\epsilon\psi(x) + \bar{\theta}\delta_\epsilon\bar{\chi}(x) + \theta\theta\delta_\epsilon B(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\delta_\epsilon C(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}\delta_\epsilon v_\mu(x) \\ &\quad + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\delta_\epsilon\lambda(x) + \theta\theta\bar{\theta}\delta_\epsilon\bar{\xi}(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\delta_\epsilon D(x) \\ &\equiv (\epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q})S \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

(2.2.3) の  $Q, \bar{Q}$  を用いて各係数の変換性を実際に計算すると,

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon A &= \epsilon^\alpha\psi_\alpha + \bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \\ \delta_\epsilon\psi &= 2\epsilon_\alpha B + (\sigma^\mu\bar{\epsilon})_\alpha(v_\mu + i\partial_\mu A) \\ \delta_\epsilon\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} &= 2\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}}C - (\bar{\sigma}^\mu\epsilon)^{\dot{\alpha}}(v_\mu - i\partial_\mu A) \\ \delta_\epsilon B &= \bar{\epsilon}\bar{\xi} + \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi \\ \delta_\epsilon C &= \epsilon\lambda + \frac{i}{2}\epsilon\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi} \\ \delta_\epsilon v_\mu &= \bar{\epsilon}\sigma^\mu\lambda - \epsilon\sigma^\mu\bar{\xi} - \frac{i}{2}(\epsilon\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)^\alpha\partial_\nu\psi_\alpha + \frac{i}{2}(\bar{\epsilon}\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}}\partial_\nu\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \\ \delta_\epsilon\lambda_\alpha &= 2\epsilon_\alpha D - \frac{i}{2}(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\epsilon)_\alpha\partial_\mu v_\nu + i(\sigma^\mu\bar{\epsilon})_\alpha\partial_\mu C \\ \delta_\epsilon\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} &= 2\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}}D + \frac{i}{2}(\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\bar{\epsilon})^{\dot{\alpha}}\partial_\mu v_\nu + i(\bar{\sigma}^\mu\epsilon)^{\dot{\alpha}}\partial_\mu B \\ \delta_\epsilon D &= \frac{i}{2}\epsilon\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\xi} + \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda \end{aligned}$$

となる. ここで, 展開の最高次の項  $D$  の超対称性変換の変化分は場の全微分で書けていることに注意しておく.  $\theta^2\bar{\theta}^2$  の項の係数を  $D$ -term と呼ぶ. また, 定義から Superfield の積もまた超対称性変換の下で Superfield として変換する.

### 2.2.2 Chiral Superfield と Anti Chiral Superfield

次に Superfield から超対称性変換の規約表現を得る方法と, そこから超対称なラグランジアンを構成する手続きについて考える. 次のような条件を満たす Superfield  $\Phi$  は Chiral superfield と呼ばれ, 超対称性代数の規約表現の一つになっている.

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \quad (2.2.11)$$

今,新たに座標変数として  $y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$  を考えると便利である. なぜなら  $y^\mu, \theta$  は

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}y^\mu = \bar{D}_{\dot{\alpha}}(x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) = 0, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta = 0$$

を満たすから,(2.2.11) を満たす Superfield の一般形は  $y^\mu$  を用いて以下のように簡単に書けるからである.

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi(y, \theta) \\ &= \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

これを改めて  $x^\mu$  を用いて展開すれば,

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta) &= \phi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \theta\theta F(x) \\ &\quad + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^\mu\partial_\mu\phi(x) \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

となる. (2.2.10) の定義に従って計算すれば, 各 Component field の変換性が

$$\delta_\epsilon\phi(x) = \sqrt{2}\epsilon\psi(x) \quad (2.2.14)$$

$$\delta_\epsilon\psi_\alpha(x) = \sqrt{2}\epsilon_\alpha F(x) + i\sqrt{2}(\sigma^\mu\bar{\epsilon})_\alpha\partial_\mu\phi(x) \quad (2.2.15)$$

$$\delta_\epsilon F(x) = i\sqrt{2}(\bar{\epsilon}\bar{\sigma}^\mu)^\alpha\partial_\mu\psi_\alpha(x) \quad (2.2.16)$$

であることがわかる.  $\phi$  と  $\psi$  のように超対称性変換の下で互いに移り変わる Component field のことを超対称パートナー (Super partner) と呼ぶ.<sup>1</sup>ここで各項の質量次元を数えると,  $\theta$  及び  $\bar{\theta}$  は質量次元  $-\frac{1}{2}$ ,  $\Phi$  は質量次元 1 を持つことがわかる. Chiral superfield の  $\theta$  に関して 2 次の項を  $F$ -term と呼ぶ. (2.2.16) からわかるように,  $F$ -term の変化分は全微分の形になる.

また,  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$  が Chiral superfield ならば,

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}(\Phi_1\Phi_2\cdots\Phi_n) = 0$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}(\Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_n) = 0$$

であるから, Chiral superfield の積や和もまた Chiral superfield である.

次に,

$$D_\alpha\Phi^\dagger = 0 \quad (2.2.17)$$

を満たす Superfield を考える. この Superfield を Anti chiral superfield と呼び, これも超対称性代数の規約表現の一つになっている. Anti chiral superfield は  $y^{\dot{\mu}} = x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$  を用いて展開すると,

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi(y^\dagger, \bar{\theta}) \\ &= \phi^*(y^\dagger) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(y^\dagger) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(y^\dagger) \\ &= \phi^*(x) - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi^*(x) - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^\mu\partial_\mu\phi^*(x) \\ &\quad + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(x) \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

<sup>1</sup> $F$  は後で見るように物理的な自由度を持たない.

となり, 各 Component field の変換性は

$$\delta_\epsilon \phi^*(x) = \sqrt{2\epsilon} \bar{\psi}(x) \quad (2.2.19)$$

$$\delta_\epsilon \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}(x) = \sqrt{2\epsilon^{\dot{\alpha}}} F^*(x) + i\sqrt{2}(\bar{\sigma}^\mu \epsilon)^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \phi^*(x) \quad (2.2.20)$$

$$\delta_\epsilon F^*(x) = i\sqrt{2}(\epsilon \sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}(x) \quad (2.2.21)$$

である. Chiral superfield の時と同様に  $F$ -term( $\bar{\theta}$  に関して 2 次の項) の変化分は全微分の形になる.

ここまでで超対称性の規約表現を用いて超対称性変換の下で不変なラグランジアンを構成する準備が出来た. 確認してきたように, 超対称性変換の下で任意の Superfield の  $D$ -term 及び (Anti) Chiral superfield の  $F$ -term の変化分は全微分になる. したがって, まず任意の数の Chiral superfield  $\Phi_1, \dots, \Phi_i$  と Anti chiral Superfield  $\Phi^\dagger_1, \dots, \Phi^\dagger_i$  から両方を引数に持つようなエルミートな関数  $K(\Phi, \Phi^\dagger)$  と Chiral superfield だけを引数に持つような関数  $W(\Phi)$  を用意し,

$$K(\Phi, \Phi^\dagger) = \sum_{N, M} c_{M_1 \dots M_m}^{N_1 \dots N_n} \Phi_{N_1} \dots \Phi_{N_n} \Phi^\dagger_{M_1} \dots \Phi^\dagger_{M_m}$$

$$W(\Phi) = \sum_i g_{i_1 \dots i_n} \Phi_{i_1} \dots \Phi_{i_n}$$

以下のようにしてラグランジアンを構成すれば良い.

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} K(\Phi, \Phi^\dagger) + \left[ \int d^2\theta W(\Phi) + c.c \right] \quad (2.2.22)$$

$K(\Phi, \Phi^\dagger)$  を Kähler Potential,  $W(\Phi)$  を Superpotential と言う.<sup>2</sup>

簡単な例を考える.  $\dim[\Phi] = 1, \dim[\theta] = \dim[\bar{\theta}] = -\frac{1}{2}$  であったことを思い出すと, ラグランジアンがくりこみ可能な質量次元を持つためには  $\dim[K] = 2, \dim[W] = 3$  でなければならない. したがって Chiral superfield  $\Phi$  とその共役  $\Phi^\dagger$  を用いてラグランジアンを構成しようとすると, くりこみ可能な Kähler Potential と Superpotential は

$$K(\Phi, \Phi^\dagger) = \Phi^\dagger \Phi \quad (2.2.23)$$

$$W(\Phi) = c + a\Phi + \frac{m}{2}\Phi^2 + \frac{\lambda}{3}\Phi^3 \quad (2.2.24)$$

の形になる.  $c$  は定数である. この定数項は (2.2.22) のグラスマン数の積分によっていつも消えてしまいラグランジアンには現れないため, 大域的な超対称性を考えている限り Superpotential の中であってもダイナミクスに影響しない. しかし, 後に見るように超対称性の破れや超重力理論の議論の際には重要な意味を持つ. ただし今は, 簡単のために定数項を落とし Superpotential に

<sup>2</sup>この章の最初に見たように  $\int d^2\theta d^2\bar{\theta} \theta^2 \bar{\theta}^2 = 1, \int d^2\theta \theta^2 = 1$  なので, Superfield  $S$  のグラスマン数による積分  $\int d^2\theta d^2\bar{\theta} S$  と  $\int d^2\theta S$  はそれぞれ  $D$ -term と  $F$ -term を取り出す操作に対応する.

$\Phi \rightarrow -\Phi$  の下での対称性を課して,  $W(\Phi) = \frac{m}{2}\Phi^2$  として実際にラグランジアンを書けば,

$$\mathcal{L}_K \equiv \int d^2\theta d^2\bar{\theta} K(\Phi, \Phi^\dagger) = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + F^* F \quad (2.2.25)$$

$$\mathcal{L}_W \equiv \int d^2\theta W(\Phi) + (c.c.) = m\left(-\frac{1}{2}\psi\psi + F\phi\right) + c.c. \quad (2.2.26)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_K + \mathcal{L}_W \\ &= \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + F^* F - \left[ m\frac{1}{2}\psi\psi - F\phi + c.c. \right] \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

となる. ただし全微分の項は無視した. (2.2.27) を見ると, Component field  $F$  は運動項を持たず補助場として振る舞うことがわかる.

より一般的な Superpotential の場合について議論したい. いくつかの Chiral superfield を用いて Superpotential が<sup>3</sup>

$$W(\Phi) = c + a\Phi_i + \frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}\lambda_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k + \dots \quad (2.2.28)$$

で与えられるとする. ただし  $\dots$  は質量次元が 4 以上の項である. この時, Chiral superfield  $\Phi_i$  の  $F$ -term  $F_i$  は一般に

$$F_i = - \left( \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_i} \right)^* \quad (2.2.29)$$

で与えられることが  $F_i$  についての運動方程式から従う.  $W(\phi)$  は Superpotential の Chiral superfield を全てその Scalar component に置き換えた関数<sup>3</sup>を表し,  $c$  は複素定数,  $a_i$  は複素数の係数で,  $m_{ij}, \lambda_{ijk}$  は複素対称行列である. この時, ラグランジアン of Scalar potential 部分は

$$V(\phi) = \sum_i F_i^* F_i \quad (2.2.30)$$

と書ける. 例えば簡単のため (2.2.28) の Superpotential の質量次元 3 までの項を考えると,

$$W(\phi) = c + a_i\phi_i + \frac{1}{2}m_{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{3}\lambda_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k \quad (2.2.31)$$

$$-F_i^* = \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_i} = a_i + m_{ij}\phi_j + \lambda_{ijk}\phi_j\phi_k \quad (2.2.32)$$

なので, Scalar potential は

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \sum_i F_i^* F_i \\ &= a_i^* a_i + m_{ji}^* m_{ik} \phi_j^* \phi_k + \lambda_{kli}^* \lambda_{imn} \phi_k^* \phi_l^* \phi_m \phi_n \\ &\quad + \left[ a_i^* m_{ij} \phi_j + m_{ij}^* \lambda_{ikl} \phi_j^* \phi_k \phi_l + \lambda_{ijk}^* a_i \phi_j^* \phi_k^* + h.c. \right] \end{aligned}$$

である.

<sup>3</sup>以下, 特に断りなくこの関数のことも Superpotential と呼ぶ場合がある.

### 2.2.3 Vector Superfield

次に, 別の超対称性の規約表現から構成されるラグランジアンについて考える. 今から見る超対称性の規約表現はゲージ場を含むような表現である. 次の条件を満たす Superfield は Vector superfield と呼ばれる超対称性変換の可約表現である.

$$V = V^\dagger \quad (2.2.33)$$

Vector superfield を  $\theta$  についてベキ展開すると,

$$\begin{aligned} V = & C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\chi}(x) \\ & + \frac{i}{2}\theta\theta\left[M(x) + iN(x)\right] - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\left[M(x) - iN(x)\right] \\ & - \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\left[\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi(x)\right] - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left[\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}(x)\right] \\ & + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left[D(x) + \frac{1}{2}\partial^2C(x)\right] \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

のように書ける. 後の超ゲージ変換の議論のため  $\theta, \bar{\theta}$  の 3 次や 4 次の項は適当に選んである.  $C, M, N, D$  はそれぞれ実関数で,  $\chi^\alpha, \lambda^\alpha$  は Weyl spinor である. また, Vector superfield を Chiral superfield とその共役を用いて構成することができる.

$$\begin{aligned} \Phi + \Phi^\dagger = & \phi + \phi^* + \sqrt{2}(\theta\psi + \bar{\theta}\bar{\psi}) + \theta\theta F + \bar{\theta}\bar{\theta}F^* \\ & + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu(\phi - \phi^*) + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} \\ & + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^2(\phi + \phi^*) \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

(2.2.35) において  $\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$  に比例する項が gradient の形になっていることに注目すると, Vector superfield (2.2.34) の  $v_\mu$  をゲージ場と見なした時,

$$V \rightarrow V + \Phi + \Phi^\dagger \quad (2.2.36)$$

という変換が, 通常のゲージ変換の超対称変換の下で不変な形への拡張になっていることがわかる. この変換を超ゲージ変換 (Super gauge transformation) と呼ぶ. 詳細は後でみることにするが, 実際に (2.2.36) の変換の下で各 Component field は,

$$C \rightarrow C + \phi + \phi^* \quad (2.2.37)$$

$$\chi \rightarrow \chi + i\sqrt{2}\psi \quad (2.2.38)$$

$$M + iN \rightarrow M + iN - 2iF \quad (2.2.39)$$

$$v_\mu \rightarrow v_\mu - i\partial_\mu(\phi - \phi^*) \quad (2.2.40)$$

$$\lambda \rightarrow \lambda \quad (2.2.41)$$

$$D \rightarrow D \quad (2.2.42)$$

のように変換し (2.2.40) は通常の場合のゲージ場のゲージ変換になっている. また,  $\lambda, D$  は超ゲージ不変である. (2.2.40) の変換には  $\phi$  の虚部の自由度しか必要ではないから,  $\Phi$  の他の自由度を適当に選ぶことで超ゲージ変換によって  $C, \chi$  及び  $M + iN$  を 0 にすることができる. このゲージの

取り方を Wess-Zumino ゲージと呼ぶ。[29] このゲージを取ることで  $V$  は超対称性の表現ではなくなるが、Wess-Zumino ゲージを取った時  $V$  の 3 乗以上のベキは 0 になるから、後に見るように計算の上で便利な場合がある。

$$\begin{aligned} V_{WZ} &= -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D \\ V_{WZ}^2 &= \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}v^\mu v_\mu \\ V_{WZ}^3 &= 0 \end{aligned}$$

ここまででゲージ場を含むような超対称性変換の規約表現を構成する準備ができた。それは以下のようにして定義される Superfield である。

$$W_\alpha \equiv -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V \quad (2.2.43)$$

定義から、 $W_\alpha$  は超ゲージ不変な Chiral superfield である。

$$\begin{aligned} \bar{D}_\alpha W_\alpha &= -\frac{1}{4}\bar{D}_\alpha\bar{D}\bar{D}D_\alpha V = 0 \\ W &\rightarrow -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha(V + \Phi + \Phi^\dagger) = W_\alpha - \frac{1}{4}\bar{D}\{\bar{D}, D_\alpha\}\Phi = W_\alpha \end{aligned}$$

第 2 式では  $[\bar{D}^\alpha, P_\mu] = 0$  を用いた。 $W_\alpha$  のあらわな表式は  $y^\mu = x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$  を用いて表すと以下のようになる。

$$W_\alpha = -i\lambda_\alpha + \theta_\beta \left[ \delta_\alpha^\beta D - \frac{i}{2}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_\alpha{}^\beta (\partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu) \right] + \theta\theta(\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda})_\alpha \quad (2.2.44)$$

このような Superfield を Super fieldstrength と呼ぶことにする。Super fieldstrength は超ゲージ不変な Component field だけから構成されている。それぞれの Component field の超対称性変換での変化分は、

$$\delta_\epsilon\lambda_\alpha = i\epsilon_\alpha D + \frac{1}{2}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\epsilon)_\alpha v_{\mu\nu} \quad (2.2.45)$$

$$\delta_\epsilon(\partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu) = i(\epsilon\sigma_\mu\partial_\nu\bar{\lambda} + \bar{\epsilon}\bar{\sigma}_\mu\partial_\nu\lambda - \epsilon\sigma_\nu\partial_\mu\bar{\lambda} + \bar{\epsilon}\bar{\sigma}_\nu\partial_\mu\lambda) \quad (2.2.46)$$

$$\delta_\epsilon D = \bar{\epsilon}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda - \epsilon\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} \quad (2.2.47)$$

である。 $W_\alpha$  は Chiral superfield なので、前節で見たようにその積も Chiral superfield である。Chiral superfield の  $F$ -term は超対称性変換の下で不変なので、ゲージ場を含むような超対称なラグランジアンは以下のようにして構成できる。

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{4} \int d^2\theta \tau W^\alpha W_\alpha + h.c. \quad (2.2.48)$$

ここで、 $\tau$  は複素定数であるが、ゲージ結合定数  $g$  と  $CP$  対称性の破れのパラメーター  $\theta_{CP}$  を合わせて

$$\tau \equiv \frac{1}{g^2} - i\frac{\theta_{CP}}{8\pi^2} \quad (2.2.49)$$

と定義してある。この  $\tau$  のことを複素化された結合定数と呼ぶことにする。(2.2.43) において  $V \rightarrow gV$  のリスケールを行った後でラグランジアンを具体的に書くと、

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}W^\alpha W_\alpha &= \frac{g^2}{4} \left\{ -\lambda\lambda - \theta(\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)\lambda F_{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + \theta\theta \left[ -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho} + D^2 - 2i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.2.50)$$

$$\mathcal{L}_G = -i\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D^2 + g^2\frac{\theta_{CP}}{32\pi^2}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \quad (2.2.51)$$

となる。ただし、 $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu$ ,  $\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}$  とした。(2.2.51)を見ると、Component field  $D$  は運動項を持たず補助場として振る舞うことがわかる。

### 2.3 Gauge invariant な一般のラグランジアン

以下では、これまでの議論をもとに超対称でゲージ相互作用のあるラグランジアンを構成していく。

#### 2.3.1 可換なゲージ群の場合

まず簡単のために  $U(1)$  対称性を持った理論を考える。 $U(1)$  charge を持った Chiral superfield  $\Phi_1, \dots, \Phi_i, \dots$  を導入すると  $U(1)$  変換の下で Chiral superfield とその共役は以下のように変換する。

$$\Phi'_i = e^{-2ie_i g \Lambda} \Phi_i \quad (2.3.1)$$

$$\Phi_i^\dagger = e^{2ie_i g \Lambda^\dagger} \Phi_i^\dagger \quad (2.3.2)$$

ただし、 $g$  はゲージ結合定数で、 $e_i$  は  $\Phi_i$  の  $U(1)$  charge である。 $\Phi_i, \Phi_i^\dagger$  が変換後も Chiral 及び Anti chiral superfield であるために、 $\Lambda(x), \Lambda^\dagger(x)$  はそれぞれ Chiral superfield と Anti chiral superfield でなければならない。

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda(x) = 0 \quad (2.3.3)$$

$$D_\alpha\Lambda^\dagger(x) = 0 \quad (2.3.4)$$

この時、2.2.2 節で議論した Kähler potential がゲージ不変になるためには  $U(1)$  変換の下で、

$$V \rightarrow V + i(\Lambda - \Lambda^\dagger) \quad (2.3.5)$$

と変換する Vector superfield  $V$  を導入して、

$$K = \sum_i \Phi_i^\dagger e^{2e_i g V} \Phi_i \quad (2.3.6)$$

とすれば良い。実際に超対称且つ  $U(1)$  不変なラグランジアンを書いてみる。Superpotential をここでは、

$$W(\Phi) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} \sum_{ijk} \lambda_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \quad (2.3.7)$$

のようにする。<sup>4</sup>ただし、 $m_{ij}, \lambda_{ijk}$  は複素対称行列で、 $e_i + e_j \neq 0$  の時  $m_{ij} = 0$ ,  $e_i + e_j + e_k \neq 0$  の時  $\lambda_{ijk} = 0$  である。また、ゲージ対称性として  $U(1)$  対称性を考えている場合、Vector superfield の  $D$ -term はゲージ不変且つ超対称不変な項としてラグランジアンに加えられる。

$$\mathcal{L}_{FI} = \xi^2 \int d^2\theta d^2\bar{\theta} g V = \xi^2 g D \quad (2.3.8)$$

<sup>4</sup> $U(1)$  対称性と超対称性だけを尊重するならば定数項や Chiral superfield の 1 次の項、及び 4 次以上の項を禁止する理由はないのでこの Superpotential は単に簡単のためである。



この項は Fayet-Iliopoulos term (FI-term) と呼ばれる. [30] また,  $\xi$  は Fayet-Iliopoulos パラメーター (FI-パラメーター) と呼ばれる質量次元 1 を持つパラメーターである. 後の節で見るように, この項は超対称性の自発的破れを議論する上で重要である. 以上をまとめると結局ラグランジアンは以下ようになる.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_K + \mathcal{L}_P + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{FI} \quad (2.3.9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K &= \int d^2\theta d^2\bar{\theta} K = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \sum_i \Phi_i^\dagger e^{2e_i g V} \Phi_i \\ &= \sum_i \left[ (\mathcal{D}^\mu \phi_i)^\dagger (\mathcal{D}_\mu \phi_i) - i\bar{\psi}_i \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_i + F_i^* F_i - \sqrt{2} i e_i g (\bar{\psi}_i \bar{\lambda} \phi_i - \psi_i \lambda \phi_i^*) + e_i g \phi_i^* D \phi_i \right] \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_P = \int d^2\theta W + h.c.$$

$$= \sum_{ij} m_{ij} (\phi_i F_j - \frac{1}{2} \psi_i \psi_j) + \sum_{ijk} \lambda_{ijk} (\phi_i \phi_j F_k - \psi_i \psi_j \phi_k) + h.c.$$

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{4} \int d^2\theta \tau W^\alpha W_\alpha + h.c.$$

$$= -i\bar{\lambda} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} D^2 + g^2 \frac{\theta_{CP}}{32\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$$

ただし,  $\mathcal{D}_\mu \phi_i = (\partial_\mu - i e_i g v_\mu) \phi_i$ ,  $\mathcal{D}_\mu \psi_i = (\partial_\mu - i e_i g v_\mu) \psi_i$  である. この時,  $D$  の運動方程式より,

$$D = -g \left( \xi^2 + \sum_i e_i \phi_i^* \phi_i \right) \quad (2.3.10)$$

である.

### 2.3.2 非可換なゲージ群への拡張

非可換なゲージ対称性を持つ理論への拡張は, 以下のようにして可能である. 以下, 簡単のためにゲージ群の基本表現の Chiral superfield  $\Phi_i$  を考える.<sup>5</sup>他の表現を選んで以下議論は本質的には変わらない.  $\Phi_i$  は以下のように変換する.

$$\Phi'_i = (e^{-i\Lambda} \Phi)_i \quad (2.3.11)$$

$$\Phi_i^\dagger = (\Phi^\dagger e^{i\Lambda^\dagger})_i \quad (2.3.12)$$

$\Lambda$ ,  $\Lambda^\dagger$  は可換なゲージ群の場合と同様 Chiral superfield である. また,  $\Lambda$ ,  $\Lambda^\dagger$  は随伴表現に属し, 変換の生成子  $(T^a)_j^i$  で展開できる.

$$\Lambda_j^i = 2g (T^a)_j^i \Lambda^a \quad (2.3.13)$$

ただし,  $g$  はゲージ結合定数であり,  $T^a$  は以下の代数を満たす.

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$$

本論文では規格化 ( $\text{Tr}(T^a T^b) = \kappa_a \delta^{ab}$ ) の係数を  $\kappa_a = \frac{1}{2}$  とする. ここで非可換な場合への拡張として,

$$e^{V'} = e^{-i\Lambda^\dagger} e^V e^{i\Lambda} \quad (2.3.14)$$

<sup>5</sup> $i$  は Chiral superfield のラベルではなく基本表現の足である.

と変換する  $e^V$  を導入すれば, 可換な場合と同様,

$$K = \Phi^{\dagger j} (e^V)_j^i \Phi_i \quad (2.3.15)$$

はゲージ不変である. ここで  $V$  も  $\Lambda$  と同様に行列である.

$$V_j^i = 2g(T^a)_j^i V^a \quad (2.3.16)$$

Hausdorff の公式から, 変換した後の  $V'$  も  $T^a$  を用いて展開出来ることがわかる. さらに, (2.3.14) を実際に計算してみれば

$$V' = V + i(\Lambda - \Lambda^\dagger) + \dots \quad (2.3.17)$$

となることがわかるから, 非可換なゲージ群を考える場合でも Wess-Zumino ゲージを取ることが出来る. また, Super fieldstrength は以下のように拡張される.

$$W_\alpha = -\frac{1}{4} \bar{D} \bar{D} e^{-V} D_\alpha e^V = 2g(T^a)_j^i W_\alpha^a \quad (2.3.18)$$

この時, Super fieldstrength は Chiral superfield ではあるが超ゲージ変換の下では不変でなく,

$$W'_\alpha = e^{-V} W_\alpha e^V \quad (2.3.19)$$

のように変換する. したがって (2.2.48) の非可換な場合への拡張は,

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{8} \int d^2\theta \tau \text{Tr}(W^\alpha W_\alpha) + h.c. = \left( \frac{1}{4} - ig^2 \frac{\theta_{CP}}{32\pi^2} \right) \int d^2\theta W^{a\alpha} W_\alpha^a + h.c. \quad (2.3.20)$$

で与えられる. まとめると超対称且つゲージ不変なラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi^{\dagger j} (e^{2gV})_j^i \Phi_i + \left[ \frac{1}{4} \int d^2\theta \tau W^{a\alpha} W_\alpha^a + h.c. \right] + \left[ \int d^2\theta W + h.c. \right] \\ &= (\mathcal{D}^\mu \phi_i)^\dagger (\mathcal{D}_\mu \phi_i) - i\bar{\psi}^i \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_i + F^{*i} F_i \\ &\quad - \sqrt{2}ig (\bar{\psi}^j (T^a)_j^i \bar{\lambda}^a \phi_i - \phi^{*j} (T^a)_j^i \lambda^a \psi_i) + g\phi^{*j} (T^a)_j^i D^a \phi_i \\ &\quad - i\bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda^a - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2} D^a D^a + g^2 \frac{\theta_{CP}}{32\pi^2} F_{a\mu\nu} \tilde{F}_a^{\mu\nu} + \dots \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

となる. ただし,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \phi_i &= \partial_\mu \phi_i - ig(T^a)_i^j v_\mu^a \phi_j \\ \mathcal{D}_\mu \psi_i &= \partial_\mu \psi_i - ig(T^a)_i^j v_\mu^a \psi_j \\ \mathcal{D}_\mu \lambda^a &= \partial_\mu \lambda^a + gf^{abc} v_\mu^b \lambda^c \\ F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu v_\nu^a - \partial_\nu v_\mu^a + gf^{abc} v_\mu^b v_\nu^c \end{aligned}$$

であり (2.3.21) の  $\dots$  で表されている項は Superpotential から出てくる項である. また (2.3.21) の Scalar potential は以下ようになる.

$$\begin{aligned} V &= F^{*i} F_i + \frac{1}{2} D^a D^a \\ &= \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_i} \left( \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_i} \right)^* + \frac{g^2}{2} (\phi^{*j} (T^a)_j^i \phi_i)^2 \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

## 2.4 $U(1)_R$ 対称性

ここではこの後の超対称性の破れの議論で重要になる  $U(1)_R$  対称性について述べておきたい.  $U(1)_R$  対称性とは, 超対称性変換の生成子  $Q, \bar{Q}$  にそれぞれ  $U(1)_R$  の電荷 (以下  $R$ -charge と呼ぶ)  $-1, +1$  を割り当て,

$$Q \rightarrow e^{-i\alpha} Q, \quad \bar{Q} \rightarrow e^{i\alpha} \bar{Q} \quad (2.4.1)$$

のように変換する大域的な  $U(1)$  対称性である. 明らかにこの変換は超対称性の代数 (2.1.2) を変えない. (2.2.3) を見ると, この変換から  $\theta \rightarrow e^{i\alpha}\theta, \bar{\theta} \rightarrow e^{-i\alpha}\bar{\theta}$  が従い, よって,

$$d^2\theta \rightarrow e^{-2i\alpha} d^2\theta, \quad d^2\bar{\theta} \rightarrow e^{2i\alpha} d^2\bar{\theta} \quad (2.4.2)$$

であることがわかる. この時, Chiral superfield  $\Phi$  に  $R$ -charge  $R_\Phi$  を割り当てると, 各 Component field は以下のようにそれぞれ異なる  $R$ -charge を持つ.

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow e^{iR_\Phi\alpha}\Phi \\ \phi &\rightarrow e^{iR_\Phi\alpha}\phi \\ \psi &\rightarrow e^{i(R_\Phi-1)\alpha}\psi \\ F &\rightarrow e^{i(R_\Phi-2)\alpha}F \end{aligned}$$

また Vector superfield は実なので  $R$ -charge を持つことが出来ないが, 超微分  $D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}$  はそれぞれ  $R$ -charge  $-1, +1$  を持つので Super fieldstrength  $W_\alpha = (-1/4)\bar{D}\bar{D}D_\alpha V$  は  $R$ -charge  $+1$  を持つ. この結果を踏まえて (2.3.21) を見ると Superpotential の項以外は自動的に  $U(1)_R$  不変である. 従って, Chiral superfield  $\Phi$  に適当な  $R$ -charge  $R_\Phi$  を持たせることで, Superpotential が全体として  $R$ -charge 2 を持つようにすることが出来れば, ラグランジアンは  $U(1)_R$  対称性を持つことになる. 例えば超対称性だけを尊重し (2.2.28) のような Superpotential を考える場合にはラグランジアンに  $U(1)_R$  対称性を持たせることは一般に出来ないが, 超対称性以外の対称性によって Superpotential の形が制限されている等の場合にはラグランジアンに Accidental な  $U(1)_R$  対称性が存在する場合がある.  $U(1)_R$  対称性は超対称性の破れに関連して重要なだけでなく, 理論にこの対称性が存在する場合にも, そもそも存在しないあるいは自発的に破れている場合にも現象論的な困難が存在する.

困難の一つは, ゲージボソンの超対称パートナー (ゲージノ) の質量と超対称性の破れに関連したものである. Super fieldstrength の各 Component field は以下のような  $R$ -charge を持ち,

$$\begin{aligned} v_\mu &\rightarrow v_\mu \\ \lambda &\rightarrow e^{i\alpha}\lambda \\ D &\rightarrow D \end{aligned}$$

したがって  $\lambda$  の質量項  $\frac{1}{2}M_\lambda\lambda\lambda$  は  $U(1)_R$  対称性を破っていることがわかる. よって  $\lambda$  が質量を持つためには

1.  $U(1)_R$  対称性は自発的に破れるか
2. 元々の理論が  $U(1)_R$  対称性を持っていない

必要がある。一方で 1. の場合, 大域的な対称性である  $U(1)_R$  対称性が自発的に破れているならば, (Pseud) Nambu-Goldstone 粒子 ( $R$ -axion 等と呼ばれる.) が存在するはずであるが, それに対応する粒子はこれまで発見されていない。また, 2. の場合,  $U(1)_R$  を持たない理論には一般に超対称性を持った真空が存在することが知られており, 標準模型のような超対称性を持たない理論と矛盾する。[18] ただし, 2. の場合で超対称性を持った真空が存在する時でも, それとは別に超対称性が破れている準安定な真空が存在している場合がありうる。6 章以降で見る模型はまさにそのタイプ模型になっている。

## 2.5 超対称性の自発的破れ

(2.1.2) から, 超対称性の生成子とハミルトニアンの中に

$$H = \frac{1}{4} (\bar{Q}_1 Q_1 + Q_1 \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 Q_2 + Q_2 \bar{Q}_2) \quad (2.5.1)$$

の関係があることがわかる。これは任意の状態  $|\Psi\rangle$  に対して,

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle \geq 0 \quad (2.5.2)$$

であり, 特に超対称性が破れていない時, すなわち,

$$Q_\alpha |0\rangle = 0, \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}} |0\rangle = 0 \quad (2.5.3)$$

が成り立つ時,

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = 0 \quad (2.5.4)$$

であり, 真空のエネルギーが 0 であることを意味する。従って, 今, 真空の並進不変性を要請しフェルミオンや微分の掛かった項が真空期待値を持たないとするならば, 超対称性が破れているか否かは Scalar potential の真空期待値によって決まることになる。

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = \langle V \rangle = |\langle F \rangle|^2 + \frac{1}{2} \langle D \rangle^2$$

$$\langle F \rangle = \langle D \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad (\text{超対称性は破れていない})$$

$$\langle F \rangle \neq 0 \text{ and/or } \langle D \rangle \neq 0 \quad \Rightarrow \quad (\text{超対称性は破れている})$$

以下,  $\langle F \rangle = 0$  の式を  $F$  flatness condition,  $\langle D \rangle = 0$  の式を  $D$  flatness condition と呼ぶことにする。<sup>6</sup>特に,  $D \neq 0$  で超対称性が自発的に破れている時に (2.3.21) を思い出すと,

$$\mathcal{L} \ni g \phi^* D \phi \rightarrow g \langle D \rangle \phi^* \phi \quad (2.5.5)$$

となって,  $g \langle D \rangle$  が Scalar component の質量項を与えることがわかる。また, ある Chiral superfield  $S$  の  $F$ -term  $F_S$  が期待値を持って超対称性が自発的に破れる時には, Kähler potential の高次の項を考えると,

$$\int d^2\theta d^2\bar{\theta} S^\dagger S \Phi^\dagger \Phi \ni |F_S|^2 \phi^* \phi \rightarrow |\langle F_S \rangle|^2 \phi^* \phi \quad (2.5.6)$$

という項が Scalar component の質量に対する寄与として現れ,  $|\langle F_S \rangle|^2$  が Scalar component の質量を与えることがわかる。

<sup>6</sup>以下では特に必要な時を除いて  $\langle \rangle$  の記号を省略する。

### 2.5.1 O’Raifeartaigh 型の模型

ここからは実際に超対称性が破れるような模型を見ていくことにする. 簡単のためにゲージ対称性を課さず, Superpotential が 3 つの Chiral superfield  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2$  によって

$$W = a\Phi_0 + m\Phi_1\Phi_2 + g\Phi_0\Phi_1\Phi_2 \quad (2.5.7)$$

のように与えられる模型を考える. [31] この模型は,  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2$  の  $R$ -charge をそれぞれ 2, 0, 2 と選ぶと  $U(1)_R$  対称性を持つ.  $F$ -term は以下ようになる.

$$-F_0^* = \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_1} = a + g\phi_1\phi_2 \quad (2.5.8)$$

$$-F_1^* = \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_2} = m\phi_2 + 2g\phi_0\phi_1 \quad (2.5.9)$$

$$-F_2^* = \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_3} = m\phi_1 \quad (2.5.10)$$

ただし  $\phi_i$  は  $\Phi_i$  の Scalar component である. この模型では  $F_0$  と  $F_2$  を同時に 0 にすることが出来ず超対称性は自発的に破れる. より一般化された場合を考えてこの模型の特徴をもう少し明らかにしよう.  $R$ -charge 0 を持つ Chiral superfield  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$  と  $R$ -charge 2 の  $\Psi_1, \dots, \Psi_m$  を考える.<sup>7</sup> 超対称性と  $U(1)_R$  対称性から, Superpotential は次のように書ける.

$$W(\Phi, \Psi) = \sum_{i=1}^m a^i(\Phi)\Psi_i$$

ただし,  $a^i(\Phi) = a^i(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$  はそれぞれ超対称性から許される  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$  の一般の関数である. すると, それぞれの  $F$ -term は以下ようになる.

$$F_{\phi_i} = - \left( \frac{\partial a^j(\phi)}{\partial \phi_i} \psi_j \right)^* \quad (2.5.11)$$

$$F_{\psi_i} = - (a^i(\phi))^* \quad (2.5.12)$$

$\phi_i, \psi_i$  は  $\Phi_i, \Psi_i$  の Scalar component を表す.  $\psi_1 = \dots = \psi_m = 0$  は  $F_{\phi_i} = 0$  を満たす.<sup>8</sup> 残りの  $F$  flatness condition  $F_{\psi_i} = -(a^i(\phi))^* = 0$  は  $n$  個の変数を含む  $m$  本の連立方程式を与える.  $a^i(\phi)$  が  $\phi$  の一般の関数であることによって  $a^i(\phi) = 0$  はそれぞれ独立な方程式を与え, さらに  $a^i(\phi)$  はそれぞれ異なる定数項を含むから, この方程式には  $\phi_1 = \dots = \phi_n = 0$  のような解は存在しない. よって,  $m$  本の  $F$  flatness condition を満たすために少なくとも  $m$  個の  $\phi_i$  が 0 でない期待値を持つと考えられる. したがって,  $m \leq n$  ならば一般に解が存在し超対称性は破れない. しかし,  $m > n$  の時には一般には解が存在せず超対称性は自発的に破れる. この議論では, 超対称性と  $U(1)_R$  対称性だけを尊重する時, それぞれの  $a^i(\phi)$  は定数項を含むことと,  $U(1)_R$  対称性によって Superpotential の形が制限され,  $F_{\psi_i}$  が  $\psi$  に依らなかったことが特に重要であった.  $a^i(\phi)$  の定数項は Superpotential の中に  $\psi_i$  の Tadpole の係数として現れる. このことから, Superpotential の中の Tadpole 項は超対称性の破れに関わって重要なことがわかる. 実際先ほどの簡単な模型でも  $\Phi_0$  の Tadpole  $a\Phi_0$  が Superpotential の中にあるせいで全ての  $F$  flatness condition を同時に満たせなくなっていた.

<sup>7</sup>R charge が 0,2 以外の場を導入した場合, 以下の議論はやや複雑になるが本質的には変わらない.

<sup>8</sup> $\partial a^j(\phi)/\partial \phi_i$  が (2.5.11) を満たす  $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  のところで発散する場合,  $\psi_1 = \dots = \psi_m = 0$  は  $F_{\phi_i} = 0$  の解にならないが, ここでは  $a^i(\phi)$  が一般の関数であるという仮定からそのような特殊な Superpotential は考えない.

### 2.5.2 Fayet-Iliopoulos term によって超対称性を破る模型

ここでは,  $U(1)$  対称性を持った理論で, Vector superfield の  $D$ -term (FI-term) によって超対称性が破れるような模型を見る. [30] この模型の超対称性が破れている真空においては  $U(1)$  対称性も同時に破れている場合と,  $U(1)$  対称性は残っている場合がある. 考えるラグランジアンは以下のものである.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \left( \Phi^{\dagger 1} e^{2eV} \Phi_1 + \Phi^{\dagger 2} e^{-2eV} \Phi_2 \right) + m \left( \int d^2\theta \Phi_1 \Phi_2 + \int d^2\bar{\theta} \Phi_1^\dagger \Phi_2^\dagger \right) \\ & + \frac{1}{4} \left( \int d^2\theta W^\alpha W_\alpha + \int d^2\bar{\theta} \bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}} \right) + \xi^2 \int d^2\theta d^2\bar{\theta} V \end{aligned}$$

$\Phi_1, \Phi_2$  はそれぞれ  $U(1)$  charge が  $+1, -1$  の Chiral superfield である. Scalar potential は以下のようになり,

$$V = F_1^* F_1 + F_2^* F_2 + \frac{1}{2} D^2 \quad (2.5.13)$$

$F, D$  flatness condition は以下のようになる.

$$\begin{aligned} 0 = D &= - \left( \xi^2 + e\phi_1^* \phi_1 - e\phi_2^* \phi_2 \right) \\ 0 = F_1 &= -m\phi_2^* \\ 0 = F_2 &= -m\phi_1^* \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

FI-term からくる  $\xi^2$  の存在によってこれら全てを同時に満たすことは出来ず超対称性は自発的に破れる. ここでも Superpotential は  $U(1)_R$  対称性を持っている.  $F$  と  $D$  を Scalar potential の式に代入すると,

$$V = \frac{1}{2} \xi^4 + \left( m^2 + \frac{1}{2} e \xi^2 \right) \phi_1^* \phi_1 + \left( m^2 - \frac{1}{2} e \xi^2 \right) \phi_2^* \phi_2 + \frac{1}{2} e^2 (\phi_1^* \phi_1 - \phi_2^* \phi_2)^2$$

となって,  $m^2 - \frac{1}{2} e \xi^2 > 0$  の時,  $\phi_1 = 0 = \phi_2$  で Potential は最小値  $\frac{1}{2} \xi^4$  をとる. この場合は  $U(1)$  対称性は破れず超対称性だけが破れる. 一方,  $m^2 - \frac{1}{2} e \xi^2 < 0$  の場合は,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 0, \\ \phi_2 &= \frac{2}{e} \sqrt{-(m^2 - \frac{1}{2} e \xi^2)} \end{aligned}$$

で Potential が最小になり,  $U(1)$  対称性と超対称性は同時に破れることになる.

### 3 Anomalous $U(1)$ 対称性

この章では Anomalous  $U(1)$  対称性を持った理論の性質について見ていく. この対称性は後の章でも見るように  $SO(1) \times U(1)_A \times Z_2$  大統一模型の中で重要な役割を持つ.

#### 3.1 Anomalous $U(1)$ 対称性の一般的性質

Anomalous  $U(1)$  対称性 (以下  $U(1)_A$  対称性と呼ぶ.) は弦理論の低エネルギー有効理論に現れる見かけ上アノマリーのある  $U(1)$  対称性である. ゲージ変換のパラメーターを  $\Lambda/2$  とすると, 電荷  $Q_i$  を持った Chiral superfield  $\Phi_i$  とゲージ場を含む Vector superfield  $V_A$  は,  $U(1)_A$  変換の下で,

$$\Phi_i \rightarrow e^{-iQ_i \frac{\Lambda}{2}}, \quad V_A \rightarrow V_A + \frac{i}{2} (\Lambda - \Lambda^\dagger) \quad (3.1.1)$$

と変換される. また, この理論では  $U(1)_A$  の Super fieldstrength  $W_A^\alpha$  は,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \int d^2\theta k_A T W_A^\alpha W_{A\alpha} + h.c. \quad (3.1.2)$$

の形でモジュライ場  $T$  と結合しており,<sup>9</sup>  $T$  が  $U(1)_A$  変換の下で,

$$T \rightarrow T + \frac{i}{2} \delta_{GS} \Lambda \quad (3.1.3)$$

と変換されるならば  $U(1)_A$  対称性のアノマリーは相殺されることが知られている. [32] ただし,  $\delta_{GS}$  定数で,  $\delta_{GS}$  と  $U(1)_A$  charge は,

$$2\pi^2 \delta_{GS} = \frac{1}{3k_A} \text{Tr } Q^3 = \frac{1}{24} \text{Tr } Q > 0 \quad (3.1.4)$$

の関係を満たさなければならない. また, モジュライの期待値は複素化された結合定数  $k_A \langle T \rangle = \tau$  を与える. モジュライのゲージ変換性を見ると,  $T + T^\dagger - \delta_{GS} V_A$  という組み合わせが  $U(1)_A$  変換の下で不変になっているが, これは Chiral superfield ではないのでモジュライは Superpotential には現れない. 一方で, Kähler potential はこの組み合わせでかける適当な関数  $f(T + T^\dagger - \delta_{GS} V_A)$  を用いて,  $K_T = f(T + T^\dagger - \delta_{GS} V_A)$  と与えられ, これを  $T + T^\dagger$  の周りで展開すると FI-term  $\xi^2 D_A$  が現れる.

$$\int d^2\theta d^2\bar{\theta} f(T + T^\dagger - \delta_{GS} V_A) = \left( -\frac{\delta_{GS} f'}{2} \right) D_A + \dots = \xi^2 D_A + \dots \quad (3.1.5)$$

よって,  $\xi^2 > 0$  であるためには  $\langle f' \rangle < 0$  でなければならない.

ここからは  $U(1)_A$  対称性を持った模型の一般的な性質について議論する. 4次元時空上で  $U(1)_A$  対称性と  $\mathcal{N} = 1$  超対称性を持った理論を考え,  $n_+$  個の正の  $U(1)_A$  charge を持った場  $\Phi_{S_1}, \dots, \Phi_{S_{n_+}}$  と  $n_-$  個の負の  $U(1)_A$  charge を持った場  $\Phi_{Z_1}, \dots, \Phi_{Z_{n_-}}$  を導入する.<sup>10</sup>

	$\Phi_{S_i}$	$\Phi_{Z_j}$
$U(1)_A$	$s_i > 0$	$z_j < 0$

<sup>9</sup>  $k_A$  は Kac-Moody level と呼ばれる定数である.

<sup>10</sup> この節では,  $U(1)_A$  charge が整数の場合だけを考えるものとする. また, 簡単のため  $U(1)_A$  charge が 0 の場は考えない.

以下, 小文字は場の  $U(1)_A$  charge を表すものとし, Superpotential  $W(S_i, Z_j)$  には  $U(1)_A$  対称性と超対称性から許される項は繰り込めないものまで含めて全て  $O(1)$  係数で導入する. ただし, 特に必要な場合を除いて  $O(1)$  係数は省略する. この時, Scalar potential  $V$  は前節で議論したように,

$$V = \sum_X |F_X|^2 + \frac{1}{2} D_A^2 \quad (3.1.6)$$

$$-F_X^* = \frac{\partial W(S_i, Z_j)}{\partial X} \quad (3.1.7)$$

$$D_A = -g \left( \xi^2 + \sum_i s_i |S_i|^2 + \sum_j z_j |Z_j|^2 \right) \quad (3.1.8)$$

となる.  $X = S_i, Z_j$  は  $\Phi_{S_i}, \Phi_{Z_j}$  の Scalar component を表し,  $\xi$  は FI-パラメーターである. [30] 超対称性が破れないためには,

$$\begin{aligned} -F_{S_i}^* &= \frac{\partial W}{\partial S_i} = 0 \\ -F_{Z_j}^* &= \frac{\partial W}{\partial Z_j} = 0 \\ D_A &= -g \left( \xi^2 + \sum_i s_i |S_i|^2 + \sum_j z_j |Z_j|^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

が満たされなければならない.  $-F_{S_i}^* = -F_{Z_j}^* = 0$  は  $2(n_+ + n_-)$  本,  $D = 0$  は 1 本の実数の方程式をそれぞれ与える. ただし, Superpotential  $W(S_i, Z_j)$  はその  $U(1)_A$  不変性から,

$$0 = \delta_{U(1)_A} W = \sum_i s_i S_i \frac{\partial W}{\partial S_i} + \sum_j z_j Z_j \frac{\partial W}{\partial Z_j} \quad (3.1.10)$$

を満たすので, 一般に  $F$  flatness condition のうち 1 つは独立ではなく, (3.1.9) は  $2(n_+ + n_-) - 1$  本の実数の連立方程式に帰着する. まとめると, 解くべき方程式の数と変数の個数は

$$\begin{aligned} \sharp(F, D \text{ flatness condition}) &= 2(n_+ + n_-) - 1 \\ \sharp(\text{変数} : S_i, Z_j) &= 2(n_+ + n_-) \end{aligned}$$

となる.  $F$  及び  $D$  flatness condition の方が変数の数よりも多いので (3.1.9) には一般に解が存在し, 超対称性を持った真空が存在する. またこの時,  $W$  の各項の係数は全て  $O(1)$  だったことから  $F = D = 0$  の解すなわち  $\langle S_i \rangle, \langle Z_j \rangle$  の大きさも  $\sim O(1)$  であると考えられる. (以下, このような各場の期待値が  $O(1)$  の真空を Vacuum-1 と呼ぶことにする.)

### 3.2 超対称性を持つ真空

$n_+$  と  $n_-$  の数が適当にバランスしている時には, この模型は前節の真空とは別の超対称性を破らない真空も持つ. 今から確認するように, この真空は正の  $U(1)_A$  charge を持った場の期待値が 0 のところに存在する. また, この真空を持つような理論は,  $U(1)_A$  charge をうまく決めることで Superpotential 中の相互作用項をコントロール出来るだけでなく, それによって Superpotential 中の有限個の項を考えるだけで各場の期待値を決定することも出来るなどの重要な性質を持つ. [20]



### 3.2.1 真空期待値の決定

前の節で見た  $F$  flatness condition のうち, 正の  $U(1)_A$  charge を持った場の  $F$ -term  $F_{Z_j}$  についてのもとの Superpotential のゲージ変換の式  $\delta_{U(1)_A} W$  は,  $U(1)_A$  対称性から  $S_i$  の 1 次以上の項しか含まないため, 正の  $U(1)_A$  charge を持った全ての場の期待値が 0 の時, すなわち  $\langle S_i \rangle = 0$  for  $\forall i$  の時には自明に満たされる.

$$\begin{aligned} -F_{Z_j}^* &= 0 \\ \delta_{U(1)_A} W &= 0 \end{aligned}$$

したがって, 残っている  $F, D$  flatness condition は,

$$\begin{aligned} -F_{S_i}^* &= \frac{\partial W}{\partial S_i} = 0 \\ D &= -g \left( \xi^2 + \sum_j z_j |Z_j|^2 \right) = 0 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

である. よって, 解くべき方程式の数と変数の個数は一般に

$$\begin{aligned} \#(F, D \text{ flatness condition}) &= 2n_+ + 1 \\ \#(\text{変数} : Z_j) &= 2n_- \end{aligned}$$

であるから, 正の  $U(1)_A$  charge を持った場と負の  $U(1)_A$  charge を持った場の数によって超対称性が破れるか否かが決定することがわかる.

1.  $n_+ \leq n_- - 1 \rightarrow$  超対称性を持った真空があり, 期待値の決まらない場がある
2.  $n_+ = n_- - 1 \rightarrow$  超対称性を持った真空があり, 全ての場の期待値が決定する
3.  $n_+ > n_- - 1 \rightarrow$  (3.2.1) は満たせず超対称性は自発的に破れる

ここからは 2. の場合, つまり正の  $U(1)_A$  charge を持った場の期待値が 0 で, かつ  $n_+ = n_- - 1$  の場合に, (3.2.1) を解くことで負の  $U(1)_A$  charge を持った場の期待値がどのように決まるかを見てみることにする.

まず,  $n_-$  個ある  $Z_i$  の中で最も大きい期待値を持った場を  $Z_{n_-}$  であるとして, これを以下の議論で見やすいように  $\Theta$  と表すにする. また,  $\Theta$  の  $U(1)_A$  charge を  $-1$  に規格化する. このような場  $\Theta$  を Froggatt-Nielsen 場という. [33]

	$\Theta$	$S_i$	$Z_j$
$U(1)_A$	$-1$	$s_i > 0$	$z_j < 0$

$D$  flatness condition から  $\Theta$  の期待値が決定する.

$$D \simeq -g (\xi^2 - |\Theta|^2) = 0 \tag{3.2.2}$$

$$\rightarrow \langle \Theta \rangle = \lambda \Lambda \sim \xi \tag{3.2.3}$$

ここで  $\Lambda$  は Cut-off scale である. 以下, この章では  $\Lambda = 1$  と規格化する. また, 以下の議論では  $0 < \lambda \ll 1$  が必要であるが, 本論文ではそれを仮定しておく. 他の場の真空期待値は  $F$  flatness

condition から決まるが, 今  $\langle S_i \rangle = 0$  なので  $-F_{S_i}^* = \frac{\partial W}{\partial S_i}$  については  $S_i$  の 0 次の項まで ( $W$  としては  $S_i$  の 1 次の項まで) を見れば十分である. つまり, Superpotential には無限個の相互作用項を導入したにも関わらず, 有限個の項を考えるだけで理論の真空が調べられるということが重要である. Superpotential  $W$  の  $S_i$  について 1 次の項は一般に

$$W_{S_i} = \Theta^{s_i} S_i \left( 1 + \sum_j \Theta^{z_j} Z_j + \sum_{k,l} \Theta^{z_k+z_l} Z_k Z_l + \dots \right) \quad (3.2.4)$$

と表せて, したがって超対称性が破れないためには,

$$\begin{aligned} -F_{S_i}^* &= \frac{\partial W_{S_i}}{\partial S_i} = \lambda^{s_i} \left( 1 + \sum_j \lambda^{z_j} Z_j + \sum_{k,l} \lambda^{z_k+z_l} Z_k Z_l + \dots \right) = 0 \\ &\Rightarrow 1 + \sum_j \lambda^{z_j} \langle Z_j \rangle + \sum_{k,l} \lambda^{z_k+z_l} \langle Z_k \rangle \langle Z_l \rangle + \dots = 0 \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

が満たされれば良い.  $F$  flatness condition  $F_{S_i} = 0$  の数は  $n_+$  本, 変数  $Z_i$  の数は  $n_- - 1$  個で, 今  $n_+ = n_- - 1$  なので, (3.2.5) には一般に解が存在し, 各  $\langle Z_j \rangle$  の大きさは

$$-F_{S_i}^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^{z_j} \langle Z_j \rangle \sim O(1) \quad \Rightarrow \quad \langle Z_j \rangle \sim \lambda^{-z_j} \quad (3.2.6)$$

と求まる. また,  $\langle \Theta \rangle > \langle Z_j \rangle$  と  $\lambda \ll 1$  より,  $z_j < -1$  なので FN-場が最も大きい (0 に近い) 負の  $U(1)_A$  charge を持つ場である. 結局, それぞれの場の期待値は

$$\begin{cases} \langle S_i \rangle = 0 \\ \langle Z_j \rangle \sim \lambda^{-z_j} \end{cases} \quad (3.2.7)$$

となる. 最初に述べたように各場の期待値が  $U(1)_A$  charge で決まり,  $F = D = 0$  が満たされ超対称性のある真空が存在することが確認できた. 以下, この  $U(1)_A$  charge 正の場の期待値が 0 の真空を Vacuum-2 と呼ぶことにする.

### 3.2.2 SUSY zero mechanism

Vacuum-2 では, Potential 中に  $U(1)_A$  charge が負になるような相互作用は現れないことを見る. Potential 中の項は一般的に

$$W \ni \Theta^{x+o} X \mathcal{O} \quad (3.2.8)$$

と表せる. ただし  $\mathcal{O}$  は適当な場  $O_i$  の積からなるオペレーター  $\mathcal{O} = \prod_i O_i$  で  $o$  は各  $O_i$  の  $U(1)_A$  charge の和  $o = \sum_i o_i$  である. また,  $X$  は  $U(1)_A$  charge  $x$  を持つ場で,  $o + x \geq 0$  である.  $X$  は  $U(1)_A$  charge の正負に応じて 0 または  $\langle X \rangle \sim \lambda^{-x}$  の期待値を持つから, Vacuum-2 においては,

$$\Theta^{x+o} X \mathcal{O} \xrightarrow{X \rightarrow \langle X \rangle} \lambda^{x+o} \langle X \rangle \mathcal{O} \begin{cases} = 0 & (x > 0) \\ \sim \lambda^o \mathcal{O} & (x < 0) \end{cases} \quad (3.2.9)$$

となって, オペレーター  $\lambda^o \mathcal{O}$  が Potential に現れるのは  $o - |x| \geq 0 \Rightarrow o \geq |x|$  すなわち  $o > 0$  となる場合だけである. このように,  $U(1)_A$  charge の合計が負の相互作用項が禁止される機構は SUSY zero mechanism [34–36] と呼ばれる. 各場の  $U(1)_A$  charge を適切に決めることで, SUSY zero mechanism によって理論に現れる相互作用をコントロールできる. これらが後に述べる自然な大統一模型の構築の際に非常に重要になる.

### 3.3 Metastable vacuum

前節の議論から,  $n_+ = n_- - 1$  の場合に対して正の  $U(1)_A$  charge を持った場が一つ多い, あるいは負の  $U(1)_A$  charge を持った場が1つ少ないとき, すなわち  $n_+ = n_-$  のときには, 一般に  $F$  flatness condition のうち少なくとも1つが満たせず超対称性は自発的に破れる. 以下に述べるようにこの超対称性が破れた真空は準安定である. [20]

先ほどの模型で  $n_+ = n_-$  とし, 最も大きい正の  $U(1)_A$  charge を持った場を  $S_{n_+}$  とする. この時,  $-F_{S_{n_+}}^* = 0$  が満たされないことになる. なぜなら  $-F_{S_{n_+}}^* = 0$  以外の  $F$  flatness condition を全て満たすように場の期待値を決めたときに Scalar potential が最小になるからである. 実際に確認すると, まず以下のように  $S_i$  の  $F$  flatness condition 以外が満たされるように場の期待値を決定した時,

$$-F_{S_{j \neq i}}^* \simeq 0, \quad -F_{S_i}^* \neq 0 \quad (3.3.1)$$

であるが, 一般に  $S_i$  の  $F$ -term は

$$-F_{S_i}^* = \frac{\partial W}{\partial S_i} = \lambda^{s_i} \frac{\partial W}{\partial \tilde{S}_i} \quad (\tilde{S}_i \equiv \lambda^{s_i} S_i) \quad (3.3.2)$$

と書いて, さらに Superpotential の各係数が  $O(1)$  であることによって  $\partial W / \partial \tilde{S}_i \sim O(1)$  であるから, Scalar potential は

$$\begin{aligned} -F_{S_i}^* &\sim \lambda^{s_i} \\ \Rightarrow V &\sim |F_{S_i}^*|^2 \sim \lambda^{2s_i} \end{aligned}$$

となる. 今,  $s_{n_+}$  が最も大きい正の  $U(1)_A$  charge であることと  $\lambda \ll 1$  より,  $i = n_+$  とした時に Scalar potential は最小 ( $V \sim \lambda^{2s_{n_+}}$ ) になるから, ここがこの理論の準安定な真空になる. この真空を Vacuum-3 と呼ぶことにする. 超対称性の破れのスケール  $\Lambda_{SUSY}$  は以下のように与えられる.

$$\Lambda_{SUSY} \sim \frac{F_{S_{n_+}}}{\Lambda} \sim \lambda^{2s_{n_+}} \Lambda \quad (3.3.3)$$

後の節で具体的な模型を使って確認するが, この時一般に各場の期待値は前節で議論した Vacuum-2 に近い値を取る.

$$\begin{cases} \langle S_i \rangle \sim 0 \\ \langle Z_j \rangle \sim \lambda^{-z_j} \ll 1 \end{cases} \quad (\text{at Vacuum-3}) \quad (3.3.4)$$

そのため, SUSY zero mechanism はこの真空の上でも Vacuum-2 の時とほとんど同様にはたらく. 最後に Vacuum-3 の準安定性について議論する. Vacuum-3 における各場の期待値を  $\langle X_i \rangle_3$  とし, Vacuum-1 での各場の期待値を  $\langle X_i \rangle_1$  とする. この後具体的な模型を使って見るように  $\langle X_i \rangle_1 \ll \Lambda$  である. また, 最初に見たように  $\langle X_i \rangle_1 \sim \Lambda$  である. このことと, Superpotential の係数を全て  $O(1)$  で導入したことによって,  $\langle X_i \rangle_3 \rightarrow \langle X_i \rangle_1$  のように期待値を動かすと特殊な Superpotential を考えない限り, 2つの真空の間で  $F_i, D_A \sim O(\Lambda^2)$  の値をとることになる. したがって Vacuum-3 は準安定な真空であると言える.

ここまでの結果をまとめる.

- 一般に,  $U(1)_A$  対称性を持った理論には各場が Cut-off スケール程度の大きさの期待値を持っているような超対称な真空 Vacuum-1 が存在する.
- さらに, 正の  $U(1)_A$  charge を持った場の数  $n_+$  と負の  $U(1)_A$  charge を持った場の数  $n_-$  が  $n_+ = n_- - 1$  の関係にある時, Vacuum-1 に加えて, 正の  $U(1)_A$  charge を持った場の期待値が 0 である超対称な真空 Vacuum-2 が存在する.
- Vacuum-2 を持つ模型があったとき, その模型から  $U(1)_A$  charge 負の場の自由度を減らすか正の場の自由度を増やすことで, 超対称性を自発的に破る準安定な真空 Vacuum-3 を持った模型が構築できる.
- 超対称性の破れのスケールは最も大きい正の  $U(1)_A$  charge の大きさで決まる.

### 3.4 Some Models

今から考える模型には,  $U(1)_A$  charge が  $s$  の Chiral superfield  $\Phi_S$  と  $U(1)_A$  charge が  $-1$  の Chiral superfield  $\Phi_\Theta$  を導入する.

$$\begin{array}{c|c|c} & \Phi_S & \Phi_\Theta \\ \hline U(1)_A & s > 0 & \theta = -1 \end{array}$$

最初に  $U(1)_R$  対称性があるような Superpotential を考える.  $\Phi_S$  と  $\Phi_\Theta$  の  $R$ -charge をそれぞれ 2 と 0 とする. 超対称性と  $U(1)_R$  対称性の下で一般的な Superpotential は次のように書ける.

$$W = aS\Theta^s \quad (3.4.1)$$

$a$  は  $O(1)$  の係数で,  $S, \Theta$  は  $\Phi_S, \Phi_\Theta$  の Scalar component である. Scalar potential と  $F, D$ -term は以下ようになる.

$$\begin{aligned} V &= |F_S|^2 + |F_\Theta|^2 + \frac{1}{2}D^2 \\ -F_S^* &= a\Theta^s \\ -F_\Theta^* &= asS\Theta^{s-1} \\ D_A &= -g \left( \xi^2 - |\Theta|^2 + s|S|^2 \right) \end{aligned}$$

$g$  は  $U(1)_A$  のゲージ結合定数で,  $\xi (\ll 1)$  は FI-パラメーターである.  $D_A = 0$  にするためには  $\langle \Theta \rangle \neq 0$  でなければならないが, そうすると  $F_S \neq 0$  となるので, 全ての  $F, D$  flatness condition を同時に満たすことは出来ず超対称性は自発的に破れる. また, この時  $U(1)_A$  対称性も破れる. Scalar potential を最小にするような  $S$  と  $\Theta$  の期待値は,

$$\langle S \rangle = 0, \quad \langle \Theta \rangle = \lambda \sim \xi \quad (3.4.2)$$

であり,  $F$ -term と  $D$ -term の期待値は,

$$-F_S^* \sim \lambda^s, \quad -F_\Theta^* = 0, \quad D_A \sim \frac{s}{g} \lambda^{2s-2} \quad (3.4.3)$$

となる。\$S\$ が期待値を持つ場合には \$U(1)\_R\$ 対称性が破れるが、\$\Theta\$ が期待値を持っても \$U(1)\_R\$ 対称性は破れないので、この模型では超対称性が破れた後も \$U(1)\_R\$ 対称性が残る。この模型では \$U(1)\_R\$ 対称性によって Superpotential の形が制限されたため、Vacuum-1 が存在しなくなっている。

次に、\$U(1)\_R\$ 対称性を持たないような場合を考える。この時、Superpotential は一般に以下のよう書ける。

$$W = \sum_n a_n (S\Theta^s)^n = W(x), \quad (x \equiv S\Theta^s) \quad (3.4.4)$$

\$a\_n\$ は \$O(1)\$ 係数である。\$F, D\$ flatness condition は次のようになる。

$$\begin{aligned} -F_S^* &= \frac{\partial W}{\partial S} = \frac{\partial W}{\partial x} \Theta^s = 0 \\ -F_\Theta^* &= \frac{\partial W}{\partial \Theta} = \frac{\partial W}{\partial x} s\Theta^{s-1} S = 0 \\ D_A &= -g(\xi^2 - |\Theta|^2 + s|S|^2) = 0 \end{aligned}$$

最初にこの模型が Vacuum-1 を持つことを確認しよう。\$\partial W/\partial x = 0\$ の解を \$x\_0 = \langle S\_0 \rangle \langle \Theta\_0 \rangle^s\$ とすると、

$$\begin{aligned} D_A &= -g \left( \xi^2 - |\langle \Theta_0 \rangle|^2 + s \left| \frac{x_0}{\langle \Theta_0 \rangle^s} \right|^2 \right) = 0 \\ &\Rightarrow \xi^2 - |\langle \Theta_0 \rangle|^2 + s \left| \frac{x_0}{\langle \Theta_0 \rangle^s} \right|^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

となり、\$\langle \Theta\_0 \rangle\$ を適当に選べば (3.4.5) は満たせて、解は \$\langle \Theta\_0 \rangle \sim \sqrt{s} \langle S\_0 \rangle \sim O(1)\$ となる。<sup>11</sup> この模型には Vacuum-1 が存在することが確認できた。

次に、この模型には Vacuum-3 も存在することを示す。ここではまず \$\langle \Theta \rangle = \lambda \sim \xi \ll 1, \langle S \rangle \ll \langle \Theta \rangle\$ という仮定の下、\$S\$ の 3 次以上の項は無視できるものとし、

$$\begin{aligned} W &= a_1 (S\Theta^s) + a_2 (S\Theta^s)^2 \\ \frac{\partial W}{\partial x} &= a_1 + 2a_2 (S\Theta^s) \end{aligned}$$

を用いて計算した後で、最初の仮定が妥当であったか確認する。この時 Scalar potential \$V\$ は

$$V = \left| \frac{\partial W}{\partial x} \right|^2 (\Theta^{2s} + s^2 S^2 \Theta^{2(s-1)}) + \frac{g^2}{2} (\xi^2 - \Theta^2 + sS^2)^2 \quad (3.4.6)$$

となる。\$\partial V/\partial \Theta = \partial V/\partial S = 0\$ から \$V\$ の停留点を具体的に計算すると \$\langle \Theta \rangle = \lambda\$ として、

$$\langle S \rangle \sim \frac{a_2 \langle \Theta \rangle^{s+2}}{a_1 s^2} \sim \frac{1}{s^2} \lambda^{s+2} \quad (3.4.7)$$

$$-F_S^* \sim \lambda^s \quad (3.4.8)$$

$$-F_\Theta^* \sim \lambda^{2s+1} \quad (3.4.9)$$

$$D_A \sim \frac{s}{g} \lambda^{2s-2} \quad (3.4.10)$$

<sup>11</sup>実際に \$\langle \Theta\_0 \rangle\$ と \$\langle S\_0 \rangle\$ を求めると、

$$\begin{aligned} D_A = 0 &\Rightarrow \langle \Theta_0 \rangle^{2(s+1)} (1 - |\xi/\langle \Theta_0 \rangle|^2) = s x_0^2 \\ \therefore s x_0^2 &= s \langle S_0 \rangle^2 \langle \Theta_0 \rangle^{2s} \simeq \langle \Theta_0 \rangle^{2(s+1)} \Rightarrow \langle \Theta_0 \rangle \sim \sqrt{s} \langle S_0 \rangle \end{aligned}$$

となる。ただし、\$\langle \Theta\_0 \rangle \sim 1, \xi \ll 1\$ より、\$1 - |\xi/\langle \Theta\_0 \rangle|^2 \simeq 1\$ とし、真空の \$U(1)\_A\$ 対称性から \$\langle \Theta\_0 \rangle\$ を実にとれることを用いた。また \$\langle \Theta\_0 \rangle \sim O(1)\$ より \$\sqrt{s} \langle S\_0 \rangle \sim O(1)\$ である。

と求まる. 先ほどの模型と違い  $\langle S \rangle \neq 0$  であることが重要である.  $\langle S \rangle$  は  $V$  の  $S$  に関する停留条件から決まるが, 停留条件は結局  $S$  の Tadpole 項の係数と  $S$  の 2 次の項の係数とによって,

$$\langle S \rangle \sim \frac{(S \text{ の Tadpole 項の係数})}{(S \text{ の 2 次の項の係数})}$$

と与えられる.  $U(1)_R$  対称性が無い今の模型では  $|F_S|^2 \ni a_1 a_2 \lambda^{3s} S$  の Tadpole 項が現れたことによって,  $S$  の期待値は 0 ではなくなっている. この Tadpole 項は  $U(1)_R$  対称性を破る項の係数  $a_2$  に比例しており,  $U(1)_R$  対称性が破れていることにもなって現れたことがわかる. また,  $|F_\Theta|^2/|F_S|^2 \ll 1, |D_A|^2/|F_S|^2 \ll 1$  より, 超対称性の破れるスケールは  $F_S$  で決定され,

$$V \sim |F_S|^2 \sim \lambda^{2s} \quad (3.4.11)$$

である. 確かに超対称性の破れるスケールは正の  $U(1)_A$  charge で決まることが確認できた. また  $\delta\Theta \equiv \Theta - \xi$  を定義すれば,

$$\delta\Theta \sim -\frac{s}{2g} \xi^{2s-3} \quad \therefore \left| \frac{\delta\Theta}{\xi} \right| = \frac{s}{2g} \xi^{2s-4} \ll 1 \quad (3.4.12)$$

より,  $\langle \Theta \rangle \sim \xi$  であり,  $S \sim \frac{1}{s^2} \lambda^{s+2} \ll \langle \Theta \rangle$  であるから, 最初の過程は妥当であった.

超対称性の破れにともなう Scalar component の質量への寄与は  $|F_S|^2/gD_A \sim \lambda^2 \ll 1$  より,  $D$ -term からのものが支配的であることがわかる. これは  $F_S$  が最も大きいことによって, Scalar potential の停留条件  $\partial V/\partial\Theta = 0$  を考えた際に,  $F_S$  と  $D_A$  との間に大まかに言って,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial V}{\partial\Theta} &= \frac{\partial F_S^2}{\partial\Theta} + \frac{\partial F_\Theta^2}{\partial\Theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial D_A^2}{\partial\Theta} \\ &\sim \frac{\partial F_S^2}{\partial\Theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial D_A^2}{\partial\Theta} \\ &\sim \frac{F_S}{\Theta} F_S - g\Theta D_A \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

の関係が成り立っていることから理解出来る. ただし, 2 行目では  $\partial F_\Theta^2/\partial\Theta$  を無視し, 3 行目では  $\partial F_S/\partial\Theta \sim F_S/\Theta$  とした.

最後に, この模型と  $U(1)_R$  対称性の関係について述べる. Superpotential から明らかなように, この模型にはそもそも  $U(1)_R$  対称性はない. しかしながら,  $s \gg 1$  の時  $\langle S \rangle$  は非常に小さく, 超対称性が破れている真空では  $U(1)_R$  対称性が近似的に回復していることがわかる. ここまで考えてきた模型はまさに前の章で述べた  $U(1)_R$  対称性を持たず, かつ準安定な真空で超対称性が自発的に破れる模型になっているが, 近似的な  $U(1)_R$  対称性に起因してこのタイプの模型ではゲージノの質量項は非常に小さくなる. このことは後で超対称性が自発的に破れる大統一理論について議論する際に改めて確認し, その後解決策についても議論することにする.

## 4 大統一理論

### 4.1 $SU(5)$ 大統一理論

この章では大統一理論 (Grand Unified Theory, GUT) について簡単なレビューを行う。大統一理論の最初のアイデアは 1974 年に H.Georgi と S.Glashow によって提案された。[4] 最初の模型は標準模型のゲージ群  $(SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y)$ , 以下  $G_{SM}$  と呼ぶ.) をより大きなゲージ群  $(SU(5))$  に埋め込むことによって, 標準模型の  $U(1)_Y$  charge を理論的に説明する (電荷の量子化) とともに, 物質場の統一と, 実験から示唆されるゲージ結合定数の統一を预言する画期的なものであった。一方で, この模型はヒッグス質量の 2 重項 3 重項分離の問題 (Doublet-Triplet splitting problem, DT-splitting problem), 陽子の寿命の問題, 非現実的な Yukawa 結合定数の問題 (Unrealistic Yukawa problem) 等の問題を本質的に含んでいて, これらを解決するような模型の拡張が行われてきた。

### 4.2 ゲージ群の埋め込みと電荷の量子化

まずはじめに, 標準模型のゲージ群が大統一理論のゲージ群にどのように埋め込まれるのか, 物質場はどのように統一されるのかをみるとともに, 電荷の量子化がどのように実現されているのかを確認する。  $SU(5)$  の対称性を持った理論に, 随伴表現の Scalar 場  $\Phi_j^i = (T^a)_j^i \Phi^a$  を導入して以下のようなラグランジアンを考えよう。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\Phi &= \text{Tr} [(D^\mu \Phi) (D_\mu \Phi)] - V(\Phi) \\ V(\Phi) &= -m^2 \text{Tr} [\Phi^2] + \lambda_1 (\text{Tr} [\Phi^2])^2 + \lambda_2 \text{Tr} [\Phi^4]\end{aligned}$$

ただし,  $m^2 > 0$  であり, ここでは簡単のため  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  を仮定する。また,  $g_5$  を  $SU(5)$  のゲージ結合定数として,

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi - ig_5 [v_\mu, \Phi] = \partial_\mu \Phi^a T^a + g_5 f^{abc} v_\mu^b \Phi^c T^a \quad (4.2.1)$$

である。  $V(\Phi)$  が最小になるような  $\Phi$  の期待値を求める。  $\Phi$  はトレースレス  $\text{Tr}[\Phi] = 0$  であり,  $SU(5)$  の対称性を使って一般性を失うことなく対角化できるから,

$$\langle \Phi \rangle = \text{diag}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5), \quad \sum_i v_i = 0 \quad (4.2.2)$$

として計算出来る。 (4.2.2) を  $V(\Phi)$  に代入し, 未定乗数  $l$  をを用いて  $V(\langle \Phi \rangle)$  を

$$V(\langle \Phi \rangle) = -m^2 \sum_i v_i^2 + \lambda_1 \left( \sum_i v_i^2 \right)^2 + \lambda_2 \sum_i v_i^4 - l \sum_i v_i$$

と書き, Lagrange の未定乗数法によって  $V(\Phi)$  の最小値を求める。まず,  $v_i$  と  $l$  に関する微分がゼロでなければならないので,

$$\frac{\partial V}{\partial v_i} = -2m^2 v_i + 4\lambda_1 v_i \sum_j v_j^2 + 4\lambda_2 v_i^3 - l = 0 \quad (4.2.3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial l} = \sum_i v_i = 0 \quad (4.2.4)$$

が得られる。最初の式は  $v_i$  についての3次方程式なので、 $v_i$  について最大3つの解がありうる。そこで  $\langle \Phi \rangle$  を

$$\langle \Phi \rangle = \text{diag}(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{n_1}, \underbrace{x_2, \dots, x_2}_{n_2}, \underbrace{x_3, \dots, x_3}_{n_3}) \quad (4.2.5)$$

のように書く。  $n_1, n_2, n_3$  は同じ値をとる成分の数であり、  $n_1 + n_2 + n_3 = 5$  である。これを (4.2.3) に代入して計算すると、

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

であることがわかる。これと (4.2.4) から得られる  $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = 0$  を用いると、  $V(\langle \Phi \rangle)$  は  $x_1$  だけを用いて、

$$V = -m^2 N_1 x_1^2 + (\lambda_1 N_1^2 + \lambda_2 N_2) x_1^4$$

と書ける。ただし、

$$N_1 = n_1 + \left( \frac{n_3 - n_1}{n_2 - n_3} \right)^2 n_2 + \left( \frac{n_1 - n_2}{n_2 - n_3} \right)^2 n_3$$

$$N_2 = n_1 + \left( \frac{n_3 - n_1}{n_2 - n_3} \right)^4 n_2 + \left( \frac{n_1 - n_2}{n_2 - n_3} \right)^4 n_3$$

である。  $\partial V / \partial x_1 = 0$  より、  $x_1^2 = m^2 N_1 / 2(\lambda_1 N_1^2 + \lambda_2 N_2)$  の時  $V(\Phi)$  は最小値、

$$V(\Phi) = -\frac{m^4}{4} \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 \frac{N_2}{N_1^2}} \quad (4.2.6)$$

をとるから、  $N_2 / N_1^2$  が最小であれば良い。(4.2.5) の期待値は  $n_1, n_2, n_3$  の選び方について対称だから、  $N_2 / N_1^2$  を最小にしうる  $n_1, n_2, n_3$  の組み合わせとしては、

$$(n_1, n_2, n_3) = (4, 1, 0), (3, 2, 0), (3, 1, 1), (2, 2, 1) \quad (4.2.7)$$

を調べれば十分で、実際にこれらを代入すれば  $(n_1, n_2, n_3) = (3, 2, 0)$  の時に  $N_2 / N_1^2$  は最小値  $7/30$  をとる。結局、知りたかった  $\langle \Phi \rangle$  と  $V(\Phi)$  の最小値は、

$$\langle \Phi \rangle = \text{diag} \left( -\frac{1}{3}v, -\frac{1}{3}v, -\frac{1}{3}v, \frac{1}{2}v, \frac{1}{2}v \right), \quad v^2 = \frac{18m^2}{30\lambda_1 + 7\lambda_2} \quad (4.2.8)$$

$$V(\Phi) = -\frac{m^4}{2} \left( \frac{15}{30\lambda_1 + 7\lambda_2} \right) \quad (4.2.9)$$

となる。  $\Phi$  がこのような期待値を持った時、  $SU(5)$  の対称性は  $G_{SM}$  へと破れる。<sup>12</sup>このことは  $SU(5)$  の生成子を具体的に書いてみるとわかりやすい。  $SU(3)_C$  の生成子  $t_C^\alpha$  ( $\alpha = 1 \sim 8$ ) と  $SU(2)_L$  の生成子  $t_L^A$  ( $A = 1, 2, 3$ ) をそれぞれ Gell-Mann 行列  $\lambda^\alpha$  と Pauli 行列  $\sigma^A$  を用いて、

$$t_C^\alpha = \frac{\lambda^\alpha}{2}, \quad t_L^A = \frac{\sigma^A}{2} \quad (4.2.10)$$

と表す。  $SU(5)$  の生成子  $T^a$  ( $a = 1 \sim 24$ ) は、

$$T_C^\alpha = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c|c} \lambda^\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \quad (\alpha = 1 \sim 8), \quad T_L^A = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \sigma^A \end{array} \right) \quad (A = 1, 2, 3) \quad (4.2.11)$$

$$T^0 = \sqrt{\frac{3}{5}} \left( \begin{array}{c|c} -\frac{1}{3}\mathbf{1}_{3 \times 3} & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\mathbf{1}_{2 \times 2} \end{array} \right), \quad T^I = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & 0 \end{array} \right) \quad (I = 1 \sim 12) \quad (4.2.12)$$

<sup>12</sup>ここでは  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  を仮定したため  $\langle \Phi \rangle$  は (4.2.8) になったが、これとは違う仮定のもとでは  $\langle \Phi \rangle$  は一般に異なりうる。



のように書ける.<sup>13</sup> 行列の左上 (右下) ブロックは  $3 \times 3$  ( $2 \times 2$ ) 行列を表し. 右上 (左下) の非対角部分は  $2 \times 3$  ( $3 \times 2$ ) 行列を表す.  $\mathbf{1}_{n \times n}$  は  $n \times n$  の単位行列である.  $T_C^a, T_L^A, T^0$  はそれぞれ  $SU(5)$  の  $SU(3), SU(2), U(1)$  部分群の生成子になる. (4.2.8) の形の  $\langle \Phi \rangle$  はこれらと交換する一方で,  $T^I$  とは交換しないため, 対称性は  $SU(5)$  から  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  へと破れることになる. ここで非常に重要なことは, 標準模型では  $U(1)_Y$  の電荷を手で決めることができたが,  $SU(5)$  に埋め込んだことによってトレースレスの条件がつき, 破れた後に残る  $U(1)_Y$  の電荷の比が自動的に決まっていることである. これが電荷の量子化である.  $SU(5)$  の例で分かるように, 標準模型の  $U(1)_Y$  群をより大きな (非自明な代数を持った) 群に埋め込んだ時,  $U(1)_Y$  charge に条件がつくというのは  $SU(5)$  の模型に限らず一般の大統一理論に共通の性質である. 電荷の量子化が実現出来るという点が大統一理論の最大の利点である.

	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	spin
$q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	3	2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$(u_R)^c \equiv u_L^c$	$\bar{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	
$(d_R)^c \equiv d_L^c$	$\bar{3}$	1	$\frac{1}{3}$	
$l_L = \begin{pmatrix} e_L \\ -\nu_L \end{pmatrix}$	1	$\bar{2}$	$-\frac{1}{2}$	
$(e_R)^c \equiv e_L^c$	1	1	1	
$H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix}$	1	2	$\frac{1}{2}$	0

表 1: 標準模型の物質場とヒッグス場: カイラリティを揃えるために右巻き粒子は荷電共役をとって左巻きとして書いてある.

標準模型の物質場が  $SU(5)$  の表現にどのように埋め込まれるかを見る.  $SU(5)$  の反基本表現  $\bar{\mathbf{5}}$  と反対称表現  $\mathbf{10}$  を  $SU(5)$  の部分群  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  の下で分解し, ( $SU(3)$  の表現,  $SU(2)$  の表現) $_{U(1) \text{ 電荷}}$  のように表すと,

$$\bar{\mathbf{5}} = (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{\frac{1}{3}} \oplus (\mathbf{1}, \bar{\mathbf{2}})_{-\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{10} = (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-\frac{2}{3}} \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{\frac{1}{6}} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})_1 \quad (4.2.13)$$

である. ただし  $U(1)$  電荷は  $SU(3) \times SU(2)$  の下で自明な表現  $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$  のものが 1 になるように規格化した. これと標準模型の物質場, ヒッグス場の  $G_{SM}$  の下での表現をまとめた表 1 を見ると, 標準模型の 1 世代分の物質場は  $SU(5)$  の反基本表現  $\bar{\mathbf{5}}^i$  と反対称表現  $\mathbf{10}_{ij}$  に以下のように埋め込

<sup>13</sup>  $\langle \Phi \rangle$  がどのようになっているかということと対称性の破れ方との関係は生成子の具体的な表示にはよらないが, ここでは見やすさのために表示を選んである.  $T^0$  の具体的な表示は, 他の生成子の表示を決めた後で,

$$[T^a, T^b] = \frac{1}{2} \delta^{ab}, \quad [T^0, T^a] = 0 \quad (a = 1, \dots, 24)$$

となるように決めた. すべての生成子と交換する生成子がなす代数をカルタン部分代数といいカルタン部分代数の次元を群の階数 (Rank) という. 群の階数は生成子の具体的な表示によらないが, 今の表示では  $T_C^a$  のうち 2 つと  $T_L^A$  のうち一つ, および  $T^0$  がカルタン部分代数をなすから  $SU(5)$  の次元は 4 であることがわかる. またこの議論から一般に随伴表現の場の期待値では群の階数を下げるような対称性の破れは実現できないことがわかる.

めることがわかる.

$$(\psi_5)^i = \left( \frac{(d_L^c)_\alpha}{(l_L)_a} \right)^i, (\psi_{10})_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{array}{c|c} \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{(3)} (u_L^c)^\gamma & -(q_L)_{\alpha a} \\ \hline (q_L^t)_{a\alpha} & -\epsilon_{ab}^{(2)} e_L^c \end{array} \right)_{ij} \quad (4.2.14)$$

ただし,  $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$  と  $a, b = 4, 5$  はそれぞれ  $SU(3)$  と  $SU(2)$  の添字,  $\epsilon^{(N)}$  は  $SU(N)$  の不変テンソルである  $N$  階完全反対称テンソル ( $\epsilon_{123}^{(3)} = 1, \epsilon_{45}^{(2)} = 1$ ) で,  $t$  は転置を表す.<sup>14</sup> これで電荷の量子化がうまくいっていることを具体的に確認したければ,  $\psi_5$  と  $\psi_{10}$  の運動項

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}_5 \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_5 &= i (\bar{\psi}_5)_i \gamma^\mu (\partial_\mu (\psi_5)^i + ig_5 (\psi_5)^j (v_\mu)_j^i) \\ i\bar{\psi}_{10} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_{10} &= i (\bar{\psi}_{10})^{ij} \gamma^\mu \left[ \partial_\mu (\psi_{10})_{ij} - ig_5 \left( (v_\mu)_i^k (\psi_{10})_{kj} - (v_\mu)_j^k (\psi_{10})_{ki} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

を展開して  $U(1)$  のゲージ場との相互作用項を確認すれば良い. 標準模型の  $SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$  対称性に対応したゲージボソン  $g_\mu, w_\mu, b_\mu$  と大統一理論において新たに現れるゲージボソン  $x_\mu$  を用いて,  $(v_\mu)_j^i$  は

$$(v_\mu)_j^i = \sum_{a=1}^{24} (T^a)_j^i v_\mu^a = \sum_{\alpha=1}^8 (T_C^\alpha)_j^i g_\mu^\alpha + \sum_{A=1}^3 (T_L^A)_j^i w_\mu^A + (T^0)_j^i b_\mu + \sum_{I=1}^{12} (T^I)_j^i x_\mu^I \quad (4.2.16)$$

と展開出来る. (4.2.15) を展開し,  $b_\mu$  との相互作用項だけを取り出すと,

$$i\bar{\psi}_5 \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_5 \ni \frac{1}{3} g' \bar{d}_L^c \gamma^\mu B_\mu d_L^c + \left( -\frac{1}{2} \right) g' \bar{l}_L \gamma^\mu B_\mu l_L \quad (4.2.17)$$

$$i\bar{\psi}_{10} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_{10} \ni \left( -\frac{2}{3} \right) g' \bar{u}_L^c \gamma^\mu b_\mu u_L^c + \frac{1}{6} g' \bar{q}_L \gamma^\mu b_\mu q_L + g' \bar{e}_L^c \gamma^\mu b_\mu e_L^c \quad (4.2.18)$$

となっていて, 標準模型の  $U(1)$  電荷の比が再現されていることがわかる. ただし,  $g' = \sqrt{3/5} g_5$  と規格化した. (4.2.16) の  $x_\mu$  は標準模型にはない相互作用を媒介する粒子である.  $x_\mu$  は対称性の破れに伴って,

$$\text{Tr} [D^\mu \langle \Phi \rangle D_\mu \langle \Phi \rangle] = g_5^2 \text{Tr} [\langle \Phi \rangle, v^\mu] [v_\mu, \langle \Phi \rangle] = \left( \frac{15g_5}{2\sqrt{2}} v \right)^2 x^\mu x_\mu = M_X^2 x^\mu x_\mu \quad (4.2.19)$$

の質量を得る.  $x_\mu$  は標準模型に無いレプトン  $\leftrightarrow$  クォークの相互作用を媒介し, 陽子崩壊を予言する.  $M_X$  が, ゲージ結合定数の統一するエネルギースケール (GUT スケール, 以下  $\Lambda_{GUT}$  と表す.) であるとして,  $x_\mu$  が媒介する陽子崩壊の主要なモード  $p \rightarrow \pi^0 e^+$  を考えると, 次元解析から陽子の寿命は,

$$\tau(p \rightarrow \pi^0 e^+) \sim \left[ \left( \frac{g_5^2}{\Lambda_{GUT}^2} \right)^2 m_p^4 \right]^{-1} \frac{\hbar}{m_p c^2} \sim 10^{31} \text{ years} \quad (4.2.20)$$

と見積もられる. 繰り込み群の計算により  $\Lambda_{GUT} \sim 10^{15}$  GeV になることと, GUT スケールでのゲージ結合定数の値  $g_5^2/4\pi \sim 1/40$  を用いた.  $m_p$  は陽子の質量 ( $\simeq 1$  GeV) である. この結果は実験による下限値  $\tau_{exp}(p \rightarrow \pi^0 e^+) \gtrsim 10^{34}$  years と合わず, 最も簡単な  $SU(5)$  大統一理論は拡張されなければならないことがわかる.

<sup>14</sup>例えば  $(\psi_{10})_{12} = (u_L^c)_3, (\psi_{10})_{\alpha 4} = -(u_L)_\alpha, (\psi_{10})_{45} = -e_L^c$

### 4.3 Higgs Sector - Doublet-Triplet splitting problem

$SU(5)$  模型には  $SU(5) \rightarrow G_{SM}$  の破れを引き起こすために前の節で見たような随伴表現のヒッグス場が新たに導入される。また、この他に標準模型のヒッグス場  $H_{SM}$  と一緒に  $SU(5)$  の基本表現 **5** に埋め込まれる  $SU(3)$  の 3 表現ヒッグス ((Colored) Triplet Higgs や 3 重項ヒッグス等と呼ばれる。) も導入されなければならない。

$$(\phi_5)_i = \left( \frac{H_C}{H_{SM}} \right)_i, \quad (\Phi)_j^i = (T^a)_j^i \Phi^a \quad (4.3.1)$$

$H_C$  は新たに導入された 3 表現のヒッグス場,  $\Phi$  は随伴表現のヒッグス場である。Scalar potential 部分を書くと以下ようになる。

$$V = V(\phi) + V(\Phi) + V(\phi, \Phi) \quad (4.3.2)$$

$$V(\phi) = m^2 \phi_5^\dagger \phi_5 + \lambda_1 (\phi_5^\dagger \phi_5)^2 \quad (4.3.3)$$

$$V(\Phi) = -M^2 \text{Tr} [\Phi^2] + \lambda_2 (\text{Tr} [\Phi^2])^2 + \lambda_3 \text{Tr} [\Phi^4] \quad (4.3.4)$$

$$V(\phi, \Phi) = \lambda_4 (\phi_5^\dagger \phi_5) \text{Tr} [\Phi^2] + \lambda_5 \phi_5^\dagger \Phi \phi_5 \quad (4.3.5)$$

ただし,  $m^2, M^2 > 0$ ,  $\lambda_i \sim O(1)$  であり, 書かれていない  $SU(5)$  の添字は暗に潰してある。(4.3.4) の Potential を最小にするために  $\Phi$  が期待値を獲得すると,(4.3.5) から  $\phi_5$  の質量項が出てくるから,  $H_C$  と  $H_{SM}$  の質量は以下ようになる。

$$\langle \Phi \rangle = \text{diag}(v/3, v/3, v/3, -v/2, -v/2), \quad \left( v^2 = \frac{18M^2}{30\lambda_2 + 7\lambda_3} \right) \quad (4.3.6)$$

$$m_C^2 = \left( \tilde{m}^2 + \frac{1}{18} (15\lambda_4 + 2\lambda_5) \tilde{v}^2 \right) \Lambda^2 \quad (4.3.7)$$

$$m_{SM}^2 = \left( \tilde{m}^2 + \frac{1}{12} (10\lambda_4 + 3\lambda_5) \tilde{v}^2 \right) \Lambda^2 \quad (4.3.8)$$

上の式では  $m^2, v^2$  を理論の典型的なスケール  $\Lambda$  で規格化 ( $m^2 \equiv \tilde{m}^2 \Lambda^2, v^2 \equiv \tilde{v}^2 \Lambda^2$ ) し,  $\tilde{m}, \tilde{v} \sim O(1)$  とした。ここで例えば  $\Lambda^2 = \Lambda_{GUT}^2 = (10^{15} \text{GeV})^2$  とすると,  $m_{SM}^2 \sim O((10^2 \text{GeV})^2)$  を実現するためには  $\tilde{m}^2$  と  $\lambda_4, \lambda_5$  の間でパラメーターの微調整が実現されていなければならないことになる。これが Doublet-Triplet splitting problem と呼ばれる大統一理論の最も大きな問題の一つである。

### 4.4 Yukawa 相互作用 - Unrealistic Yukawa problem と陽子崩壊

Yukawa 相互作用は以下ようになる。

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = y_{10} \epsilon^{ijklm} \overline{(\psi_{10}^c)_{ij}} (\psi_{10})_{kl} (\phi_5)_m + y_5 \overline{(\psi_5^c)^i} (\psi_{10})_{ij} (\phi_5^\dagger)^j + h.c. \quad (4.4.1)$$

$\phi_5$  が期待値  $\langle \phi_5 \rangle = (0, 0, 0, 0, v')^t$  を獲得した後で, 物質場は以下のような質量を得る。

$$\mathcal{L}_{mass} = -4y_{10}v' (\bar{u}_R)^i (u_L)_i - y_5v' (\bar{d}_R)^i (d_L)_i - y_5v' \bar{e}_R e_L + h.c. \quad (4.4.2)$$

$i$  は  $SU(3)$  の足である。ここからわかるように, この模型ではダウン型クォークと荷電レプトンが  $SU(5)$  の同じ表現に埋め込まれていることに起因して, これらの質量が同じになってしまう。これ

が Unrealistic Yukawa problem である.  $SO(10)$  等より大きなゲージ群を考えると物質場の統一はさらに進み, この問題は大統一理論では一般に避けられない問題である. また, この Yukawa 相互作用からも陽子崩壊を起こすような項が現れる. それは例えば

$$y_{10} \epsilon^{ijklm} \overline{(\psi_{10}^c)_{ij}} (\psi_{10})_{kl} (\phi_5)_m \ni -\sqrt{2} y_{10} (\bar{u}_R)^i (H_C)_i e_L^c \quad (4.4.3)$$

のような Triplet Higgs との相互作用項である. ただし, この模型では Triplet Higgs が媒介する陽子崩壊の崩壊幅は第一世代の非常に小さい Yukawa 結合定数に比例し, さらに Triplet Higgs の質量の逆 4 乗に比例することから Triplet Higgs の質量に与える制限は  $m_C > 10^{12}$  GeV である. 先に見たように, この模型では一般には  $m_C \sim O(\Lambda_{GUT})$  となるから, ここから予言される陽子の寿命は実験の制限にはかからない. しかし次の章で見るように, 超対称大統一理論を考えた場合には Triplet Higgs の超対称パートナー粒子が媒介する陽子崩壊の過程が存在し, この過程は模型により強い制限を与える.

## 5 $SU(5)$ 超対称大統一理論

この章では、超対称性を持たない大統一理論に現れた陽子崩壊を媒介する演算子について超対称性を導入した場合と比較しながら、ここから与えられる超対称大統一模型を構築する上での制限について議論する。

最初にこの模型に現れる場についてまとめる。最も簡単な超対称大統一模型 (SUSY GUT 模型) は、前の章で議論した  $SU(5)$  の大統一模型に超対称性を課したものである。この模型には、標準模型のクォーク及びレプトンを含む場として、先ほどの  $\mathbf{5}$  と  $\mathbf{10}$  表現の Fermion を Component にもつ Chiral superfield  $\Psi_{\mathbf{5}}$  と  $\Psi_{\mathbf{10}}$  を 3 世代分導入する。次にゲージ場を含む  $SU(5)$  の Super field strength  $W_5^\alpha$  が必要である。最後にヒッグス場だが、Superpotential が Chiral superfield の関数でなければならないことから、先ほどの  $\mathbf{5}$  表現のヒッグス場だけでは  $\mathbf{5}$  表現に埋め込まれた場に質量が与えられないため、さらに  $\bar{\mathbf{5}}$  表現のヒッグス場が必要になる。これらと  $\mathbf{24}$  表現のヒッグス場とを合わせて 3 つの Chiral superfield が導入される。これらをそれぞれ  $H_5, H_{\bar{5}}, H_{24}$  と表すことにする。以上を表 2 にまとめた。

$SU(5)$	SM matter	spin 0	spin $\frac{1}{2}$	spin 1	$G_{SM}$
$\Psi_{\mathbf{10}i}$	$Q_i = \begin{pmatrix} U_i \\ D_i \end{pmatrix}$	$\tilde{q}_i = \begin{pmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{d}_i \end{pmatrix}$	$q_i = \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}$		$(3, 2, \frac{1}{6})$
	$U_i^c$	$\tilde{u}_i^c$	$u_i^c$		$(\bar{3}, 1, -\frac{2}{3})$
	$E_i^c$	$\tilde{e}_i^c$	$e_i^c$		$(1, 1, 1)$
$\Psi_{\bar{5}i}$	$D_i^c$	$\tilde{d}_i^c$	$d_i^c$		$(\bar{3}, 1, \frac{1}{3})$
	$L_i = \begin{pmatrix} E_i \\ -N_i \end{pmatrix}$	$l_i = \begin{pmatrix} \tilde{e}_i \\ -\tilde{\nu}_i \end{pmatrix}$	$\tilde{l}_i = \begin{pmatrix} e_i \\ -\nu_i \end{pmatrix}$		$(1, \bar{2}, -\frac{1}{2})$
$SU(5)$	Higgs	spin 0	spin $\frac{1}{2}$	spin 1	
$H_5$	$H_C$	$\tilde{h}_C$	$h_C$		$(3, 1, -\frac{1}{3})$
	$H_u$	$\tilde{h}_u$	$h_u$		$(1, 2, \frac{1}{2})$
$H_{\bar{5}}$	$H_{\bar{C}}$	$\tilde{h}_{\bar{C}}$	$h_{\bar{C}}$		$(\bar{3}, 1, \frac{1}{3})$
	$H_d$	$\tilde{h}_d$	$h_d$		$(1, \bar{2}, -\frac{1}{2})$
$H_{24}$		$\tilde{h}_{24}$	$h_{24}$		
$SU(5)$	Gauge Field	spin 0	spin $\frac{1}{2}$	spin 1	
$W_5^\alpha$	$W_G^\alpha$		$\tilde{g}_\mu$	$g_\mu$	$(8, 1, 0)$
	$W_W^\alpha$		$\tilde{w}_\mu$	$w_\mu$	$(1, 3, 0)$
	$W_Y^\alpha$		$\tilde{b}_\mu$	$b_\mu$	$(1, 1, 0)$
	$W_X^\alpha$		$\tilde{x}_\mu^\dagger + \tilde{x}_\mu$	$x_\mu^\dagger + x_\mu$	$(\bar{3}, 2, \frac{5}{6}) + (3, 2, -\frac{5}{6})$

表 2:  $SU(5)$  超対称大統一模型に導入される場：大文字は Superfield, 小文字はその Component field として表した。"~" 付きの場は Super partner であることを表す。Spin- $\frac{1}{2}$  の場のカイラリティは全て左巻きである。  $i = 1 \sim 3$  は世代を表す。

$SU(5)$  超対称大統一模型の Kähler potential は,

$$\mathcal{K} = \Psi_5^\dagger e^{-V} \Psi_5 + \text{Tr} \left[ \Psi_{10}^\dagger e^V \Psi_{10} \right] + H_5^\dagger e^V H_5 + H_5^\dagger e^{-V} H_5 + \text{Tr} \left[ H_{24}^\dagger e^V H_{24} e^{-V} \right] \quad (5.0.1)$$

である, Superpotential の Yukawa 結合部分は,

$$W_Y = (y_{10})^{ij} \epsilon_{abcde} \Psi_{10_i}^{ab} \Psi_{10_j}^{cd} H_5^e + (y_5)^{ij} \Psi_{5_{ia}} \Psi_{10_j}^{ab} H_{5_b} \quad (5.0.2)$$

である. ただし,  $a, b, c, \dots$  は  $SU(5)$  の足,  $i, j$  は世代の足である.

## 5.1 ゲージ場が媒介する陽子崩壊

前の章で見たように, 破れた対称性のゲージボソン  $x_\mu$  は  $M_X \sim \Lambda_{GUT}$  の質量を持ち, また陽子崩壊を引き起こす相互作用を持つ. 超対称性を導入することで, 大統一のスケールは  $\Lambda_{GUT} \sim 10^{16}$  GeV と超対称性を持たない場合に比べて大きくなる. これにより, この模型での陽子の寿命は

$$\tau(p \rightarrow \pi^0 e^+) \sim 10^{35} \text{ years} \quad (5.1.1)$$

となる. この結果は現在までの実験と矛盾しない. 超対称性を課した模型では大統一のエネルギースケールが大きくなることで, ゲージ場が媒介する陽子崩壊の予言は実験からの制限を回避できるようになる.

## 5.2 Triplet Higgs が媒介する陽子崩壊と Doublet Triplet splitting Problem

超対称大統一模型では (5.0.2) の相互作用から以下のような陽子崩壊を引き起こす次元 5 の有効演算子が現れる.

$$W_5 = \frac{(y_{10})_i (y_5)_j}{m_C} \left[ (V_{CKM})^{jk} \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{(3)} Q_i^\alpha Q_i^\beta Q_j^\gamma L_k + (V_{CKM})^{ij} (V_{CKM}^*)^{kl} \epsilon^{(3)\alpha\beta\gamma} \bar{U}_{i\alpha} \bar{E}_j \bar{U}_{k\beta} \bar{D}_{l\gamma} \right] \quad (5.2.1)$$

$V_{CKM}$  は Cabibbo-Kobayashi-Masukawa 行列 (CKM 行列) であり  $\alpha, \beta, \gamma$  は  $SU(3)$  の足である. これらの有効演算子はいずれも 2 つの Fermion と 2 つの Scalar の相互作用になっており, 直接は陽子崩壊を引き起こさない. しかし, この相互作用を含む超対称粒子が回る陽子崩壊の 1-loop ダイアグラムを書くことができ, それによって陽子崩壊が予言される. [11] 超対称性のない  $SU(5)$  の模型では  $m_C$  の  $-4$  乗に比例していた陽子の崩壊幅は, この模型では  $m_C$  の  $-2$  乗に比例することになり, Triplet Higgs の質量への制限は厳しくなる. 次元 5 の有効演算子は  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{(3)}$  の反対称性から全てのクォーク場が同じ世代になることができず, 始状態と終状態の世代が変わる過程, 特に  $p \rightarrow \bar{\nu} K^+$  が主な崩壊過程になる. ここから陽子の寿命を具体的に計算するためには, 超対称性の破れるエネルギースケール等を決める必要があるが, 実験の制限  $\tau_{exp}(p \rightarrow \bar{\nu} K^+) > 5.9 \times 10^{33}$  years [37] と矛盾しないためには Triplet Higgs の質量に対して  $m_C \gtrsim 10^{16}$  GeV が要求される. [38, 39] このことは, 先に述べた DT-splitting problem が SUSY GUT を考えることでより深刻になることを意味している.

## 6 自然な大統一理論

本研究の最終的な目的はこれまで研究されてきた SUSY GUT 模型, 特に  $SO(10) \times U(1)_A \times Z_2$  SUSY GUT に超対称性の自発的破れを組み込むことであった. この後議論する超対称性の破れを組み込んだ模型の評価をするために, まず  $SO(10) \times U(1)_A \times Z_2$  SUSY GUT 模型についてレビューする. この模型は, 先行研究によって DT-splitting 問題や Yukawa 結合定数の階層性問題等の SUSY GUT の持つ様々な問題を自然に解決することが知られている. [15, 16] ここで言う “自然” の意味は対称性から許される項は繰り込めない高次のものまで含めて全て  $O(1)$  の係数で導入し, パラメーターの微調整を必要としないということである. これは言い換えれば, 理論の対称性とそこに導入する場を適切に決めるだけで SUSY GUT の種々の問題を解決出来るということである. この特徴を実現するために, 3 章で議論した  $U(1)_A$  対称性が大きな役割を果たしている.

### 6.1 $SO(10) \times U(1)_A \times Z_2$ 超対称大統一模型

この模型で導入するヒッグス場と物質場は下の表 3 にまとめた. この模型ではためカットオフスケール  $\Lambda$  が GUT スケール  $\Lambda_{GUT}$  の場合に Gauge 結合定数の統一が実現されるため, 本論文でも  $\Lambda = \Lambda_{GUT}$  とする. ただし, カットオフスケールは 3 章での議論と同様 1 に規格化し, 必要な場合を除いては頭にはかない.

	Negatively charged fields	Positively charged fields	Matter fields
<b>45</b>	$A(a = -1, -)$	$A'(a' = 3, -)$	
<b>16</b>	$C(c = -4, +)$	$C'(c' = 3, -)$	$\Psi_i(\psi_1 = \frac{9}{2}, \psi_2 = \frac{7}{2}, \psi_3 = \frac{3}{2}, +)$
$\overline{16}$	$\bar{C}(\bar{c} = -1, +)$	$\bar{C}'(\bar{c}' = 7, -)$	
<b>10</b>	$H(h = -3, +)$	$H'(h' = 4, -)$	$T(t = \frac{5}{2}, +)$
<b>1</b>	$\Theta(\theta = -1, +),$ $Z(z = -2, -), \bar{Z}(\bar{z} = -2, -)$	$Z'(z' = 5, +)$	

表 3: この模型で導入する場とその表現: 括弧の中の小文字は  $U(1)_A$  charge を表し,  $\pm$  は  $Z_2$  パリティを表す.

$SO(10)$  は以下の二つの群を部分群として含んでいる.

$$SO(10) \supset SU(5) \times U(1)_V \quad (6.1.1)$$

$$SO(10) \supset SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L} \quad (6.1.2)$$

表 3 に現れる各表現をそれぞれの部分群の元で分解すると以下のようなになる.

- $SU(5) \times U(1)_V$  分解

$$45 = 24_0 \oplus 10_4 \oplus \overline{10}_{-4} \oplus 1_0 \quad (6.1.3)$$

$$16 = 10_{-1} \oplus \bar{5}_3 \oplus 1_{-5} \quad (6.1.4)$$

$$\overline{16} = \overline{10}_1 \oplus 5_{-3} \oplus 1_5 \quad (6.1.5)$$

$$10 = 5_2 \oplus \bar{5}_{-2} \quad (6.1.6)$$

- $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$  分解

$$45 = (\mathbf{8}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_0 \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{1})_0 \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3})_0 \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{2})_{-\frac{2}{3}} \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2}, \mathbf{2})_{\frac{2}{3}} \quad (6.1.7)$$

$$\oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_0 \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_{\frac{2}{3}} \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_{-\frac{2}{3}} \quad (6.1.8)$$

$$16 = (\mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{1})_{\frac{1}{3}} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})_{-1} \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{3}} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2})_1 \quad (6.1.9)$$

$$\bar{16} = (\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{2})_{\frac{1}{3}} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1} \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2}, \mathbf{1})_{-\frac{1}{3}} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})_1 \quad (6.1.10)$$

$$10 = (\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_{-\frac{2}{3}} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})_0 \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_{\frac{2}{3}} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2})_0 \quad (6.1.11)$$

これを見ると,  $SO(10)$  の  $16$  表現は先ほどの  $SU(5)$  の模型で見た  $\bar{5}$  表現と  $10$  表現を含んでいる. さらに  $1$  表現を右巻きニュートリノと同定すると, 一つの表現に標準模型の一世代分の全ての物質場が含まれていることがわかる. 物質場は半整数の正の  $U(1)_A$  charge を持つため常に正  $U(1)_A$  charge の場の 2 乗の形でしか現れず,  $F, D$  flatness condition には現れない. この模型で導入されたヒッグス場について簡単に説明しておく. 負の  $U(1)_A$  charge を持つヒッグス場はそれぞれが期待値を得て,  $SO(10) \times U(1)_A$  対称性を  $G_{SM}$  まで破る.  $SO(10)$  の随伴表現  $45$  のヒッグス場  $A$  は  $SO(10)$  を  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$  に破るヒッグス場である.  $SO(10)$  の階数は 5 なので 階数が 4 の  $G_{SM}$  を得るためには階数を一つ落とす必要があるが, 随伴表現のヒッグス場の真空期待値では群の階数を落とせない. そのため, スピノル表現  $16, \bar{16}$  のヒッグス場  $C, \bar{C}$  を導入し, この真空期待値で群の階数を落とす. 基本表現  $10$  のヒッグス場  $H$  は  $SU(5)$  の下で分解すると  $10 = \mathbf{5} \oplus \bar{\mathbf{5}}$  であり, Triplet Higgs と Doublet Higgs のペアを 1 組ずつ含む. この後見るように, この 1 組の Doublet Higgs の真空期待値は決まらず, これが最小超対称標準模型の Doublet Higgs(以下, それぞれ  $H_u, H_d$  と呼ぶことにする.) に対応する.  $\Theta$  は Frogatt-Nielsen 場で,  $U(1)_A$  の  $D$  flatness condition から  $\langle \Theta \rangle = \lambda \sim \xi \ll 1$  の期待値を持つ.<sup>15</sup> これらに対して正の  $U(1)_A$  charge を持つヒッグス場<sup>16</sup> を同数導入することで,  $U(1)_A$  charge が正負の場の数がバランスし, 前の章で見た  $U(1)_A$  charge が負の場だけが期待値を持つ超対称な真空が存在する模型になっている.<sup>17</sup> Superpotential の中で, 場の真空期待値を決定するのに必要な部分を以下のように書いておこう.

$$W = W_{A'} + W_{Z'} + W_{C'} + W_{\bar{C}'} + W_{H'} \quad (6.1.12)$$

ここで,  $W_X$  は  $X$  について 1 次の項を表す.

この模型の  $U(1)_R$  対称性について述べておく. 正の  $U(1)_A$  charge を持った場に  $+2$ , 負の  $U(1)_A$  charge を持った場に  $0$  の  $R$ -charge を割り当てると, Superpotential の (6.1.12) の部分は  $U(1)_R$  対称性を持っている. この模型の真空では正の  $U(1)_A$  charge を持った場は期待値を持たないので, (6.1.12) は各場が期待値を持った後も  $U(1)_R$  対称性を保つ. したがってこの模型において  $U(1)_R$  対称性を破る項は (6.1.12) には含まれていない  $U(1)_A$  charge が正の場の 2 次以上の項であるが, それらの項は  $U(1)_A$  対称性によっていつも  $\langle \Theta \rangle = \lambda \ll 1$  の高次のべきを伴い, 強い Suppression

<sup>15</sup>Yukawa 結合定数の階層性を説明するため, この模型では  $\lambda \simeq 0.22$  である. [15, 16] 本論文でも  $\lambda$  の値が具体的に必要なきときには  $\lambda = 0.22$  を用いることとする.

<sup>16</sup>本論文では正の  $U(1)_A$  charge のヒッグス場は全て ' を付けて書くことにする.

<sup>17</sup>表 3 を見ると負の  $U(1)_A$  charge の場が多いように見えるが, 後で確認するように, この模型に含まれる標準模型のヒッグス場に当たる場の期待値が決まらないことと, ゲージ対称性破れにともなってヒッグス場が NG -boson としてゲージ場に吸収されることを考慮すると  $U(1)_A$  charge が正, 負の場の数はこれでバランスしていることがわかる.



を受ける。例えば  $\lambda^{\bar{c}+a'+c} \bar{C}' A' C$  のような項は,  $\lambda^{\bar{c}+a'+c} \sim 5 \times 10^{-4}$  の Suppression を受ける。他の項も同様である。これによって, この模型の真空には近似的な  $U(1)_R$  対称性が存在する。

### 6.1.1 Dimopoulos Wilczek 型の真空期待値

最初に, 45 表現のヒッグス場  $A'$  の  $F$  flatness condition を考えよう。  $-F_{A'}^* = \partial W_{A'}/\partial A' = 0$  が満たされるように場の期待値を決める。  $A'$  の 1 次の項で対称性から許されるものは,

$$\begin{aligned} W_{A'} &= \alpha \Theta^{a'+a} \text{Tr} [A' A] + \beta \Theta^{a'+3a} \text{Tr} [A' A] \text{Tr} [A^2] + \gamma \Theta^{a'+3a} \text{Tr} [(A' A)_{\mathbf{54}} (A^2)_{\mathbf{54}}] \\ &= \alpha \lambda^{a+a'} \text{Tr} [A' A] + \beta \lambda^{a'+3a} \text{Tr} [A' A] \text{Tr} [A^2] + \gamma \lambda^{a'+3a} \text{Tr} [(A' A)_{\mathbf{54}} (A^2)_{\mathbf{54}}] \quad (\langle \Theta \rangle = \lambda) \end{aligned}$$

である。  $(\dots)_{\mathbf{54}}$  は **45** の積で  $SO(10)$  の **54** 表現を組んだことを表す。  $\alpha, \beta, \gamma$  は  $O(1)$  係数である。他の項は全て SUSY zero mechanism によって禁止されている。  $-F^* = \partial W_{A'}/\partial A' = 0$  を解くことで,  $A$  の期待値が決定する。  $A$  の期待値  $\langle A \rangle$  は  $SO(10)$  の対称性と  $SO(10)$  の  $D$  flatness condition  $[A, A] = 0$  を用いて一般性を失うことなく

$$\langle A \rangle = i\sigma_2 \times \text{diag}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \quad (6.1.13)$$

の形に書いて, これを  $-F_{A'}^* = \partial W_{A'}/\partial A' = 0$  の式に代入すると各  $x_i$  について

$$\lambda^{a'+3a} x_i \left( \alpha \lambda^{-2a} + (2\beta - \frac{1}{5}\gamma) \sum_i x_i^2 + \gamma x_i^2 \right) = 0 \quad (6.1.14)$$

となる。よって, それぞれの  $i$  について  $x_i = 0$  か  $x_i^2 = -\alpha \lambda^{-2a} / (\gamma + N(2\beta - \frac{1}{5}\gamma))$  は (6.1.14) の解になっている。  $N$  は 0 でない  $x_i$  の数である。  $x_1 = x_2 = x_3 = v$  で  $x_4 = x_5 = 0$  の時,  $\langle A \rangle$  は以下のような  $U(1)_{B-L}$  対称性の生成子  $Q_{B-L}$  に比例した形の真空期待値になる。

$$\langle A \rangle = \frac{3}{2} v Q_{B-L} \sim i\sigma^2 \otimes \begin{pmatrix} \lambda^{-a} & & & & \\ & \lambda^{-a} & & & \\ & & \lambda^{-a} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (6.1.15)$$

このことは,  $H' A H$  のような相互作用項からは  $H$  に含まれる場のうち  $U(1)_{B-L}$  charge が 0 でない場の質量項だけが生じることを意味する。すなわち, この期待値は  $H$  に含まれる 2 つの Triplet Higgs の質量項だけを与え, Doublet Higgs の質量項を与えず, これによって Doublet-Triplet splitting が実現される。  $\langle A \rangle \propto Q_{B-L}$  を実現することで Triplet Higgs にのみ質量を与える機構を Dimopolous-Wilczek 機構とか Missing VEV 機構と呼び, この形の期待値を Dimopoulos-Wilczek 型の真空期待値 (DW-VEV) と呼ぶ。 [40–43] はじめに述べたように,  $A$  は  $SO(10)$  を  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$  に破るヒッグス場である。ここで,  $SU(5)$  模型では  $G_{SM}$  を実現するために **24** 表現のヒッグス場の期待値が  $U(1)_Y$  の生成子に比例していたことと, **45** 表現の  $SU(5) \times U(1)_V$  分解を思い出そう。  $SO(10)$  の模型は, **45** に含まれる  $SU(5)$  の **24** にあたる部分が  $U(1)_Y$  の生成子に比例した期待値,  $SU(5)$  の **1** にあたる部分が  $U(1)_V$  の生成子に比例した期待値を持ち, それらの和が  $SO(10)$  が破れた後に残る  $U(1)_{B-L}$  の生成子に比例した形になるという構造を持っている。つまり,  $SU(5)$  の模型に対してゲージ群の階数が一つ大きく, 余分な  $U(1)$

の自由度を持った模型であることが、 $SO(10)$  の模型で DT-splitting 問題を解決出来る本質的な理由であると言える。DW-VEV を実現するためには  $\bar{C}'A'AC$  や  $\bar{C}'A'C$ ,  $\bar{C}'A'ZC$  のような **16,  $\bar{16}$**  表現のヒッグス場と **45** 表現のヒッグス場が結合している項及び  $A'A^{2n+1}$  ( $n > 1$ ) のような **45** 表現のヒッグス場の高次の項が  $W_{A'}$  の中に存在してはならない。この模型ではこれらの項が SUSY zero mechanism で禁止されるように  $U(1)_A$  charge が決められていることでうまく DW-VEV を実現することが出来た。 $SU(2) \times U(1)_{B-L}$  は  $C$  と  $\bar{C}$  の期待値によって破れるため、 $A$  と  $C, \bar{C}$  の相互作用が完全に禁止されていると  $A$  から Pseudo Nambu-Goldstone boson (PNG-boson) が現れてしまうが、この後見るように今の模型ではその問題も回避されている。

$-F_{H'}^* = \partial W_{H'}/\partial H' = 0$  から **10** 表現のヒッグス場  $H$  の期待値が決まる。対称性から許される  $H'$  について 1 次の項と  $F$  flatness condition は、

$$W_{H'} = \lambda^{h'+a+h} H'AH \quad (6.1.16)$$

$$0 = F_{H'}^* = \frac{\partial W_{H'}}{\partial H'} = \lambda^{h'+a+h} AH \quad (6.1.17)$$

である。<sup>18</sup> $\langle A \rangle = \frac{3}{2}vQ_{B-L}$  だったことを思い出すと、 $-F_{H'}^* = 0$  であるためには  $U(1)_{B-L}$  charge が 0 でない場、すなわち  $H$  の Colored Triplet 成分の期待値が 0 であれば良いことがわかる。一方 Doublet 成分については期待値が決まらず真空の平坦な方向として残る。ここでも、 $U(1)_A$  と  $Z_2$ -parity 対称性により  $H^2, H'H, H'ZH, H'\bar{Z}H$  等の項が禁止されていることは重要である。これらの項が存在すると、Doublet Higgs が  $\langle H \rangle \sim \lambda^{-h}$  の期待値を持ってしまい、標準模型が実現できなくなる。

次に、 $W_{Z'}$  について考える。対称性から許される  $Z'$  について 1 次の項と  $F$  flatness condition は、

$$W_{Z'} = \lambda^{z'} Z' (1 + \lambda^{c+\bar{c}}(C\bar{C})) \quad (6.1.18)$$

$$0 = -F_{Z'}^* = \frac{\partial W_{Z'}}{\partial Z'} = \lambda^{z'+c+\bar{c}} (\lambda^{-(c+\bar{c})} + (C\bar{C})) \quad (6.1.19)$$

である。ただし、 $O(1)$  の係数は省略した。(6.1.19) より  $\langle C\bar{C} \rangle \sim \lambda^{-(c+\bar{c})}$  となり、さらに  $SO(10)$  の  $D$  flatness condition も考慮すると  $\langle C \rangle = \langle \bar{C} \rangle$  なので、

$$\langle C \rangle = \langle \bar{C} \rangle \sim \lambda^{-\frac{1}{2}(c+\bar{c})} \quad (6.1.20)$$

と決まる。この時、**16** 表現のヒッグス場  $C, \bar{C}$  のどの成分がこの期待値を持つかは決まっていないが、それは  $\partial W_{C'}/\partial C' = \partial W_{\bar{C}'}/\partial \bar{C}' = 0$  の条件から決まる。

$W_{C'}$  と  $W_{\bar{C}'}$  について考えよう。対称性から許される  $C', \bar{C}'$  について 1 次の項は、

$$W_{C'} = \lambda^{\bar{c}+c'} \bar{C}' (\alpha_1 \lambda^a A + \beta_1 \lambda^{\bar{z}} \bar{Z} + \gamma_1 \lambda^z Z) C' \quad (6.1.21)$$

$$W_{\bar{C}'} = \lambda^{c'+c} C' (\alpha_2 \lambda^a A + \beta_2 \lambda^z Z + \gamma_2 \lambda^{\bar{z}} \bar{Z}) C \quad (6.1.22)$$

<sup>18</sup>実際には  $H'\bar{C}\bar{C}$  が対称性から許されるが、この後の議論で  $\bar{C}$  の期待値を決定すると  $\langle \bar{C} \rangle \langle \bar{C} \rangle = 0$  となって議論は矛盾しないので簡単のためここでは省略する。

である。<sup>19</sup>  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  は  $O(1)$  の係数である。  $C'$  についての  $F$  flatness condition は,

$$0 = -F_{C'}^* = \frac{\partial W_{C'}}{\partial C'} = \lambda^{\bar{c}+c'} \bar{C} \left( \frac{3}{2} \alpha_1 v \lambda^a Q_{B-L} + \beta_1 \lambda^{\bar{z}} \bar{Z} + \gamma_1 \lambda^z Z \right) \quad (6.1.23)$$

である。ただし、  $\langle A \rangle = \frac{3}{2} v Q_{B-L}$  を代入した。  $\bar{C}$  のある成分  $\bar{C}_{i\bar{c}}$  が期待値を持つとすると,

$$\beta_1 \lambda^{\bar{z}} \langle \bar{Z} \rangle + \gamma_1 \lambda^z \langle Z \rangle = -\frac{3}{2} \alpha_1 v \lambda^a Q_{B-L}^{i\bar{c}} \sim -\frac{3}{2} \alpha_1 Q_{B-L}^{i\bar{c}} \quad (6.1.24)$$

であれば良い。ただし、最後の表式には  $v \sim i\sigma^2 \otimes \text{diag}(\lambda^{-a}, \lambda^{-a}, \lambda^{-a}, 0, 0)$  を代入した。また、  $Q_{B-L}^{i\bar{c}}$  は  $\bar{C}_{i\bar{c}}$  の  $U(1)_{B-L}$  charge である。同様に、  $C'$  についての  $F$  flatness condition から,

$$\beta_2 \lambda^{\bar{z}} \langle \bar{Z} \rangle + \gamma_2 \lambda^z \langle Z \rangle \sim -\frac{3}{2} \alpha_2 Q_{B-L}^{i\bar{c}} \quad (6.1.25)$$

が得られる。ここでも、  $Q_{B-L}^{i\bar{c}}$  は  $C$  の期待値を持つ成分  $C_{i\bar{c}}$  の  $U(1)_{B-L}$  charge である。これらの2本の式は  $\langle Z \rangle, \langle \bar{Z} \rangle$  を適当に選べば満たすことができ、係数が  $O(1)$  であることから  $\langle Z \rangle \sim \lambda^{-z}, \langle \bar{Z} \rangle \sim \lambda^{-\bar{z}}$  となる。  $\bar{C}$  は  $\overline{\mathbf{16}}$  表現なので、  $SU(3) \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$  の下で分解した時の  $(1, 1, 2)_{-1}$  に当たる成分だけが0でない真空期待値を持てば、  $SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$  は  $U(1)$  に破れて、ゲージ群のランクは一つ落ちる。また、  $\langle \bar{C} C \rangle \neq 0$  より、  $C_{i\bar{c}}$  は  $C$  の  $(1, 1, 2)_1$  の成分である。以上で、一組の Doublet Higgs を除く全ての場の期待値が決まり、  $F, D$  flatness condition が満たされた。

### 6.1.2 Higgs 場の質量行列と Doublet Triplet splitting

今からヒッグス場の質量行列を具体的に書き下す。まず、  $SO(10)$  の  $\mathbf{16}, \mathbf{45}, \mathbf{10}$  表現を  $SU(5) \times U(1)_V$  の下で分解した時、それぞれの  $SU(5) \times U(1)_V$  の表現に含まれる成分が  $G_{SM}$  の下でどのような表現になっているかを以下に示す。

$$\mathbf{16} = \underbrace{[Q + U^c + E^c]}_{\mathbf{10}_{-1}} + \underbrace{[D^c + L]}_{\mathbf{5}_3} + \underbrace{[N^c]}_{\mathbf{1}_{-5}} \quad (C, C') \quad (6.1.26)$$

$$\mathbf{45} = \underbrace{[G + W + X + \bar{X} + N^c]}_{\mathbf{24}_0} + \underbrace{[Q + U^c + E^c]}_{\mathbf{10}_4} + \underbrace{[\bar{Q} + \bar{U}^c + \bar{E}^c]}_{\mathbf{10}_{-4}} + \underbrace{[N^c]}_{\mathbf{1}_0} \quad (A, A') \quad (6.1.27)$$

$$\mathbf{10} = \underbrace{[\bar{D}^c + \bar{L}]}_{\mathbf{5}_2} + \underbrace{[D^c + L]}_{\mathbf{5}_{-2}} \quad (H, H') \quad (6.1.28)$$

ここで  $Q, U^c, D^c, L, E^c, N^c, X, \bar{X}, G, W$  はそれぞれ  $G_{SM}$  の下で、

$$\begin{aligned} Q &= (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6}, \quad U^c = (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2/3}, \quad E^c = (\mathbf{1}, \mathbf{1})_1 \\ D^c &= (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{1/3}, \quad L = (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1}, \quad N^c = (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0 \\ X &= (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{-5/6}, \quad \bar{X} = (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2})_{5/6}, \quad G = (\mathbf{8}, \mathbf{1})_0, \quad W = (\mathbf{1}, \mathbf{3})_0 \end{aligned}$$

という表現の成分であることを表している。この表記は、例えば  $Q$  成分は標準模型の左巻きクォーク場と同じ量子数であり、  $E^c$  成分は右巻き荷電レプトンの荷電共役と同じ量子数であることを見や

<sup>19</sup>実際には  $\bar{C}' A H \bar{C}$ ,  $C' C H$  も対称性から許されるが、例えば  $\bar{C}' A H \bar{C}$  はこの後の議論で  $\bar{C}$  の期待値を決定すると  $\langle A \rangle \langle H \rangle \langle \bar{C} \rangle = 0$  となって議論は矛盾しないので簡単のためここでは省略する。  $C' C H$  も同様の理由でここでは省略する。

すくするために用いている. 以下ではヒッグス場  $\mathcal{H}$  を  $G_{SM}$  で分解した時の  $I$  成分 ( $I = Q, U^c, \dots$ ) を  $I_{\mathcal{H}}$  と表すことにする. 例えば  $H$  の  $\bar{D}^c$  成分は  $\bar{D}_H^c$  のように書く.

まず  $\mathbf{16}, \overline{\mathbf{16}}, \mathbf{10}$  のヒッグス場に含まれる  $\mathbf{5}$  と  $\overline{\mathbf{5}}$  成分の質量行列を考えるために, Superpotential に含まれる場の 2 次の項を見ていく.  $W_{C'}, W_{\bar{C}'}$  に含まれる  $C, \bar{C}'$  の 2 次の項を見るために,  $W_{C'}, W_{\bar{C}'}$  に  $\langle A \rangle$  と  $\langle Z \rangle, \langle \bar{Z} \rangle$  を代入すると,

$$\begin{aligned} W_{C'} &= \lambda^{\bar{c}+c'} \bar{C} (\alpha_1 \lambda^a A + \beta_1 \lambda^{\bar{z}} \bar{Z} + \gamma_1 \lambda^z Z) C' \\ &= \lambda^{\bar{c}+c'} \alpha_1 \lambda^a v \frac{3}{2} \bar{C} (Q_{B-L} + 1) C' \\ &\sim \frac{3}{2} \lambda^{\bar{c}+c'} \bar{C} (Q_{B-L} + 1) C' \\ W_{\bar{C}'} &= \lambda^{\bar{c}'+c} \bar{C}' (\alpha_2 \lambda^a A + \beta_2 \lambda^z Z + \gamma_2 \lambda^{\bar{z}} \bar{Z}) C \\ &= \lambda^{\bar{c}'+c} \alpha_2 \lambda^a v \frac{3}{2} \bar{C}' (Q_{B-L} - 1) C \\ &\sim \frac{3}{2} \lambda^{\bar{c}'+c} \bar{C}' (Q_{B-L} - 1) C \end{aligned}$$

となる. の他にも  $\mathbf{5}$  と  $\overline{\mathbf{5}}$  成分に質量を与える項をまとめて以下のような関数を定義しよう.<sup>20</sup>

$$\Omega_5 = \Omega_{C'} + \Omega_{\bar{C}'} + \Omega_{H'} + \Omega_{X'^2} \quad (6.1.29)$$

$$\Omega_{C'} = \frac{3}{2} \lambda^{\bar{c}+c'} \bar{C} (Q_{B-L} + 1) C' \quad (6.1.30)$$

$$\Omega_{\bar{C}'} = \frac{3}{2} \lambda^{\bar{c}'+c} \bar{C}' (Q_{B-L} - 1) C + \lambda^{\bar{c}'+a+h+\bar{c}} \bar{C}' A H \bar{C} \quad (6.1.31)$$

$$\Omega_{H'} = \lambda^{h'} H' (\lambda^{a+h} A H + \lambda^{2\bar{c}} \bar{C} \bar{C}) \quad (6.1.32)$$

$$\Omega_{X'^2} = \lambda^{2h'} H' H' + \lambda^{\bar{c}'+\bar{c}+h'} \bar{C}' \bar{C} H' + \lambda^{\bar{c}'+c'} \bar{C}' C' + \lambda^{c'+c+h'} C' C H' \quad (6.1.33)$$

$\Omega_{X'^2}$  以外は  $U(1)_A$  charge が正の場の 1 次の項である. これを場  $I_C, I_{\bar{C}}, \dots$  で 2 回微分して期待値を代入すると質量行列が得られる.  $\Omega_5$  から質量行列を求めると,  $I = D^c, L$  として  $\mathbf{5}$  と  $\overline{\mathbf{5}}$  成分の質量行列は,

$$M_I = \begin{matrix} & I_H & I_{H'} & I_C & I_{C'} \\ \begin{matrix} \bar{I}_H \\ \bar{I}_{H'} \\ \bar{I}_{\bar{C}} \\ \bar{I}_{\bar{C}'} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{h+h'+a} \langle A \rangle & 0 & 0 \\ \lambda^{h+h'+a} \langle A \rangle & \lambda^{2h'} & 0 & \lambda^{h'+c'+c} \langle C \rangle \\ 0 & \lambda^{h'+2\bar{c}} \langle \bar{C} \rangle & 0 & \lambda^{\bar{c}+c'} \beta_I \\ \lambda^{\bar{c}'+\bar{c}+h-\frac{1}{2}(c+\bar{c})} & \lambda^{h'+\bar{c}'+\bar{c}} \langle \bar{C} \rangle & \lambda^{c+\bar{c}'} \beta_I & \lambda^{c'+\bar{c}'} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (6.1.34)$$

となる. ここで,  $Q_{B-L}^I$  を成分  $I$  の  $U(1)_{B-L}$  charge として,  $\beta_I = \frac{3}{2}(Q_{B-L}^I - 1)$  を用いて書いた.  $M_{D^c}$  では  $\langle A \rangle \sim \lambda^{-a}$ ,  $\beta_{D^c} = -2$ ,  $M_L$  では  $\langle A \rangle = 0$ ,  $\beta_L = -3$  である. また  $\langle C \rangle = \langle \bar{C} \rangle \sim \lambda^{-\frac{1}{2}(c+\bar{c})}$  なので,

$$M_{D^c} = \begin{matrix} & D_H^c & D_{H'}^c & D_C^c & D_{C'}^c \\ \begin{matrix} \bar{D}_H^c \\ \bar{D}_{H'}^c \\ \bar{D}_{\bar{C}}^c \\ \bar{D}_{\bar{C}'}^c \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{h+h'} & 0 & 0 \\ \lambda^{h+h'} & \lambda^{2h'} & 0 & \lambda^{h'+c'+\frac{1}{2}(c-\bar{c})} \\ 0 & \lambda^{h'+\bar{c}-\frac{1}{2}(c-\bar{c})} & 0 & -2\lambda^{\bar{c}+c'} \\ \lambda^{\bar{c}'+h-\frac{1}{2}(c-\bar{c})} & \lambda^{h'+\bar{c}'+\frac{1}{2}(c-\bar{c})} & -2\lambda^{c+\bar{c}'} & \lambda^{c'+\bar{c}'} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (6.1.35)$$

<sup>20</sup> $O(1)$  係数は省略している.

$$M_L = \begin{matrix} & L_H & L_{H'} & L_C & L_{C'} \\ \bar{L}_H & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{L}_{H'} & 0 & \lambda^{2h'} & 0 & \lambda^{h'+c'+\frac{1}{2}(c-\bar{c})} \\ \bar{L}_{\bar{C}} & 0 & \lambda^{h'+\bar{c}-\frac{1}{2}(c-\bar{c})} & 0 & -3\lambda^{\bar{c}+c'} \\ \bar{L}_{\bar{C}'} & \lambda^{\bar{c}+h-\frac{1}{2}(c-\bar{c})} & \lambda^{h'+\bar{c}'-\frac{1}{2}(c-\bar{c})} & -3\lambda^{c+c'} & \lambda^{c'+\bar{c}'} \end{matrix} \quad (6.1.36)$$

である。\$M\_{D^c}\$ の rank は 4 なので 4 つの Triplet Higgs はいずれも質量を持つ。\$D\_H^c, D\_{H'}^c\$ の質量は \$m\_{D\_H^c}^2, m\_{D\_{H'}^c}^2 \sim \lambda^{h+h'}\$ で、\$D\_C^c, D\_{\bar{C}}^c\$ の質量は \$m\_{D\_C^c}^2, m\_{D\_{\bar{C}}^c}^2 \sim -2\lambda^{\frac{1}{2}(c+c'+\bar{c}+c')}\$ である。一方で \$M\_L\$ の rank は 3 なので、4 組の Doublet Higgs のうち 1 組は質量を持たない。Doublet Higgs の 0 質量 mode \$L\_{H\_0}\$ は \$H\$ と \$C\$ の \$L\$ 成分が混合した、

$$L_{H_0} \sim L_H + \lambda^{h-c-\frac{1}{2}(c-\bar{c})} L_C \quad (6.1.37)$$

となる。またこの時 Triplet Higgs の有効質量は、

$$1/M_C^{eff} \sim \lambda^{2(h'+h)} \lambda^{2h'} / \lambda^{4(h'+h)} = 1/\lambda^{2h} \quad (6.1.38)$$

となる。\$h < 0\$ より \$M\_C^{eff} > \Lambda\$ なので Triplet Higgs を媒介した陽子崩壊は十分抑制されていることがわかる。

次に **16**,  $\overline{\mathbf{16}}$ , **45** のヒッグス場に含まれる **10** と  $\overline{\mathbf{10}}$  成分の質量行列を考えよう。先ほどと同様に質量行列を与える関数 \$\Omega\_{10}\$ を定義する。

$$\Omega_{10} = \Omega_{A'} + \Omega_{\bar{C}'} + \Omega_{Y'^2} \quad (6.1.39)$$

$$\Omega_{A'} = \lambda^{a+a'} A' A \quad (6.1.40)$$

$$\Omega_{C'} = \frac{3}{2} \lambda^{\bar{c}+c'} \bar{C} (Q_{B-L} + 1) C' + \lambda^{\bar{c}+a+c'} \bar{C} A C' \quad (6.1.41)$$

$$\Omega_{\bar{C}'} = \frac{3}{2} \lambda^{\bar{c}'+c} \bar{C}' (Q_{B-L} - 1) C + \lambda^{\bar{c}'+a+c} \bar{C}' A C \quad (6.1.42)$$

$$\Omega_{Y'^2} = \lambda^{2a'} A' A' + \lambda^{c'+\bar{c}} C' \bar{C}' + \lambda^{\bar{c}+a'+c'} \bar{C} A' C' + \lambda^{\bar{c}'+a'+c} \bar{C}' A' C \quad (6.1.43)$$

\$I = Q, U^c, E^c\$ として、**10** と  $\overline{\mathbf{10}}$  成分の質量行列は、

$$M_I = \begin{matrix} & I_A & I_{A'} & I_C & I_{C'} \\ \bar{I}_A & 0 & \lambda^{a'+a} \alpha_I & 0 & \lambda^{\bar{c}+c'+a} \langle \bar{C} \rangle \\ \bar{I}_{A'} & \lambda^{a'+a} \alpha_I & \lambda^{2a'} & 0 & \lambda^{\bar{c}+c'+a'} \langle \bar{C} \rangle \\ \bar{I}_{\bar{C}} & 0 & 0 & 0 & \lambda^{\bar{c}+c'} \beta_I \\ \bar{I}_{\bar{C}'} & \lambda^{c'+\bar{c}+a} \langle C \rangle & \lambda^{\bar{c}+c'+a'} \langle C \rangle & \lambda^{c'+\bar{c}} \beta_I & \lambda^{c'+\bar{c}'} \end{matrix} \quad (6.1.44)$$

で与えられる。\$\alpha\_I\$ は \$I\$ によって決まる係数である。2 つある **45** 表現のヒッグス場 \$A, A'\$ には \$Q, U^c\$ とその共役 \$\bar{Q}, \bar{U}^c\$ 成分が 1 組ずつ含まれる。そのうち 1 組は \$SO(10) \to SU(3) \times SU(2)\_R \times SU(2)\_L \times U(1)\_{B-L}\$ の破れにともない NG-boson としてゲージ場に吸収される。そのため、\$\bar{Q}\_{A'} Q\_A\$ のような質量項は組めず、\$I = Q, U^c\$ に対して \$\alpha\_Q = \alpha\_{U^c} = 0\$ である。\$I = E^c\$ に対しては \$\alpha\_{E^c} \sim O(1)\$ である。\$I\_C, I\_{\bar{C}}, I\_{C'}, I\_{\bar{C}'}\$ については \$\beta\_Q = -1, \beta\_{U^c} = -2, \beta\_{E^c} = 0\$ で、これは \$E^c\$ 成分

が  $SU(2)_R \times U(1)_{B-L} \rightarrow U(1)$  の破れで現れる NG-boson であることと対応する.

$$M_Q = \begin{matrix} & Q_A & Q_{A'} & Q_C & Q_{C'} \\ \begin{matrix} \bar{Q}_A \\ \bar{Q}_{A'} \\ \bar{Q}_{\bar{C}} \\ \bar{Q}_{\bar{C}'} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^{c'+a-\frac{1}{2}(c-\bar{c})} \\ 0 & \lambda^{2a'} & 0 & \lambda^{c'+a'-\frac{1}{2}(c-\bar{c})} \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^{\bar{c}+c'} \\ \lambda^{\bar{c}'+a+\frac{1}{2}(c-\bar{c})} & \lambda^{\bar{c}'+a'-\frac{1}{2}(c-\bar{c})} & -\lambda^{c+\bar{c}'} & \lambda^{c'+\bar{c}'} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (6.1.45)$$

$$M_{U^c} = \begin{matrix} & U_A^c & U_{A'}^c & U_C^c & U_{C'}^c \\ \begin{matrix} \bar{U}_A^c \\ \bar{U}_{A'}^c \\ \bar{U}_{\bar{C}}^c \\ \bar{U}_{\bar{C}'}^c \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^{c'+a-\frac{1}{2}(c-\bar{c})} \\ 0 & \lambda^{2a'} & 0 & \lambda^{c'+a'-\frac{1}{2}(c-\bar{c})} \\ 0 & 0 & 0 & -2\lambda^{\bar{c}+c'} \\ \lambda^{\bar{c}'+a+\frac{1}{2}(c-\bar{c})} & \lambda^{\bar{c}'+a'-\frac{1}{2}(c-\bar{c})} & -2\lambda^{c+\bar{c}'} & \lambda^{c'+\bar{c}'} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (6.1.46)$$

$$M_{E^c} = \begin{matrix} & E_A^c & E_{A'}^c & E_C^c & E_{C'}^c \\ \begin{matrix} \bar{E}_A^c \\ \bar{E}_{A'}^c \\ \bar{E}_{\bar{C}}^c \\ \bar{E}_{\bar{C}'}^c \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{a'+a}\alpha_{E^c} & 0 & \lambda^{c'+a-\frac{1}{2}(c-\bar{c})} \\ \lambda^{a'+a}\alpha_{E^c} & \lambda^{2a'} & 0 & \lambda^{c'+a'-\frac{1}{2}(c-\bar{c})} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^{\bar{c}'+a+\frac{1}{2}(c-\bar{c})} & \lambda^{\bar{c}'+a'-\frac{1}{2}(c-\bar{c})} & 0 & \lambda^{c'+\bar{c}'} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (6.1.47)$$

結局,  $I = Q, U^c, E^c$  のいずれに対しても質量行列の rank は 3 であり, NG-boson に対応した 0 質量の成分が 1 つ現れることがわかる. これらはゲージ場に吸収され, 残った 3 つの場は  $Q, U^c$  成分については  $(\lambda^{c+\bar{c}'}, \lambda^{c'+\bar{c}}, \lambda^{2a'})$ ,  $E^c$  成分については  $(\lambda^{a+a'}, \lambda^{a+a'}, \lambda^{c'+\bar{c}'})$  の質量を得る. ここで,  $\lambda^{c'+\bar{c}'}$  の質量を持つ  $E^c$  成分の Super partner はこの模型で最も軽い  $R$ -parity 奇の粒子である. 次に, **45** 表現のヒッグス場  $A, A'$  の  $G, X, \bar{X}, W$  成分について見る. これらの成分は  $A$  および  $A'$  にそれぞれ 1 つずつ含まれる.  $I = G, X, W$  としてこれらの質量行列は

$$M_I = \begin{matrix} & I_A & I_{A'} \\ \begin{matrix} \bar{I}_A \\ \bar{I}_{A'} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \alpha_I \lambda^{a+a'} \\ \alpha_I \lambda^{a+a'} & \lambda^{2a'} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (6.1.48)$$

で与えられる. ここで 2 組の  $X, \bar{X}$  のうち 1 組は NG boson となって Gauge 場に吸収されるから,  $\alpha_X = 0$  である. もう 1 組の  $X, \bar{X}$  は  $\lambda^{2a'}$  の質量を得る. また, 全ての  $G, W$  成分は  $\lambda^{a+a'}$  の質量を得る. 最後に  $SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)_{Y\text{singlet}}$  の成分  $N^c$  が **16** 表現と **45** 表現のヒッグス場に含まれるものを合わせて 8 つ存在するが, **45** 表現のヒッグス場  $A$  に含まれる 1 自由度分は NG-boson としてゲージ場に吸収され, その他は質量を得ている.

## 6.2 Yukawa 行列

4 章で述べたように, 大統一理論では物質場がゲージ群の同じ表現に埋め込まれていることに起因して, Yukawa 結合定数に非現実的な関係が付く. 最も簡単な  $SO(10)$  の模型では全ての物質場が  $SO(10)$  の **16** 表現に埋め込まれているため大統一のエネルギースケールではアップ型クォーク, ダウン型クォーク, 荷電レプトンの Yukawa 結合定数が  $Y_u = Y_d = Y_e$  の関係を持つ. 現実的な

模型を構築する上では、この関係を壊すような機構が必要になる。この模型では、物質場の相互作用項に、

$$W_{\bar{5}} = \lambda^{t+c+\psi_i} TC\Psi_i + \lambda^{2t} T^2 \quad (6.2.1)$$

の項が存在することによって、標準模型のダウン型クォークと荷電レプトンは  $SO(10)$  の **16** 表現と **10** 表現の中の  $\bar{5}$  表現が混合したものに含まれることになる。ただし (6.2.1) では  $O(1)$  係数を省略した。この後の議論でも  $O(1)$  係数は省略してある。また、表記が煩雑になるのを避ける為、以下では  $\Psi_i$  と  $T$  に含まれる **5** や  $\bar{5}$  表現の成分を  $\mathbf{5}_i, \bar{\mathbf{5}}_i$  や  $\mathbf{5}_T, \bar{\mathbf{5}}_T$  等と表すことにする。  $W_{\bar{5}}$  から、 $\bar{5}$  表現の場の質量行列は、

$$\mathbf{5}_T \left( \lambda^{\psi_1+t+c} \langle C \rangle, \lambda^{\psi_2+t+c} \langle C \rangle, \lambda^{\psi_3+t+c} \langle C \rangle, \lambda^{2t} \right) \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{5}}_1 \\ \bar{\mathbf{5}}_2 \\ \bar{\mathbf{5}}_3 \\ \bar{\mathbf{5}}_T \end{pmatrix} \quad (6.2.2)$$

で与えられ、この模型では質量0モードが

$$(\mathbf{5}_1^0, \mathbf{5}_2^0, \mathbf{5}_3^0) \sim (\bar{\mathbf{5}}_1 + \lambda^{\psi_1-\psi_3} \bar{\mathbf{5}}_3, \bar{\mathbf{5}}_T + \lambda^\Delta \bar{\mathbf{5}}_3, \mathbf{5}_2 + \lambda^{\psi_2-\psi_3} \mathbf{5}_3) \quad (6.2.3)$$

となる。ただし、 $\Delta \equiv 2t - (\psi_3 + t + c - (c + \bar{c})/2)$  とした。<sup>21</sup> Yukawa 行列は、

$$\lambda^{\psi_i+\psi_j+h} \Psi_i \Psi_j H \quad (6.2.4)$$

から得られる。(6.2.4) を  $SO(10)$  の表現を用いて表すと、

$$\lambda^{\psi_i+\psi_j+h} \mathbf{10}_i \mathbf{10}_j \mathbf{5}_H + \lambda^{\psi_i+\psi_j+h} \mathbf{10}_i (V \bar{\mathbf{5}}^0)_j \bar{\mathbf{5}}_H \quad (6.2.5)$$

である。ここで  $V$  は (6.2.3) の混合を反映して現れる混合行列で、

$$V \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda^{\psi_1-\psi_3} & \lambda^\Delta & \lambda^{\psi_2-\psi_3} \end{pmatrix} \quad (6.2.6)$$

である。  $Y_u^{ij} \sim \lambda^{\psi_i+\psi_j+h}$ ,  $Y_d^{ij} \sim \lambda^{\psi_i+\psi_k+h} V^{kj}$  より、アップ型クォークの Yukawa 行列  $Y_u$  とダウン型クォークの Yukawa 行列  $Y_d$  はそれぞれ、

$$Y_u \sim \begin{pmatrix} \lambda^6 & \lambda^5 & \lambda^3 \\ \lambda^5 & \lambda^4 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y_d \sim \begin{pmatrix} \lambda^6 & \lambda^{5.5} & \lambda^5 \\ \lambda^5 & \lambda^{4.5} & \lambda^4 \\ \lambda^3 & \lambda^{2.5} & \lambda^2 \end{pmatrix} \quad (6.2.7)$$

となる。<sup>22</sup>ただし、この模型での  $\Delta$  の値  $\Delta = 2.5$  を用いた。Yukawa 行列にはさらに、**45** 表現のヒッグス場  $A$  との相互作用、 $\lambda^{\psi_i+\psi_j+2a+h} \Psi_i A^2 \Psi_j H$  等からの寄与がある。前の節で述べたように  $\langle A \rangle$  は  $U(1)_{B-L}$  charge に比例しており、ダウン型クォークと荷電レプトンに異なる寄与を与えるから、この寄与まで考慮すると現実的な Yukawa 行列の構造を再現することができる。 [15, 16]

<sup>21</sup>  $\lambda^\Delta = \lambda^{2t}/\lambda^{\psi_3+t+c} \langle C \rangle$  であり、 $\lambda^\Delta$  は (6.2.2) の質量行列の第3成分と第4成分の比を表している。表 3 より、 $\Delta > 0$  である。  $\Delta < 0$  では、 $\Psi_3$  と  $T$  との混合は現れない。

<sup>22</sup> 前の節で述べたように、Doublet Higgs の質量0モードは (6.1.37) のように  $C$  の成分と混合しているため、厳密には  $\lambda^{t+c+\psi_i} TC\Psi_i$  から  $\lambda^{\psi_i+\psi_j+h} \Psi_i \Psi_j H$  と同じオーダーで Yukawa 行列への寄与がある。

### 6.3 Higgsino の質量

前節で述べたように, この模型では **10** 表現のヒッグス場  $H$  の質量項<sup>23</sup>  $\lambda^{2h} H^2$  が禁止されているために, このヒッグス場に含まれる 1 組の Dublet Higgs の Scalar component  $H_u, H_d$  は質量を持たず, 超対称性が破れない限りこれらの Super partner(ヒッグシーノ, 以下  $\tilde{H}_u, \tilde{H}_d$  と表す.) も質量を持たない. よって現実的な模型を構築する上では, ヒッグシーノに質量を与える機構が必要になる. この節では文献 [44] に基づきこの機構について簡単に述べる. この模型では, ヒッグシーノは超対称性の破れによって質量を獲得する. 以下で具体的に見ていこう.  $U(1)_A$  charge  $\tilde{s} < 0$  を持つ場  $\tilde{S}$  と  $\tilde{s}' > 0$  を持つ場  $\tilde{S}'$  を新たに導入する. ただし,  $\tilde{S}, \tilde{S}'$  はどちらも  $SO(10)$  の下で **1** 表現であり,  $\tilde{s} + \tilde{s}' \geq 0$ ,  $\tilde{s}' + 2h \geq 0$  とする.  $\tilde{S}'$  について 1 次の項は以下ようになる.<sup>24</sup>

$$W_{\tilde{S}'} = \lambda^{\tilde{s}'} \tilde{S}' + \lambda^{\tilde{s}'+\tilde{s}} \tilde{S}' \tilde{S} + \lambda^{\tilde{s}'+2h} \tilde{S}' H^2 \quad (6.3.1)$$

ただし  $O(1)$  の係数は省略した.  $F$  flatness condition と Scalar potential  $V_{SUSY}$  は以下ようになる.<sup>25</sup>

$$-F_{\tilde{S}'}^* = \lambda^{\tilde{s}'} + \lambda^{\tilde{s}'+\tilde{s}} \tilde{S} + \lambda^{\tilde{s}'+2h} H^2 = 0 \quad (6.3.2)$$

$$-F_{\tilde{S}}^* = \lambda^{\tilde{s}'+\tilde{s}} \tilde{S}' = 0 \quad (6.3.3)$$

$$-F_H^* = 2\lambda^{\tilde{s}'+2h} \tilde{S}' H = 0 \quad (6.3.4)$$

$$V_{SUSY} = \left| \frac{\partial W_{\tilde{S}'}}{\partial \tilde{S}'} \right|^2 + \left| \frac{\partial W_{\tilde{S}'}}{\partial \tilde{S}} \right|^2 + \left| \frac{\partial W_{\tilde{S}'}}{\partial H} \right|^2 \quad (6.3.5)$$

6 章 1 節の議論と同様正の  $U(1)_A$  charge を持った場の期待値を 0, すなわち  $\langle \tilde{S}' \rangle = 0$  とした時, (6.3.2) 以外は満たされる. (6.3.2) の解としては  $\langle H \rangle = 0$  と  $\langle H \rangle \neq 0$  の場合が考えられるが, 後者の場合は標準模型が実現されないの, 以下では常に  $\langle H \rangle = 0$  として議論する. (6.3.2) から,  $\langle \tilde{S} \rangle \sim \lambda^{-\tilde{s}}$  である. 今考えている模型とは別のセクターで超対称性が破れた時, Scalar potential は以下ようになる.

$$V = V_{SUSY} + V_{\tilde{S}\tilde{S}'} \quad (6.3.6)$$

$$V_{\tilde{S}\tilde{S}'} = m_{\tilde{S}'}^2 |\tilde{S}'|^2 + m_{\tilde{S}}^2 |\tilde{S}|^2 + m_H^2 |H|^2 + \left[ \lambda^{\tilde{s}'} A_{\tilde{S}'\tilde{S}'} \tilde{S}' + \lambda^{\tilde{s}'+\tilde{s}} A_{\tilde{S}'\tilde{S}} \tilde{S}' \tilde{S} + \lambda^{\tilde{s}'+2h} A_{\tilde{S}'H^2} \tilde{S}' H^2 + h.c. \right] \quad (6.3.7)$$

ここで,  $m_X$  ( $X = \tilde{S}', \tilde{S}, H$ ) 及び,  $A_Y$  ( $Y = \tilde{S}', \tilde{S}'\tilde{S}, \tilde{S}'H^2$ ) はそれぞれ超対称性の破れによって現れるパラメーターである. それぞれの大きさは超対称性の破れのオーダーパラメーター (以下では  $m_{SB}$  と表す) 程度であると仮定する.<sup>26</sup> 超対称性はカットオフスケール  $\Lambda$  に対して十分低いエネルギースケールで破れているものとし  $m_{SB} \ll \Lambda$  を用いて議論する. Scalar potential の停留条

<sup>23</sup> 最小超対称標準模型では, 超対称性を破らないヒッグスの質量項をパラメーター  $\mu$  を用いて  $\mu H_u H_d$  と表す場合が多く, この項を  $\mu$ -term と呼ぶ.

<sup>24</sup> 厳密には  $\tilde{S}'$  の 1 次の項として  $\tilde{S}$  や  $H^2$  以外を含む項も対称性からは許されるが, それらを含めたとしても 6 章 1 節の議論にしたがって他の場の期待値を決定した場合以下の議論は変わらないからこの節ではそれらを無視する.

<sup>25</sup> Scalar potential にも,  $\tilde{S}', \tilde{S}, H$  以外の場を含んだ項が当然あるが, 以下の議論はそれらを含めても本質的には変わらないので, ここでは考えない.

<sup>26</sup> この仮定が正しいかどうか及び  $m_{SB}$  の大きさは超対称性が破れる機構の詳細による. また各  $A_Y$  の質量次元は 1 に規格化されたカットオフスケール  $\Lambda$  で適当に合わせてあることに注意が必要である.  $\Lambda$  をあらわに書けば, 例えば  $A_{\tilde{S}'} \sim O(m_{SB}\Lambda^2)$  である.



件は以下のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \tilde{S}'} &= -F_{\tilde{S}'} \lambda^{\tilde{s}'+\tilde{s}} - 4\lambda^{2\tilde{s}'+4h} \tilde{S}'^* |H|^2 \\ &\quad + m_{\tilde{S}'}^2 \tilde{S}'^* + \lambda^{\tilde{s}'} A_{\tilde{S}'} + \lambda^{\tilde{s}'+\tilde{s}} A_{\tilde{S}'\tilde{S}} \tilde{S} + \lambda^{\tilde{s}'+2h} A_{\tilde{S}'H^2} H^2 = 0 \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{S}} = -F_{\tilde{S}} \lambda^{\tilde{s}'+\tilde{s}} + m_{\tilde{S}}^2 \tilde{S}^* + \lambda^{\tilde{s}'+\tilde{s}} A_{\tilde{S}'\tilde{S}} \tilde{S}' = 0 \quad (6.3.9)$$

$$\frac{\partial V}{\partial H} = -2F_{\tilde{S}'} \lambda^{\tilde{s}'+2h} H + 4\lambda^{2\tilde{s}'+4h} |\tilde{S}'|^2 H + m_H^2 H^* + 2\lambda^{\tilde{s}'+2h} A_{\tilde{S}'H^2} \tilde{S}' H = 0 \quad (6.3.10)$$

先に述べたように  $\langle H \rangle = 0$  を要求すると, (6.3.10) は常に満たされる. (6.3.9) から, 超対称性の破れによって  $F_{\tilde{S}'}$  の期待値が 0 ではなくなることがわかり, その値は,

$$\langle F_{\tilde{S}'} \rangle = \lambda^{-\tilde{s}'-\tilde{s}} m_{\tilde{S}}^2 \langle \tilde{S}^* \rangle + A_{\tilde{S}'\tilde{S}} \langle \tilde{S}' \rangle \quad (6.3.11)$$

となる. また, 超対称性の破れによって,  $\tilde{S}'$  と  $\tilde{S}$  の期待値も先ほどの値 ( $\langle \tilde{S}' \rangle = 0, \langle \tilde{S} \rangle \sim \lambda^{-\tilde{s}}$ ) からずれる. 特に  $\langle \tilde{S}' \rangle \neq 0$  となることで  $W_{\tilde{S}'} \ni \lambda^{\tilde{s}'+2h} \tilde{S}' H^2 \rightarrow \lambda^{\tilde{s}'+2h} \langle \tilde{S}' \rangle H^2$  となり, ヒッグシーノの質量項が生じる. この期待値のずれの大きさは高々  $m_{SB}$  のオーダーであるから, 以下ではこれを展開のパラメーターとして  $\langle \tilde{S}' \rangle$  と  $\langle \tilde{S} \rangle$  を,

$$\langle \tilde{S}' \rangle = \tilde{S}'_0 + \tilde{S}'_1 + \dots \quad (6.3.12)$$

$$\langle \tilde{S} \rangle = \tilde{S}_0 + \tilde{S}_1 + \dots \quad (6.3.13)$$

と展開し, (6.3.8) を解くことで  $\tilde{S}'$  の期待値を求める.  $\tilde{S}'_0 = 0, \tilde{S}_0 \sim \lambda^{-\tilde{s}}$  である. 上の期待値を (6.3.8) に代入することで,  $\tilde{S}'_1$  について,

$$\begin{aligned} \tilde{S}'_1 &\sim \frac{\lambda^{\tilde{s}'} A_{\tilde{S}'} + \lambda^{\tilde{s}'+\tilde{s}} A_{\tilde{S}'\tilde{S}} \tilde{S}_0}{\lambda^{2\tilde{s}'+2\tilde{s}}} \\ &\sim \frac{\lambda^{\tilde{s}'} A_{\tilde{S}'} + \lambda^{\tilde{s}'} A_{\tilde{S}'\tilde{S}}}{\lambda^{2\tilde{s}'+2\tilde{s}}} \\ &\sim \lambda^{-\tilde{s}'-2\tilde{s}} m_{SB} \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

が得られるからヒッグシーノの質量  $\mu$  は,

$$\mu = \lambda^{\tilde{s}'+2h} \langle \tilde{S}' \rangle \sim \lambda^{2h-2\tilde{s}} m_{SB} \quad (6.3.15)$$

となる. よって,  $h \simeq \tilde{s}$  ならばヒッグシーノの質量は超対称性のオーダーパラメーターと同じ程度の大きさになる. 最後に超対称性の破れによって現れる  $H_u, H_d$  に質量を与える部分をまとめると,

$$V = |F_{\tilde{S}'}|^2 + |F_H|^2 + m_H^2 |H|^2 + \lambda^{\tilde{s}'+2h} A_{\tilde{S}'H^2} \tilde{S}' H^2 + \dots \quad (6.3.16)$$

$$\rightarrow \lambda^{\tilde{s}'+2h} F_{\tilde{S}'} H^2 + 4\mu^2 |H|^2 + m_H^2 |H|^2 + A_{\tilde{S}'H^2} \mu H^2 + \dots \quad (6.3.17)$$

となる. (6.3.17) の初項と第4項は  $H_u$  と  $H_d$  が混合する質量項になっている. このような質量を  $\mu$  で規格化されたパラメーター  $B$  を用いて  $B\mu$  と表すことにする. 最初の仮定  $m_X, A_Y \sim O(m_{SB})$  から,  $A_{\tilde{S}'H^2} \mu \sim m_{SB} \mu$  である. さらに, (6.3.11), (6.3.14) 及び (6.3.15) から,

$$\lambda^{\tilde{s}'+2h} F_{\tilde{S}'} \sim \lambda^{2h-2\tilde{s}} m_{\tilde{S}}^2 + A_{\tilde{S}'\tilde{S}} \mu \sim m_{SB} \mu \quad (6.3.18)$$

であるから, 結局,

$$B\mu = \lambda^{\tilde{s}'+2h} F_{\tilde{S}'} + A_{\tilde{S}'H^2} \mu \sim m_{SB} \mu \quad (6.3.19)$$

である. ここで  $F_{\tilde{S}'}$  が, したがって  $B\mu$  が超対称性の破れによって現れる  $\tilde{S}$  の質量  $m_{\tilde{S}}$  に依存している点は, 後に具体的な超対称性の破れの機構を議論する際に重要になる.

## 7 超対称性が自発的に破れる自然な超対称大統一理論

この章では,6章でレビューした超対称大統一模型に超対称性の破れを組み込んだ模型を考える. [45] 3章での議論を思い出せば, 6章の模型から  $U(1)_A$  charge が負の場の自由度を 1 自由度分減らすこと, すなわち  $SO(10)$  singlet のヒッグス場  $\bar{Z}$  を減らすことが超対称性を自発的に破るための最も Minimal な拡張である. 実際, 6章での期待値を決定する議論を思い出せば  $\bar{Z}$  が存在しない時には  $F_{C'} = 0$  か  $F_{\bar{C}'} = 0$  のどちらかが満たせなくなる. この模型では, 超対称性が破れるスケール  $\Lambda_{SUSY}$  は,

$$\Lambda_{SUSY} \sim \frac{-F_{C'}^*}{\Lambda} \sim \lambda^{\bar{c}'+\frac{1}{2}(c-\bar{c})} \Lambda \sim 2 \times 10^{13} \text{ GeV}$$

となる.<sup>27</sup> このスケールは電弱スケールに対して高くこのままではヒッグス粒子の質量に関する Fine-tuning 問題を生じるため, 超対称性の破れるスケールを下げることを考えたい. このスケールは  $\bar{c}'$  を大きくすることで下げられるが, 各場  $U(1)_A$  charge が Superpotential の相互作用項をうまくコントロールしていたことを思い出すと,  $U(1)_A$  charge を変更することで DT-splitting などが実現できなくなってしまうことが考えられる. 特に,  $\bar{c}'$  を大きくした際に  $\bar{C}'$  の 1 次の項として  $H^2$  を含んでいる  $\bar{C}'AH^2C$  の項が許されると  $\langle H \rangle \sim \lambda^{-h}$  とすることで超対称性の破れない真空が現れてしまうから  $\bar{c}'$  は  $\bar{c}' + a + 2h + c > 0$  の範囲でしか大きくできない.

### 7.1 超対称性の破れるスケールと $Z'_2$ パリティ対称性

ここでは新たな  $Z_2$  パリティ対称性によってこの項を禁止し  $\bar{c}'$  を大きくすることを考える. すなわち, 新たなパリティ対称性  $Z'_2$  を導入して, その下で  $\bar{C}'$  が奇のパリティを持ち, 他の場が偶のパリティを持てばこの項は禁止されることになる. ただし, そうしただけでは  $\bar{C}'$  の 1 次の項が全て禁止されてしまい  $W_{\bar{C}'} = 0$  となるので, 新たに  $U(1)_A$  charge が正と負の  $SO(10)$  singlet を一つずつ導入する必要がある. 以上をまとめると, 今から考える模型は以下の表 4 のものになる.

	Negatively charged fields	Positively charged fields	Matter fields
<b>45</b>	$A(a = -1, -, +)$	$A'(a' = 3, -, +)$	
<b>16</b>	$C(c = -4, +, +)$	$C'(c' = 3, -, +)$	$\Psi_i(\psi_1 = \frac{9}{2}, \psi_2 = \frac{7}{2}, \psi_3 = \frac{3}{2}, +, +)$
<b><math>\bar{16}</math></b>	$\bar{C}(\bar{c} = -1, +, +)$	$\bar{C}'(\bar{c}', -, -)$	
<b>10</b>	$H(h = -3, +, +)$	$H'(h' = 4, -, +)$	$T(t = \frac{5}{2}, +, +)$
<b>1</b>	$\Theta(\theta = -1, +, +),$ $Z(z = -2, -, +)$	$Z'(z' = 5, +, +)$	
<b>1</b>	$S(s < 0, +, -)$	$S'(s' > 0, +, +)$	

表 4: この模型で導入する場とその表現: 括弧の中の小文字は  $U(1)_A$  charge を表し, 一つ目と二つ目の  $\pm$  は  $Z_2$  と  $Z'_2$  パリティを表す.  $S, S'$  が新たに導入された Singlet の場である.

このような模型を考えることで, 超対称性の破れるスケールが下げられる. 実際にどの程度下げられるのかを具体的に見ていく.  $Z'_2$  を導入したことで,  $\bar{C}'$  の 1 次の項として  $H^2$  を含んでいる

<sup>27</sup>  $\Lambda = \Lambda_{GUT} \sim 2 \times 10^{16}$  とした. 以下ではずっと  $\Lambda$  としてこの値を用いる.

項は  $\bar{C}'AH^2CS$  の形でしか許されなくなる。これが禁止されるためには、

$$\bar{c}' + a + 2h + c + s = (\bar{c}' - |s|) + a + 2h + c < 0 \quad (7.1.1)$$

であれば良いから、 $\bar{c}'$  は  $|s|$  だけ大きくできる。ただし  $|s|$  は任意に選べるわけではなくこの後見るような条件が付く。

この模型では、前の模型に対して新たに  $U(1)_A$  charge 正の場の 1 次の項として Superpotential に  $W_{S'}$  が加わり、さらに  $W_{Z'}, W_{C'}, W_{\bar{C}'}$  が変更を受ける。この時  $W_{S'}$  が  $S'H^2$  を含むとやはり  $\langle H \rangle \sim \lambda^{-h} > \Lambda$  となってしまうので  $s' + 2h < 0$  でなければならない。また、以下に見るように  $F_{\bar{C}'} \neq 0$  の真空で超対称性が自発的に破れるためには  $W_{S'}$  が  $S'S^2$  を含んでいる必要があるから  $s' + 2s \geq 0$  でなければならない。これらの条件を満たす  $U(1)_A$  charge として  $s' = 4, s = -2$  が可能である。実際に確認すると、まずこのように決めた  $U(1)_A$  charge の下で  $W_{Z'}, W_{S'}$  は以下のようなになる。

$$W_{Z'} = \lambda^{z'} Z' (\alpha_{Z'1} + \alpha_{Z'2} \lambda^{c+\bar{c}} (C\bar{C}) + \alpha_{Z'3} \lambda^{2s} S^2) \quad (7.1.2)$$

$$W_{S'} = \lambda^{s'} S' (\beta_{S'1} + \beta_{S'2} \lambda^{2s} S^2) \quad (7.1.3)$$

$\alpha_{Z'i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\beta_{S'i}$  ( $i = 1, 2$ ) は  $O(1)$  係数である。  $-F_{S'}^* = \partial W_{S'} / \partial S' = 0$  から  $S$  の期待値は、

$$\langle S \rangle = \sqrt{\frac{\beta_{S'1}}{\beta_{S'2}}} \lambda^{-s} \sim \lambda^{-s} \quad (7.1.4)$$

と決まる。すると、 $W_{Z'}$  は、

$$W_{Z'} = \lambda^{z'} Z' (\alpha'_{1Z'} + \alpha_{2Z'} \lambda^{c+\bar{c}} (C\bar{C})) \quad (7.1.5)$$

$$\alpha'_{1Z'} \equiv \alpha_{1Z'} + \alpha_{3Z'} \lambda^{2s} \langle S \rangle^2 \sim O(1) \quad (7.1.6)$$

となるので、  $-F_{Z'}^* = \partial W_{Z'} / \partial Z' = 0$  より  $C, \bar{C}$  の期待値は

$$\langle C \rangle = \langle \bar{C} \rangle \sim \lambda^{-\frac{1}{2}(c+\bar{c})} \quad (7.1.7)$$

と決まる。もし  $S'S^2$  の項が禁止されていると、  $W_{S'} = \lambda^{s'} S'$  なので  $-F_{S'}^* = \lambda^{s'}$  が超対称性の破れるスケールになる。この時  $W_{C'}, W_{\bar{C}'}$  は

$$W_{C'} = \lambda^{\bar{c}+c'} \bar{C}' (\alpha_{C'} \lambda^a A + \beta_{C'} \lambda^z Z) C' \quad (7.1.8)$$

$$W_{\bar{C}'} = \lambda^{\bar{c}'+c+s} \bar{C}' S (\alpha_{\bar{C}'} \lambda^a A + \beta_{\bar{C}'} \lambda^z Z) C \quad (7.1.9)$$

である。  $\alpha_X, \beta_X$  ( $X = C', \bar{C}'$ ) は  $O(1)$  係数である。  $-F_{C'}^* = \partial W_{C'} / \partial C' = 0$  を満たすように  $\langle Z \rangle, \langle \bar{C} \rangle$  を決めると、  $\lambda^s \langle S \rangle (\alpha_{\bar{C}'} \lambda^a \langle A \rangle + \beta_{\bar{C}'} \lambda^z \langle Z \rangle) \sim O(1)$  より、

$$-F_{\bar{C}'}^* = \frac{\partial W_{\bar{C}'}}{\partial \bar{C}'} \sim \lambda^{\bar{c}'+\frac{1}{2}(c-\bar{c})} \quad (7.1.10)$$

となる。これで、 $\bar{c}'$  は  $|s| = 2$  だけ大きくすることができ、超対称性の破れるスケールが下げられることがわかる。さらに新しい  $Z_2$  パリティ対称性を課し新しい  $SO(10)$  singlet を導入すれば同じ議論を繰り返すことができる。すなわち、まず  $Z_2$  対称性を  $n$  個課し、その下で  $\bar{C}'$  が全て奇の変換性を持つとする。そこへ  $i$  番目の  $Z_2$  の下でだけ奇の変換性を持つ  $U(1)_A$  charge が  $-2$  の Singlet  $S_i$  とそれに対応する  $U(1)_A$  charge が  $4$  の  $S'_i$  を  $n$  個導入すれば、 $\bar{c}'$  は  $2n$  下げられる。ただし、この模型でも  $\bar{c}'$  を大きくするにつれて  $U(1)_R$  対称性破れは小さくなる。このことは超対称性の破れるエネルギースケールを下げるにつれてゲージノの質量が小さくなることを意味している。

## 7.2 ゲージノの質量

この模型においてゲージノの質量項に直接寄与する部分は Superpotential の高次の項から,

$$\int d^2\theta \left(\frac{\Theta}{\Lambda}\right)^{\bar{c}+c} \left(\frac{\bar{C}'C}{\Lambda^2}\right) W^\alpha W_\alpha \ni \lambda^{\bar{c}+c} \frac{\langle F_{\bar{C}'} \rangle}{\Lambda^2} \langle C \rangle \tilde{G}\tilde{G} = m_{1/2} \tilde{G}\tilde{G} \quad (7.2.1)$$

のように現れる.  $W^\alpha$  は Super fieldstrength,  $\tilde{G}$  はゲージノを表す. しかしながら今  $\bar{c} = 18$  などとすると,

$$\langle F_{\bar{C}'} \rangle \sim \lambda^{\bar{c}+\frac{1}{2}(c-\bar{c})} \Lambda^2, \quad \langle C \rangle \sim \lambda^{-\frac{1}{2}(c+\bar{c})} \Lambda \quad (7.2.2)$$

より,

$$m_{1/2} \sim \lambda^{2\bar{c}-\bar{c}+c} \Lambda \simeq 7 \times 10^{-1} \text{GeV} \quad (7.2.3)$$

となって, 非常に小さい質量しか与えない. また, この時  $\Lambda_{SUSY}^2 \sim F_{\bar{C}'} \sim O((100\text{TeV})^2)$  である. 他にゲージノの質量に寄与する効果として Anomaly mediation によってゲージノが質量を得るシナリオを考えてみる. このシナリオではゲージノはグラビティーノとの相互作用を通して質量を得るが, グラビティーノの質量  $m_{3/2}$  の質量とゲージノの質量は超対称性の破れるスケール  $\Lambda_{SUSY} \sim F_{\bar{C}'}/\Lambda$  に対して,

$$m_{3/2} \sim \frac{F_{\bar{C}'}}{\sqrt{3}M_{Pl}}, \quad m_{a1/2} = \frac{\beta(g_a)}{g_a} m_{3/2} = \frac{\alpha_a}{4\pi} b_a m_{3/2} \quad (7.2.4)$$

と与えられる.  $\beta(g_a)$  はゲージ結合定数  $g_a$  の  $\beta$ -関数  $\beta(g_a) = \frac{1}{16\pi^2} b_a g_a^3$  で, 超対称最小標準模型では  $SU(3), SU(2), U(1)$  のゲージ結合定数  $g_3, g_2, g_1$  に対して  $(b_3, b_2, b_1) = (-3, 1, 33/5)$  である. また  $\alpha_a \equiv \frac{g_a^2}{4\pi}$  を定義した. グラビティーノの質量は超対称性の破れるスケールに対して  $\Lambda/M_{Pl} \sim 10^{-2}$  小さく, ゲージノの質量はそれよりもさらに  $\alpha_a/4\pi \sim 10^{-2}$  小さくなっているから, 例えば  $m_{1/2} \sim O(1\text{TeV})$  とすると  $F_{\bar{C}'} \sim O((10^4\text{TeV})^2)$  となり, 超対称性の破れるスケールが高くなってしまう.

## 8 超重力理論の効果

この章では,  $U(1)_A$  対称性を持ち超対称性が自発的に破れる理論において超重力理論の効果 gauge boson の質量にどのように寄与するかを見る. 8章1節以下の内容は副論文 [46] に基づいている.

最初に簡単な例で大域的な超対称性を持った理論と局所的な超対称性を持った理論 (超重力理論) の違いについて議論する.  $U(1)$  charge を持った場  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$  が重力と結合しているとする. この時, Scalar potential は

$$V = e^{\frac{K}{M_{Pl}^2}} \left( g^{ij*} (D_j W)^* (D_i W) - 3 \frac{W^* W}{M_{Pl}^2} \right) + \frac{1}{2} D^2 \quad (8.0.1)$$

で与えられる. ただし  $M_{Pl}$  は  $G$  を Newton 定数として  $M_{Pl} \equiv \sqrt{\frac{1}{8\pi G}}$  で定義される Reduced Plank scale である.  $K$  は Kähler potential,  $W$  は Superpotential,  $D$  は  $U(1)$  の Vector superfield の  $D$ -term であり, 場による微分を

$$D_i W \equiv \frac{\partial W}{\partial \phi^i} + \frac{1}{M_{Pl}^2} K_i W \quad (8.0.2)$$

$$K_i \equiv \frac{\partial K}{\partial \phi^i} \quad (8.0.3)$$

と定義した.  $\phi_i$  は  $\Phi_i$  の Scalar component である. また  $g^{ij*}$  は

$$g^{ij*} \equiv \frac{\partial^2 K}{\partial \phi_i \partial \phi_j^*} \quad (8.0.4)$$

で定義される Kähler 計量である. 今,  $\Phi_S$  の  $F$ -term の期待値  $\langle F_S \rangle$  が 0 でないことによって超対称性が破れているとし, Kähler potential が Canonical であることを仮定する.<sup>28</sup> この時, 宇宙項が非常に小さい, すなわち真空のエネルギーが非常に小さくなければならないという条件から,

$$V = |\langle F_S \rangle|^2 - 3 \frac{|c|^2}{M_{Pl}^2} \simeq 0 \quad (8.0.5)$$

であることが言える.<sup>29</sup>  $c$  は Superpotential の定数項である. 前章の議論でも述べたように超対称性を破る  $F$ -term の期待値  $\langle F_S \rangle$  はグラビティーノに  $m_{3/2} = F_S / \sqrt{3} M_{Pl}$  の質量を与えることを思い出すと Superpotential の定数項とグラビティーノの質量との間に  $m_{3/2} \simeq c / M_{Pl}^2$  の関係が成り立つことがわかる. このように, 大域的な超対称性を考えている限りでは意味を持たなかった Superpotential の定数項は超重力理論の枠組みではグラビティーノの質量と関係し大きな役割を持つことがわかる. それだけでなく, この定数項は Superpotential の  $U(1)_R$  対称性を完全に破っているから, 超重力理論の効果は gauge boson の質量に大きな寄与を与えることが期待出来る. 以下では  $U(1)_A$  対称性を持つ具体的な模型を使ってこの効果を見ていく.

<sup>28</sup>  $g^{ij*} = \delta^{ij*}$  を意味する.

<sup>29</sup> 宇宙項の大きさは  $\Lambda_{cc} \sim 10^{-120} M_{Pl}^4$  である. 本論文の議論ではこれを 0 であるとして計算を行う.

## 8.1 Simplest model

ここでは、3章の3節で議論した模型と同様  $U(1)_A$  charge が  $s(> 0)$  の Chiral superfield  $S$  と  $-1$  の Chiral superfield  $\Theta$  を導入する。また、Kähler potential は Canonical であるとする。Superpotential を

$$W = \sum_{n=0} a_n (S\Theta^s)^n = \sum_{n=0} a_n x^n \quad (x \equiv S\Theta^s) \quad (8.1.1)$$

とした時、Scalar potential は

$$V = V_F + V_D \quad (8.1.2)$$

$$V_F = e^{K/M_{Pl}^2} \left( (D_S W)^* (D_S W) + (D_\Theta W)^* (D_\Theta W) - 3 \frac{W^* W}{M_{Pl}^2} \right) \quad (8.1.3)$$

$$V_D = \frac{1}{2} D^2 \quad (8.1.4)$$

となる。ここで、 $K, D_S W, D_\Theta W, D$  等はそれぞれ、

$$K = S^* S + \Theta^* \Theta \quad (8.1.5)$$

$$D_S W = \frac{\partial W}{\partial S} + \frac{1}{M_{Pl}^2} S^* W = \Theta^s \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{M_{Pl}^2} S^* W \quad (8.1.6)$$

$$D_\Theta W = \frac{\partial W}{\partial \Theta} + \frac{1}{M_{Pl}^2} \Theta^* W = s \Theta^{s-1} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{M_{Pl}^2} \Theta^* W \quad (8.1.7)$$

$$D = -g (\xi^2 - \Theta^* \Theta + s S^* S) \quad (8.1.8)$$

である。この時、宇宙項を 0 にする条件から、

$$\langle W \rangle \sim a_0 \sim \lambda^s M_{Pl} \quad (8.1.9)$$

が求まり、グラビティーノの質量は、 $m_{3/2} = \langle W \rangle / M_{Pl}^2 \sim \lambda^s / M_{Pl}$  となる。<sup>30</sup> また、それぞれの場の期待値は

$$\langle \Theta \rangle = \lambda \sim \xi, \quad \langle S \rangle \sim \frac{\lambda^2}{s} \frac{\Lambda}{M_{Pl}} \quad (8.1.10)$$

となる。 $S$  を  $S = S_r e^{i \frac{\phi_S}{\sqrt{2} \langle S \rangle}}$  のように動径方向と位相方向に分解すると、それぞれの質量は、

$$m_{S_r} \sim \frac{sm_{3/2}}{\lambda} \frac{M_{Pl}}{\Lambda}, \quad m_{\phi_S} \sim \frac{sm_{3/2}}{\lambda} \frac{M_{Pl}}{\Lambda} \quad (8.1.11)$$

である。

$D_S W, D_\Theta W, D$  の期待値は、

$$\langle D_S W \rangle \sim \lambda^s, \quad \langle D_\Theta W \rangle \sim \lambda^{s+1} \frac{\Lambda}{M_{Pl}}, \quad \langle D \rangle \sim \frac{s}{g} \lambda^{2s-2} \quad (8.1.12)$$

となる。<sup>32</sup>

<sup>30</sup>以下ではカットオフスケール  $\Lambda$  を 1 に規格化し特に必要な場合を除いては頭に書かない。また、以下の計算では6章の議論と同様  $\lambda$  の値は  $\lambda = 0.22$  としている。

<sup>31</sup>この章の計算の詳細は付録 A を参照

<sup>32</sup>今、 $F_S = (K_{S\bar{S}})^{-1} D_{\bar{S}} W = D_S W$  であり、超対称性の破れるエネルギースケールは  $\frac{D_S W}{\Lambda} = \frac{F_S}{\Lambda} \sim \lambda^s \Lambda$  で与えられる。したがって、例えば  $s = 21$  で超対称性の破れるエネルギースケールは  $O(100 \text{ TeV})$  になる。

$U(1)_R$  対称性を破る  $S$  の期待値は、大域的な超対称性を考えていた場合に比べて大きくなっている。この結果は超重力理論の効果を実の超対称大統一模型に取り入れた時、より大きいゲージノの質量が得られることを意味している。 $S$  の真空期待値は3章での模型と同様  $\langle S \rangle \sim (S \text{ の Tadpole の 係数}) / (S \text{ の 2 次の 項 の 係数})$  で与えられるが、この模型では、2次の項が  $|D_\Theta W|^2 \ni a_1^2 \Theta^{2s-2} S^2 = a_1^2 \lambda^{2s-2} S^2$  で与えられる一方で、 $S$  の Tadpole が Superpotential の定数項を拾って、

$$|D_S W|^2 \ni a_1 \frac{\langle W \rangle}{M_{Pl}^2} \Theta^s S \sim \frac{a_0 a_1 \lambda^s}{M_{Pl}^2} S \sim a_1^2 \frac{\lambda^{2s} \Lambda}{M_{Pl}} S \quad (8.1.13)$$

となっていることによるものである。

## 8.2 Model with Neutral Field

次に、 $U(1)_A$  charge が 0 の Chiral superfield を導入した場合を考える。この場を  $Z$  とする。Superpotential は、

$$W = \sum_{n=0} a_n(Z) (S\Theta^s)^n \quad (8.2.1)$$

とする。 $a_n(Z)$  は  $Z$  の関数である。新たに場を加えても、 $S$  や  $\Theta$  及び  $D_S W, D_\Theta W$  等の期待値は前の模型のものほとんど変わらない。しかし、この模型で重要なことは、 $D_Z W$  の期待値が、

$$\langle D_Z W \rangle \sim \frac{|m_{3/2}|^2 M_{Pl}^2}{\hat{a}_0} \sim \begin{cases} m_{3/2} & (\langle \hat{a}_0 \rangle \sim m_{3/2} M_{Pl}^2) \\ m_{3/2}^2 M_{Pl}^2 & (\langle \hat{a}_0 \rangle \sim 1) \end{cases} \quad (8.2.2)$$

となることである。宇宙項を 0 にする条件からグラビティーノの質量は  $m_{3/2} \sim \langle a_0(Z) \rangle / M_{Pl}^2$  で与えられるが、 $\langle D_Z W \rangle$  は  $a_0(Z)$  がどのような関数であるかによって異なる。 $\hat{a}_0(Z)$  が  $O(1)$  係数の  $Z$  の関数であるとして、 $a_0(Z)$  が  $a_0 = m_{3/2} M_{Pl}^2 \hat{a}_0(Z)$  のような関数の時  $\langle D_Z W \rangle \sim m_{3/2}$  となり、(8.2.2) の上の結果が得られる。また、 $a_0(Z)$  が  $O(1)$  係数の  $Z$  の関数で  $\langle a_0 \rangle = m_{3/2} M_{Pl}^2$  を満たすような関数の時には  $\langle D_Z W \rangle \sim m_{3/2}^2 M_{Pl}^2$  となる。また、それぞれの場合に  $Z$  の質量は  $\Lambda, \frac{m_{3/2}^2}{M_{Pl}^2} \Lambda$  となる。

$\langle D_Z W \rangle$  は以下のようにしてゲージノの質量項を与える。まず、Kähler potential と Superpotential から構成される関数  $G$  を定義する。

$$G \equiv -\frac{K}{M_{Pl}^2} - \ln \frac{|W|^2}{M_{Pl}^6} = -\frac{K}{M_{Pl}^2} - \ln \frac{W}{M_{Pl}^3} - \ln \frac{W^*}{M_{Pl}^3} \quad (8.2.3)$$

さらに、 $G$  の場による微分を以下のように定義する。

$$G^i \equiv \frac{\partial G}{\partial X_i} = -\frac{1}{M_{Pl}} \frac{\partial K}{\partial X_i} - \frac{1}{W} \frac{\partial W}{\partial X_i} = -\frac{1}{W} D_{X_i} W \quad (8.2.4)$$

$$G_i \equiv \frac{\partial G}{\partial X^{*i}} = -\frac{1}{M_{Pl}} \frac{\partial K}{\partial X^{*i}} - \frac{1}{W^*} \frac{\partial W^*}{\partial X^{*i}} = -\frac{1}{W^*} (D_{X_i} W)^* = (G^i)^* \quad (8.2.5)$$

$$G_j^i \equiv \frac{\partial^2 G}{\partial X_i \partial X^{*j}} = -\frac{1}{M_{Pl}^2} \frac{\partial K}{\partial X_i \partial X^{*j}} \quad (8.2.6)$$

ただし、 $X_i = S, \Theta, Z$  である。 $Z$  は  $U(1)_A$  charge を持たないので  $F_{ab}(Z)$  を  $Z$  の関数として  $F_{ab}^*(Z) W^{a\alpha} W_\alpha^b$  という項が対称性から許される。この項がある時、ゲージノの質量項は以下のように与えられる。

$$\mathcal{L}_{m_{1/2}} = \frac{1}{2} e^{-G/2} G^i (G^{-1})_i^j (F_{ab}^*)_j \lambda^a \lambda^b \quad (8.2.7)$$

ただし,  $(F_{ab}^*)_i \equiv \partial F_{ab}^*/\partial X^{*i}$  である. 今, 簡単のため  $F_{ab}(Z) = \delta_{ab}f(Z)$  であるとする, (8.2.7) から,

$$\mathcal{L}_{m_{1/2}} = \frac{1}{2} e^{\langle K \rangle / 2} \frac{W}{|W|} \langle D_Z W \rangle \left\langle \frac{\partial f^*}{\partial Z^*} \right\rangle \lambda^a \lambda^a \simeq \frac{1}{2} \langle D_Z W \rangle \left\langle \frac{\partial f^*}{\partial Z^*} \right\rangle \lambda^a \lambda^a \quad (8.2.8)$$

となるので  $f^*$  が  $\left\langle \frac{\partial f^*}{\partial Z^*} \right\rangle \sim O(1)$  を満たすような関数の時, ゲージノは  $m_{1/2} \sim \frac{1}{2} \langle D_Z W \rangle$  の質量を得る. したがって  $a_0(Z)$  が  $a_0(Z) = m_{3/2} M_{Pl}^2 \hat{a}_0(Z)$  のような関数であり式 (8.2.2) の上の結果が得られる場合には, ゲージノの質量はグラビティーノと同じ程度の大きさの質量を得る. 超対称性の破れるエネルギースケールは  $\langle D_S W \rangle \sim \lambda^s$  で与えられるから, 超対称性の破れるエネルギースケールとゲージノの質量及びグラビティーノの質量との関係は,

$$\frac{\langle D_S W \rangle}{M_{Pl}} \sim m_{3/2} \sim m_{1/2} \quad (8.2.9)$$

であり, 超対称性の破れるエネルギースケールを  $O(100 \text{ TeV})$  とした時グラビティーノとゲージノの質量はそれぞれ  $O(1 \text{ TeV})$  程度になる.

### 8.3 Contribution from Moduli Field

3章で述べたように, Super fieldstrength は以下のようにモジュライ場と結合している.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \int d^2\theta k_A T W_A^\alpha W_{A\alpha} + \frac{1}{4} \int d^2\theta k_a T W^{a\alpha} W_\alpha^a + h.c. \quad (8.3.1)$$

ただし, 2項目は  $U(1)_A$  対称性以外の対称性  $G$  があった場合のモジュライ場と  $G$  に関する Super fieldstrength との相互作用で,  $k_a$  は群  $G$  の Kac-Moody level である. この節ではモジュライ場の  $F$ -term からのゲージノの質量への寄与を見る. Kähler potential と Superpotential は,

$$\mathcal{K} = S^\dagger e^{-2g_s V_A} S + \Theta^\dagger e^{2g V_A} \Theta + f(T + T^\dagger - \delta_{GS} V_A) \quad (8.3.2)$$

$$W = \sum_{n=0} a_n (S\Theta^s)^n = \sum_{n=0} a_n x^n \quad (x \equiv S\Theta^s) \quad (8.3.3)$$

の形であるとする.  $f$  は3章で見た  $T + T^\dagger$  の関数である. Scalar potential は以下ようになる.

$$V = V_F + V_D \quad (8.3.4)$$

$$V_F = e^{K/M_{Pl}^2} \left( |D_S W|^2 + |D_\Theta W|^2 + f''^{-1} |D_T W|^2 - 3 \frac{1}{M_{Pl}^2} |W|^2 \right) \quad (8.3.5)$$

$$V_D = \frac{g^2}{2} \left( -\frac{\delta_{GS} f'}{2} + s |S|^2 - |\Theta|^2 \right)^2 \quad (8.3.6)$$

ここで,

$$D_S W = \Theta^s \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{M_{Pl}^2} S^* W \quad (8.3.7)$$

$$D_\Theta W = s \Theta^{s-1} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{M_{Pl}^2} \Theta^* W \quad (8.3.8)$$

$$D_T W = \frac{f'}{M_{Pl}^2} W \quad (8.3.9)$$

$$D = -g \left( -\frac{\delta_{GS} f'}{2} + s |S|^2 - |\Theta|^2 \right) \quad (8.3.10)$$



である.  $T$  を実部と虚部に  $T = T_r + iT_i$  と分けたとき  $T + T^\dagger = 2T_r$  であり,  $f'$ ,  $f''$  は  $f$  の  $T_r$  による一回微分と二回微分を表す. Scalar potential の  $S$  や  $\Theta$  に関する停留条件を計算するにあたっては,  $|D_T W|^2$  からの寄与は  $M_{Pl}^{-2}$  の Suppression を受けた形でしか現れないので,  $\langle S \rangle, \langle \Theta \rangle, \langle D_S W \rangle, \langle D_\Theta W \rangle, \langle D \rangle$  は最初の模型とほとんど変わらない.

### 8.3.1 モジュライの安定化に関する条件

Scalar potential の  $T_r$  に関する停留条件  $\partial V / \partial T_r = 0$  から,

$$m_{3/2}^2 \left( 2f' - \frac{(f')^2 f'''}{(f'')^2} \right) + gD \left( \frac{\delta_{GS} f''}{2} \right) = 0 \quad (8.3.11)$$

が得られる. さらに  $b_n$  を  $O(1)$  の係数として  $f$  を  $\langle T_r \rangle = T_0$  の周りで  $f(T + T^\dagger) = \sum_n b_n (T + T^\dagger - 2T_0)^n / n!$  と展開した時, Scalar potential の 2 回微分を計算すれば,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial T_r^2} \sim \left( \frac{\delta_{GS} f''}{2} \right)^2 > 0 \quad (8.3.12)$$

なので, (8.3.11) が満たされれば, Scalar potential は  $\langle T_r \rangle$  の方向に対して (準) 安定になりこれによってゲージ結合定数  $\text{Re}(\tau) = 1/g^2$  や  $\xi^2 = -\frac{\delta_{GS} f'}{2}$  が決まる. (8.3.11) は展開の係数  $b_n$  に対して,

$$m_{3/2}^2 \left( 2b_1 - \frac{b_1^2 b_3}{b_2^2} \right) + gD \left( \frac{\delta_{GS} b_2}{2} \right) = 0 \quad (8.3.13)$$

の条件を与える.

### 8.3.2 Contribution from Moduli Field

モジュライは Superpotential には現れないので, 大域的な超対称性を考えている限りモジュライの  $F$ -term はいつも  $F_T = 0$  であって, モジュライの  $F$ -term からゲージノの質量への寄与はなかった. しかし超重力理論の枠組みで考えると  $\langle D_T W \rangle = f' \frac{\langle W \rangle}{M_{Pl}^2}$  であるから, 前の節で議論したのと同様ゲージノに対して,

$$k_A (f'')^{-1} \langle D_T W \rangle = k_A \frac{f' \langle W \rangle}{f'' M_{Pl}^2} \sim k_A \frac{b_1}{b_2} m_{3/2} \quad (8.3.14)$$

の質量を与える. 最後に各場の質量について議論する. 今の場合, Scalar potential には  $U(1)_A$  対称性の他に  $S$  と  $\Theta$  だけを回転する大域的な  $U(1)$  対称性があり, それに伴って NG-boson  $T_i$  が現れている.  $T_i$  は Superpotential あるいは Kähler potential に  $\Theta e^{2T/\delta_{GS}}, S e^{-2S/\delta_{GS}}$  のような大域的な  $U(1)$  対称性を破る項がある時, 質量を持ち  $\langle T_i \rangle$  が決まる.  $\langle T_i \rangle$  は  $CP$  対称性の破れのパラメーター  $\text{Im}(\tau) = \theta_{CP}/8\pi^2$  を与える. それ以外の各場の質量は,

$$m_T \sim \frac{\delta_{GS}}{2}, \quad m_{S_r} \sim \frac{sm_{3/2} M_{Pl}}{\lambda \Lambda}, \quad m_{\phi_S} \sim \frac{sm_{3/2} M_{Pl}}{\lambda \Lambda} \quad (8.3.15)$$

となる.

## 8.4 この章の結論

本論文の最初にも述べたように超対称性の自発的な破れの起源を説明することは標準模型を超える模型を構築する上で重要である。一般に  $U(1)_R$  対称性の存在はポテンシャルの最小点において超対称性の自発的な破れを実現するための必要条件であるが、一方でその存在はゲージノの質量を禁止するだけでなく、質量を持たない Nambu-Goldstone 粒子の存在を導き得うる。ただし、 $U(1)_R$  対称性を持たない理論の準安定な真空で超対称性の自発的な破れを実現することで、これらの問題は回避することができる。本論文では、 $U(1)_A$  対称性を持った理論での超対称性の自発的な破れと、ゲージノの質量に対する超重力理論の効果からの寄与について議論した。大域的な超対称性を考えている場合には真空のエネルギー  $\langle V \rangle$  が超対称性の破れるエネルギーになり宇宙項の大きさを説明できないことから、また、大統一理論のエネルギースケールが重力理論のエネルギースケールと 2 桁程度しか離れていないことから超重力理論の効果を考えることは自然である。いくつかの具体的な模型での計算により、いずれの模型でもゲージノの質量に対して大きな寄与が存在することがわかった。これらの寄与はいずれも  $U(1)_R$  対称性を破っている Superpotential の定数項に比例した形で現れていることからわかるように、ゲージノがグラビティーノと同程度の質量を得るにあたってはこの超重力理論の効果が重要であった。これらの寄与は超対称性の自発的な破れを自然な大統一理論に組み込んだ際にも存在し、それぞれがゲージノに質量を与えるから、この模型においても現実的なゲージノの質量が実現されることになる。

## 9 再び超対称性が自発的に破れる超対称大統一理論

ここまでの議論で、ゲージノはグラビティーノと同じオーダーの質量を持つ模型が構築できることがわかった。この章では、7章で議論した超対称性が自発的に破れる模型の幾つかの特徴について議論する。

### 9.1 Sfermion の質量

2章で議論したように超対称性が自発的に破れる模型では、スフェルミオンの質量  $m_0$  に対して  $F$ -term と  $D$ -term からの寄与がある。8章で議論した簡単な模型では (8.1.12) からわかるように  $\sqrt{gD}/F_S \sim \sqrt{s}\lambda^{-1} \sim O(10)$  であり、スフェルミオンの質量に対する寄与としては  $D$ -term からのものが支配的である。<sup>33</sup>超対称性を自発的に破る大統一模型でも、一般には  $D$ -term からの寄与が支配的になりうるが、正の  $U(1)_A$  charge を持った場が複数あるためにパラメーターを調整することで  $D$ -term からの寄与と  $F$ -term からの寄与を同じオーダーにしうる。以下では、(A)  $D$ -term の寄与が支配的な場合と、(B)  $D$ -term と  $F$ -term の寄与が同じオーダーになる場合の二つの場合を考える。それぞれの場合について、超対称性の破れるエネルギースケールとゲージノ、グラビティーノ、スフェルミオンの質量との関係をまとめておく。

$$A : m_{1/2} \sim m_{3/2} \sim O(1 \text{ TeV}), \quad m_0^2 \sim D_A \sim (10 \Lambda_{SUSY})^2 \sim O\left((1000 \text{ TeV})^2\right) \quad (9.1.1)$$

$$B : m_{1/2} \sim m_{3/2} \sim O(1 \text{ TeV}), \quad m_0^2 \sim \Lambda_{SUSY}^2 \sim O\left((100 \text{ TeV})^2\right) \quad (9.1.2)$$

ここで、 $D_A$  は  $U(1)_A$  対称性の  $D$ -term である。また、 $\Lambda_{SUSY} \sim O(100 \text{ TeV})$  とするために  $\bar{c}' = 18$  とした。いずれの場合にもスフェルミオンの質量は電弱スケールに比べて十分大きく (High-Scale SUSY と呼ばれる)、ヒッグス粒子の質量に対する量子補正の問題を解決するためにはパラメーターの微調整が必要になる一方で、模型超対称性を導入したことによって生じうる FCNC や  $CP$  対称性を破る過程は抑制される。

以下では、 $SO(10)$  を部分群  $SU(5) \times U(1)_V$  に分解した時の  $U(1)_V$  の  $D$ -term を  $D_V$  と表す。先に述べたように  $SU(5) \times U(1)_V$  の下で  $SO(10)$  の **16** 表現と **10** 表現は以下のように分解できる。

$$\mathbf{16} = \mathbf{10}_{1/5} \oplus \bar{\mathbf{5}}_{-3/5} \oplus \mathbf{1}_1, \quad \mathbf{10} = \mathbf{5}_{-2/5} \oplus \bar{\mathbf{5}}_{2/5} \quad (9.1.3)$$

ただし、 $U(1)_V$  を破る  $\langle C \rangle, \langle \bar{C} \rangle$  の  $U(1)_V$  charge が 1 になるように規格化した。 $SU(5)$  の **10** または  $\bar{\mathbf{5}}$  表現に属する  $i$  世代目のスフェルミオンの質量を  $\tilde{m}_{10_i}, \tilde{m}_{\bar{5}_i}$  としてスフェルミオンの質量を表すと以下ようになる。[47, 48]

$$\tilde{m}_{10_i}^2 = \tilde{m}_i^2 + \psi_i g_A D_A + \frac{1}{5} g_{10} D_V \quad (9.1.4)$$

$$\tilde{m}_{\bar{5}_1}^2 = \tilde{m}_1^2 + \psi_1 g_A D_A - \frac{3}{5} g_{10} D_V \quad (9.1.5)$$

$$\tilde{m}_{\bar{5}_2}^2 = \tilde{m}_T^2 + t g_A D_A + \frac{2}{5} g_{10} D_V \quad (9.1.6)$$

$$\tilde{m}_{\bar{5}_3}^2 = \tilde{m}_2^2 + \psi_2 g_A D_A - \frac{3}{5} g_{10} D_V \quad (9.1.7)$$

<sup>33</sup>ここでは  $s = 21$  を用いた

ここで、右辺の  $\tilde{m}_i, \tilde{m}_T$  は  $SO(10)$  の **16** 表現の物質場  $\Psi_i$  及び **10** 表現の物質場  $T$  に対する  $F$ -term からの寄与を表す。  $g_A$  と  $g_{10}$  はそれぞれ  $U(1)_A$  と  $SO(10)$  のゲージ結合定数である。 (A) の場合、すなわち  $D$ -term からの寄与が支配的な場合、各世代ごとに  $SU(5)$  の同じ表現に属するスフェルミオンはそれぞれ同じ質量を持つことになる。したがって (A) の場合には  $SU(5)$  での物質場の統一を尊重したスフェルミオンの質量が予言されまた、それらの質量が  $SO(10)$  での各表現の  $U(1)_A$  charge によって決まる点が特徴的である。将来の実験によりスフェルミオンが発見され、このような質量スペクトルを持っていることが明らかになれば大統一理論における物質場の統一の証拠となる。 (B) の場合には  $F$ -term からの寄与も  $D$ -term と同程度になるため、この特徴は失われる。さらに、  $D_V$  の期待値は、超対称性の破れに伴って現れる  $C$  及び  $\bar{C}$  の質量  $\tilde{m}_C, \tilde{m}_{\bar{C}}$  と以下のような関係を持つ。 [48]

$$g_{10}D_V = -\frac{\tilde{m}_C^2 - \tilde{m}_{\bar{C}}^2}{2} \quad (9.1.8)$$

(A) の場合には  $\tilde{m}_C^2, \tilde{m}_{\bar{C}}^2$  が  $D_A$  と  $C, \bar{C}$  の  $U(1)_A$  charge によって、

$$\tilde{m}_C^2 = cg_A D_A, \quad \tilde{m}_{\bar{C}}^2 = \bar{c}g_A D_A \quad (9.1.9)$$

で与えられるから、  $D_A$  と  $D_V$  の間には、

$$g_{10}D_V = \frac{\bar{c} - c}{2} g_A D_A \quad (9.1.10)$$

の関係が成り立つ。よって、スフェルミオンの質量は  $g_A D_A$  だけを用いて表すことができ、この模型では、

$$(\tilde{m}_{10_1}^2, \tilde{m}_{10_2}^2, \tilde{m}_{10_3}^2) = \frac{g_A D_A}{10} (48, 38, 18), \quad (\tilde{m}_{\tilde{5}_1}^2, \tilde{m}_{\tilde{5}_2}^2, \tilde{m}_{\tilde{5}_3}^2) = \frac{g_A D_A}{10} (36, 31, 26), \quad (9.1.11)$$

となる。 (B) の場合には  $F$ -term からの寄与が無視できないため (9.1.9) の関係が成り立たず、(9.1.11) のような予言は得られない。

ここで、Doublet Higgs の質量について述べておく必要がある。スフェルミオンと同様、Doublet Higgs の質量  $m_{H_u}^2, m_{H_d}^2$  に対しても  $D$ -term からの寄与がある。特に (A) の場合には、超対称性の破れにより Doublet Higgs の質量に対する寄与は、

$$(m_{H_u}^2, m_{H_d}^2) = \frac{g_A D_A}{10} (-36, -24) \sim O((1000 \text{ TeV})^2) \quad (9.1.12)$$

である。よって、これを相殺するために  $\mu \sim O(1000 \text{ TeV})$  が必要になる。この時、  $\mu^2 \sim g_A D_A \sim O((1000 \text{ TeV})^2)$  であるから、ヒッグシーノ  $\tilde{H}_u, \tilde{H}_d$  の質量は  $\sim O(1000 \text{ TeV})$  となる。しかしながら、6章3節での議論を思い出すと、今の場合  $\mu$  はグラビティーノの質量  $m_{3/2} \sim m_{SB} \sim O(1 \text{ TeV})$  に比例することがわかる。さらに、  $\mu$  パラメーターを与えるために導入される負の  $U(1)_A$  charge を持った場  $\tilde{S}$  が超対称性を破る  $F$ -term  $F_{\tilde{C}'}$  の中に現れると、  $\langle \tilde{S} \rangle$  を適当に選ぶことで  $F_{\tilde{C}'} = 0$  となるため、  $\tilde{s} \leq -6$  が要求される。したがって、

$$\mu \sim \lambda^{2h-2\tilde{s}} m_{3/2}, \quad (9.1.13)$$

は  $\tilde{s} = -6$  とした場合でも  $D$ -term からの寄与を相殺する大きさにはならない。この問題を回避する方法として模型に新たに離散的対称性  $Z_6$  を課して、  $\tilde{S}$  が  $\tilde{S}^6$  の形でしか現れないようにすることが考えられる。この場合、  $\tilde{s} = -1$  とできるから、

$$\mu \sim \lambda^{-4} m_{3/2} \sim 500 \text{ TeV} \quad (9.1.14)$$

が得られる. ただし, (A) の場合には他にも困難な問題がある. 再び6章3節の議論を思い出すと, (A) の場合  $m_{\tilde{S}}$  に対する寄与は  $D$ -term からの寄与が支配的だから,  $m_{\tilde{S}}^2$  は  $m_{3/2}\mu$  に対して十分大きく,

$$B\mu \sim \lambda^{2h-2\tilde{s}} m_{\tilde{S}}^2 \quad (9.1.15)$$

となって  $B\mu$  は非常に大きくなる. 新たな  $SO(10)$  singlet のペア  $\tilde{\Sigma}, \tilde{\Sigma}'$  を導入すると, それらからも  $B\mu$  に対して  $m_{\tilde{S}}^2$  に比例した寄与がある. よって, パラメーターを調整することでこの寄与と (9.1.15) が相殺するようにするようにしてこの問題を回避することは可能である. (B) の場合には, パラメーターの調整の度合いは小さくできる.

## 9.2 Long Lived Charged Lepton

6章において, この模型で最も軽い  $R$ -parity 奇の粒子は  $\mathbf{16}$  表現の Higgs 場  $C'$  と  $\overline{\mathbf{16}}$  表現の Higgs 場  $\bar{C}'$  に含まれる  $E^c$  と  $\bar{E}^c$  成分の Spinor component であることを見た. 以下ではこれらをそれぞれ  $E^c, \bar{E}^c$  と表す.  $E^c, \bar{E}^c$  の質量項は  $\lambda^{c'+\bar{c}'} \bar{C}' C'$  で与えられ,  $\bar{c}' = 18$  ( $c' = 3$ ) の時には  $m_{E^c} \sim \lambda^{c'+\bar{c}'} \Lambda \sim 200 \text{ GeV}$  となるが, この模型ではより高次の項, 例えば  $\bar{C}' A^n Z^m (\bar{C} C)^l C'$ , ( $\bar{c}' + na + mz + l(\bar{c} + c) + c' \geq 0$ ) 等も  $E^c, \bar{E}^c$  の質量に対して同じ寄与を与えるので, それらを考慮すると,  $m_{E^c} \sim O(1 \text{ TeV})$  になると考えられる.

以下ではこの粒子の寿命について述べる. まず, この模型で最も軽い最小超対称標準模型粒子 (Lightest Minimal Supersymmetric Standard Model SUSY particle, LMSP) について考える. (A) の場合, 先に述べたように  $D$ -term からの寄与を相殺するために大きい  $\mu$  パラメーターが必要になるためヒッグシーノは LMSP にはならず, ビーノが LMSP になる. (B) の場合はビーノとヒッグシーノがどちらも LMSP になりうる.  $E^c$  の崩壊に寄与する過程は以下のダイアグラムで表されるものが主である.  $\tilde{\chi}_0$  はニュートラリーノである.  $\tilde{\chi}_0$  はヒッグシーノとビーノが混合した場だが, (A) の場合はビーノが主な成分を占めることになる (Bino-like Neutralino).

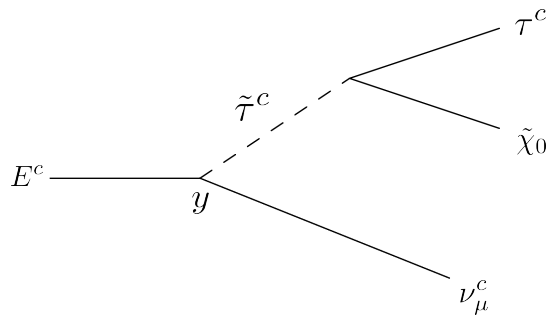


図 1:  $E^c$  の崩壊に主に寄与するダイアグラム.  $y$  は  $C' \Psi_2 T$  の Yukawa 結合定数で  $U(1)_A$  charge から,  $y \sim \lambda^{c'+\psi_2+t} \sim 10^{-6}$  である.

図 1 から  $E^c$  の寿命を見積もると, ビーノが最も軽い超対称粒子 (Lightest SUSY particle, LSP) の時,

$$\tau_{E^c} \sim O(1) \text{ sec} \left( \frac{10^{-6}}{y} \right)^2 \left( \frac{m_0}{1000 \text{ TeV}} \right)^4 \left( \frac{1 \text{ TeV}}{m_{E^c}} \right)^5 \quad (9.2.1)$$

となり, ヒッグシーノが LSP の時,

$$\tau_{E^c} \sim O(0.1) \text{ sec} \left( \frac{10^{-6}}{y} \right)^2 \left( \frac{\lambda^2}{y_\tau} \right)^2 \left( \frac{m_0}{100 \text{ TeV}} \right)^4 \left( \frac{1 \text{ TeV}}{m_{E^c}} \right)^5 \quad (9.2.2)$$

となる.  $y_\tau$  はタウ粒子の Yukawa 結合定数である. また  $y$  は  $C'\Psi_2 T$  の Yukawa 結合定数  $y \sim \lambda^{c'+\psi_2+t} \sim 10^{-6}$  である. ビッグバン元素合成の理論から,  $\tau_{E^c} < 1 \text{ sec}$  が要求される. また, LHC 実験から  $E^c$  の質量には  $m_{E^c} > 574 \text{ GeV}$  の制限が付いている. [49–51] 将来の実験でこのような粒子が発見されることがあれば, このモデルへのサポートになる.

## 10 Summary

本論文では,  $SO(10) \times U(1)_A \times Z_2$  SUSY GUT 模型に超対称性の自発的破れを組み込むことを目的に行われた一連の研究について述べた. 7章では, 大域的な超対称性の枠組みで超対称性が自発的に破れる  $SO(10) \times U(1)_A \times Z_2$  SUSY GUT 模型について議論し, 大統一理論と超対称性の自発的に破れるセクターを統一する模型が構築できる可能性を示した. 一方この模型では,  $U(1)_R$  対称性が理論の真空において小さくしか破れていないことに起因してゲージノの質量が超対称性の破れるエネルギースケールに対して極端に小さくなり現実的なゲージノの質量を得ようとすると超対称性の破れるエネルギースケールが非常に高くなることも明らかになった. 本論文ではさらに超対称性を局所的な対称性に拡張した場合にこの問題が改善されることを示した. これは, 8章で述べたように超重力理論の枠組みでは宇宙項の大きさを説明するためには Superpotential に定数項を導入する必要がある, これが  $U(1)_R$  対称性の破れの起源となるからである. 超重力理論の効果を取り入れればゲージノの質量は超対称性の破れるエネルギースケールの 100 分の 1 程度になる. すなわち  $m_{1/2} \sim O(1 \text{ TeV})$  に対して  $\Lambda_{SUSY} \sim O(100 \text{ TeV})$  である. この模型ではスフェルミオンの質量が  $O(100 \text{ TeV}) \sim O(1000 \text{ TeV})$  となるため, ヒッグス粒子の質量への量子補正に関するパラメーターの微調整の問題を完全に解決することはできないが, 超対称性を導入することで生じる FCNC や,  $CP$  対称性を破る過程はこの大きいスフェルミオンの質量によって抑制され, これらの問題には解決を与えるものになっている. 以上のことから, 本研究によって, 大統一理論と超対称性の破れるセクターを統一しながら, 超対称大統一理論の抱える種々の現象論的問題を解決する構築が構築できることが明らかになったと言える.

さらに, 本論文では超対称性が自発的に破れる大統一模型の現象論的予言についても述べた. 特に  $D$ -term がスフェルミオンの質量に対して支配的な寄与を持つ場合には  $SU(5)$  での物質場の統一を尊重したスフェルミオンの質量スペクトラムが予言され, この質量スペクトラムが物質場の  $SO(10)$  での各表現の  $U(1)_A$  charge によって決まるという特徴を持つことも示した. 最後にこの模型では質量が 1 TeV 程度の電荷を持った長寿命粒子の存在が予言されることも示した. スフェルミオンの質量は 100 – 1000 TeV 程度と非常に重く, 近い将来の実験で発見される可能性は低い, 電荷を持った長寿命粒子は LHC においても発見される可能性があり, これが発見されればこの模型の証拠となうる.

## A 8章の計算

ここでは,8章の各模型についての計算を行う.

### A.1 Simplest model

質量次元がわかりやすいよう,以下のように種々の量を定義し直す.

$$\tilde{W} = \sum_{n=0} \tilde{a}_n (\tilde{S}\tilde{\Theta}^s)^n = \tilde{a}_0 + \sum_{n=1} \tilde{a}_n (\tilde{S}\tilde{\Theta}^s)^n = \Lambda^3 W \quad (\text{A.1})$$

$$K = \tilde{S}^* \tilde{S} + \tilde{\Theta}^* \tilde{\Theta} \quad (\text{A.2})$$

$$\tilde{S} \equiv \Lambda S, \quad \tilde{\Theta} \equiv \Lambda \Theta, \quad \tilde{a}_n \equiv \Lambda^{3-n(s+1)} a_n \quad (\text{A.3})$$

$$\tilde{m}_{3/2} \equiv \Lambda m_{3/2} \quad (\text{A.4})$$

これらを用いて  $D_{\tilde{S}}\tilde{W}, D_{\tilde{\Theta}}\tilde{W}$  を書く.<sup>34</sup>

$$\begin{aligned} D_{\tilde{S}}\tilde{W} &= \frac{1}{\tilde{S}} \sum_{n=1} n \tilde{a}_n (\tilde{S}\tilde{\Theta}^s)^n + \frac{\tilde{S}^*}{M_{Pl}^2} \left( \tilde{a}_0 + \sum_{n=1} \tilde{a}_n (\tilde{S}\tilde{\Theta}^s)^n \right) \\ &= \frac{\Lambda^2}{S} \sum_{n=1} n a_n (S\Theta^s)^n + \frac{\Lambda^4}{M_{Pl}^2} S^* \left( a_0 + \sum_{n=1} a_n (S\Theta^s)^n \right) \\ &= \frac{\Lambda^2}{S} \left( \epsilon^2 |S|^2 a_0 + \sum_{n=1} (n + \epsilon^2 |S|^2) a_n (S\Theta^s)^n \right) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

ただし,ここで  $\epsilon \equiv \frac{\Lambda}{M_{Pl}}$  を定義した.  $M_{Pl} \sim O(10^{18}\text{GeV}), \Lambda = \Lambda_{GUT} \sim O(10^{16}\text{GeV})$  より  $\epsilon \sim O(10^{-2})$  である.

$$\begin{aligned} D_{\tilde{\Theta}}\tilde{W} &= \frac{1}{\tilde{\Theta}} \sum_{n=1} s n \tilde{a}_n (\tilde{S}\tilde{\Theta}^s)^n + \frac{\tilde{\Theta}^*}{M_{Pl}^2} \left( \tilde{a}_0 + \sum_{n=1} \tilde{a}_n (\tilde{S}\tilde{\Theta}^s)^n \right) \\ &= \frac{\Lambda^2}{\Theta} \sum_{n=1} s n a_n (S\Theta^s)^n + \frac{\Lambda^4}{M_{Pl}^2} \Theta^* \left( a_0 + \sum_{n=1} a_n (S\Theta^s)^n \right) \\ &= \frac{\Lambda^2}{\Theta} \left( \epsilon^2 |\Theta|^2 a_0 + \sum_{n=1} (s n + \epsilon^2 |\Theta|^2) a_n (S\Theta^s)^n \right) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

これらを用いて,無次元の  $D_S W, D_\Theta W$  等を以下のように定義する.

$$D_{\tilde{S}}\tilde{W} \equiv \Lambda^2 D_S W, \quad D_{\tilde{\Theta}}\tilde{W} \equiv \Lambda^2 D_\Theta W \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\tilde{W}^* \tilde{W}}{M_{Pl}^2} = \frac{\Lambda^6 W^* W}{M_{Pl}^2} = \Lambda^4 \epsilon^2 W^* W \quad (\text{A.8})$$

<sup>34</sup> $S, \Theta$  のどちらか一方でも 0 だと,ポテンシャルが最小にならない.



これらを用いて Scalar potential は以下のように書き直せる.

$$V_F = e^{K/M_{Pl}^2} \Lambda^4 \left( |D_S W|^2 + |D_\Theta W|^2 - 3\epsilon^2 |W|^2 \right) \equiv e^{K/M_{Pl}^2} \Lambda^4 v_F \quad (\text{A.9})$$

$$V_D = \frac{1}{2} \tilde{D}^2 = \frac{\Lambda^4}{2} D^2 \quad (\text{A.10})$$

ただし,  $\xi$  も無次元化して,  $D$  は以下のように定義してある.

$$\tilde{D} = -g (\xi^2 - \Theta^* \Theta + s S^* S) \Lambda^2 \equiv \Lambda^2 D \quad (\text{A.11})$$

大域的な超対称性の議論の時と同様に  $\langle \Theta \rangle \gg \langle S \rangle$  を仮定し  $V_D \simeq 0$  の条件から  $\langle \Theta \rangle$  を以下のように決める.

$$|\langle \Theta \rangle| = |\lambda| \simeq \sqrt{\xi^2 + s S^* S} \sim O(10^{-1}) \quad (\text{A.12})$$

以下の議論では  $U(1)_A$  対称性を使って  $\lambda$  を実にする.  $V_F \simeq 0$  と Potential の  $S$  に関する停留条件より定数項  $a_0$  と  $S$  の期待値を求める.

$$V_F \simeq 0 \quad \Rightarrow \quad v_F = |D_S W|^2 + |D_\Theta W|^2 - 3\epsilon^2 |W|^2 \simeq 0 \quad (\text{A.13})$$

$v_F$  を具体的に書き下すと,

$$\begin{aligned} v_F = & \frac{1}{|S|^2} \left| \epsilon^2 |S|^2 a_0 + \sum_{n=1} (n + \epsilon^2 |S|^2) a_n (S \lambda^s)^n \right|^2 \\ & + \frac{1}{|\lambda|^2} \left| \epsilon^2 |\lambda|^2 a_0 + \sum_{n=1} (sn + \epsilon^2 |\lambda|^2) a_n (S \lambda^s)^n \right|^2 \\ & - 3\epsilon^2 \left| a_0 + \sum_{n=1} a_n (S \lambda^s)^n \right|^2 \end{aligned}$$

$\lambda \sim 10^{-1}$ ,  $S/\lambda \ll 1$  より, 和を  $n = 1$  までで切って展開すると,

$$\begin{aligned} v_F \sim & \frac{1}{|S|^2} \left( \epsilon^4 |S|^4 |a_0|^2 + (1 + \epsilon^2 |S|^2) \epsilon^2 |S|^2 \lambda^s (a_0^* a_1 S + a_0 a_1^* S^*) + (1 + \epsilon^2 |S|^2)^2 \lambda^{2s} |a_1|^2 |S|^2 \right) \\ & + \frac{1}{\lambda^2} \left( \epsilon^4 \lambda^4 a_0^2 + \epsilon^2 \lambda^{s+2} (s + \epsilon^2 \lambda^2) (a_0^* a_1 S + a_0 a_1^* S^*) + (s + \epsilon^2 \lambda^2)^2 \lambda^{2s} |a_1|^2 |S|^2 \right) \\ & - 3\epsilon^2 \left( |a_0|^2 + \lambda^s (a_0^* a_1 S + a_0 a_1^* S^*) + \lambda^{2s} |a_1|^2 |S|^2 \right) \end{aligned}$$

となる. これを  $S$  の次数で整理すると,

$$\begin{aligned} (S^0) : & |a_1 \lambda^s|^2 - 3\epsilon^2 |a_0|^2 + \epsilon^4 \lambda^2 |a_0|^2 \\ (S^1) : & \epsilon^2 \lambda^s (s - 2) (a_0^* a_1 S + a_0 a_1^* S^*) + \epsilon^4 \lambda^{s+2} (a_0^* a_1 S + a_0 a_1^* S^*) \\ (S^2) : & s^2 |a_1|^2 \lambda^{2s-2} |S|^2 + \epsilon^4 |a_0|^2 |S|^2 + 2(s - 1) \epsilon^2 |a_1|^2 \lambda^{2s} |S|^2 + \epsilon^4 \lambda^{2(s+1)} |a_1|^2 |S|^2 \\ (S^3, S^4) : & \epsilon^4 \lambda^s a_0 a_1 (S + S^*) |S|^2 + \epsilon^4 a_1^2 \lambda^{2s} |S|^4 \end{aligned}$$

であり, まず  $S$  の 0 次の項が相殺することから  $a_0$  が求まる.

$$|a_0|^2 \simeq \frac{|a_1 \lambda^s|^2}{3\epsilon^2} \quad (\text{A.14})$$

これにより、グラビティーノの質量が求まる.

$$\epsilon^2 \langle W \rangle \sim \epsilon^2 a_0 \simeq \epsilon \frac{a_1 \lambda^s}{\sqrt{3}} \simeq m_{3/2} \quad (\text{A.15})$$

次に、 $S$  の 3 次以上の項は  $\epsilon$  と  $\lambda$  の高次のべきによって Suppress されていることから、これらをほとんど無視できるとすると、 $V_F$  を最小にする  $S$  は以下ようになる.

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &\simeq \frac{\epsilon^2 \lambda^s (s-2) a_0 a_1^*}{s^2 |a_1 \lambda^s|^2 \lambda^{-2} + \epsilon^4 |a_0|^2 + 2(s-1) \epsilon^2 |a_1^2 \lambda^s|^2} \\ &\simeq \frac{\sqrt{3} \epsilon (s-2) |a_0|^2}{\frac{s^2}{\lambda^2} 3 |a_0|^2 + \epsilon^2 |a_0|^2 + 6(s-1) \epsilon^2 |a_0|^2} \\ &\sim \frac{s-2}{s^2} \epsilon \lambda^2 \\ \therefore \langle S \rangle &\sim \frac{1}{s} \epsilon \lambda^2 \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$S$  を  $S = S_r e^{i \frac{\phi_S}{\sqrt{2} \langle S \rangle}}$  のように動径方向と位相方向に分解すると、 $S_r$  の質量は  $S$  の 2 次の項から、

$$m_{S_r}^2 S_r^2 \sim s^2 |a_1|^2 \lambda^{2s-2} S_r^2 \sim \left( \frac{sm_{3/2}}{\lambda \epsilon} \right)^2 S_r^2 \quad (\text{A.17})$$

と得られ、 $\phi_S$  の質量は  $S$  の 1 次の項が

$$\epsilon^2 \lambda^s (s-2) (a_0^* a_1 S + a_0 a_1^* S^*) = \epsilon^2 \lambda^s (s-2) 2 \text{Re}[a_0^* a_1] S_r \left( 1 + \frac{1}{2!} \left( \frac{\phi_S}{\sqrt{2} \langle S_r \rangle} \right)^2 + \dots \right) \quad (\text{A.18})$$

の形で  $\phi_S$  の質量項を与えるから、

$$m_{\phi_S} \sim \frac{sm_{3/2}}{\lambda \epsilon} \quad (\text{A.19})$$

である.

次に Potential の  $\Theta$  に関する停留条件から  $\langle D \rangle$  を求める. 以下では Superpotential は  $(S\Theta^s)$  の 1 次までしか考えない.

$$\frac{\partial V}{\partial \Theta} = \frac{\partial V_F}{\partial \Theta} + \frac{\partial V_D}{\partial \Theta} \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial V_D}{\partial \Theta} = D \frac{\partial D}{\partial \Theta} = g \lambda D \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_F}{\partial \Theta} &= \Lambda^4 \left( \frac{\partial}{\partial \Theta} e^{K^2/M_{Pl}^2} \right) \left( |D_S W|^2 + |D_\Theta W|^2 - 3\epsilon^2 |W|^2 \right) \\ &\quad + \Lambda^4 e^{K^2/M_{Pl}^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( |D_S W|^2 + |D_\Theta W|^2 - 3\epsilon^2 |W|^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

であるが、 $v_F \simeq 0$  より第 3 式の初項は無視できる. また、

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \Theta} \left( |D_S W|^2 + |D_\Theta W|^2 - 3\epsilon^2 |W|^2 \right) \\ &= (D_S W)^* \frac{\partial}{\partial \Theta} D_S W + \left[ (D_\Theta W)^* \frac{\partial}{\partial \Theta} D_\Theta W + c.c. \right] - 3\epsilon^2 W^* \frac{\partial W}{\partial \Theta} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

であり、それぞれの項を reading の寄与まで計算すると、まず第 1 項に関して、

$$\frac{\partial}{\partial \Theta} D_S W = \frac{s}{S\Theta} (1 + \epsilon^2 |S|^2) a_1 (S\Theta^s) \quad (\text{A.24})$$

より,

$$(D_S W)^* \frac{\partial}{\partial \Theta} D_S W \Big|_{vev} \sim s \lambda^{2s-1} a_1^2 + s \epsilon^2 \lambda^{2s+1} a_1 + O(\epsilon^4, \lambda^{2s+3}) \quad (\text{A.25})$$

となる. ただし,  $|_{vev}$  は場と定数項をそれぞれの期待値,  $\langle S \rangle \sim \epsilon \lambda^2$ ,  $\langle \Theta \rangle = \lambda$ ,  $a_0 \sim \epsilon^{-1} \lambda^s$  で置き換えたことを表す. 他の項に関しても同様に計算すると, 第2項は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Theta} D_\Theta W &= -\frac{1}{|\Theta|^2} (\epsilon^2 |\Theta|^2 a_0 + (s + \epsilon^2 |\Theta|^2) a_0 (S \Theta^s)) \\ &\quad + \frac{1}{\Theta} \left( \epsilon^2 \Theta^* a_0 + \frac{s^2}{\Theta} a_1 (S \Theta^s) + \epsilon^2 \Theta^* a_0 (S \Theta^s) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

$$(D_\Theta W)^* \frac{\partial}{\partial \Theta} D_\Theta W \Big|_{vev} \sim s^3 \epsilon^2 \lambda^{2s+1} a_1 + s^2 \epsilon^2 \lambda^{2s+1} a_1 + s \epsilon^2 \lambda^{2s+1} a_1 + O(\epsilon^4, \lambda^{2s+3}) \quad (\text{A.27})$$

となり, 最後に第3項は,

$$\epsilon^2 W^* \frac{\partial W}{\partial \Theta} \Big|_{vev} \sim s \epsilon^2 a_1 \lambda^{2s+1} + s \epsilon^3 \lambda^{2s+3} a_1^2 \quad (\text{A.28})$$

となる. 結局, 第1項に対して他は十分小さいから,

$$\frac{\partial V}{\partial \Theta} = 0 \Rightarrow s \lambda^{2s-1} a_1^2 + g \lambda D \simeq 0 \quad (\text{A.29})$$

であれば良い. よって  $D$  の期待値は,

$$\langle D \rangle \sim \frac{s}{g} \lambda^{2s-2} \quad (\text{A.30})$$

である. また,  $S \sim \epsilon \lambda^2$ ,  $\Theta = \lambda$ ,  $a_0 \sim \epsilon^{-1} \lambda^s$  をそれぞれ代入することで,

$$\langle D_S W \rangle \sim \lambda^s, \quad \langle D_\Theta W \rangle \sim \lambda^{s+1} \frac{\Lambda}{M_{Pl}} \quad (\text{A.31})$$

であることもわかる.

## A.2 Model with Neutral Field

この模型の Superpotential は,

$$\tilde{W} = \tilde{a}_0(Z) + \sum_{n=1} \tilde{a}_n(Z) (\tilde{S} \tilde{\Theta}^s)^n \equiv \Lambda^3 W \quad (\text{A.1})$$

である. 前の計算と同様, 各種の量を無次元化して計算する.

$$V = V_F + V_D \quad (\text{A.2})$$

$$V_F = e^{K/M_{Pl}^2} \Lambda^4 v_F \quad (\text{A.3})$$

$$v_F = |D_S W|^2 + |D_\Theta W|^2 + |D_Z W|^2 - 3\epsilon^2 |W|^2 \quad (\text{A.4})$$

$$V_D = \frac{\Lambda^4}{2} D^2 \quad (\text{A.5})$$

$$D = -g (\xi^2 - \Theta^* \Theta + s S^* S) \quad (\text{A.6})$$

まず,新たに  $U(1)_A$  charge 0 の場を導入することで Potential につけ加わる項を計算する.

$$D_Z W = \frac{\partial W}{\partial Z} + \epsilon^2 Z^* W = \dot{a}_0(Z) + \dot{a}_1(Z) (S\Theta^s) + \epsilon^2 Z^* \{a_0(Z) + a_1(Z) (S\Theta^s)\} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} |D_Z W|^2 &= |\dot{a}_0|^2 + \epsilon^2 \dot{a}_0^* a_0 Z^* + \epsilon^2 \dot{a}_0 a_0^* Z + \epsilon^4 |a_0|^2 |Z|^2 \\ &\quad + \lambda^s (\dot{a}_0^* \dot{a}_1 S + \dot{a}_0 \dot{a}_1^* S^*) + \epsilon^2 \lambda^s (a_0 \dot{a}_1^* Z^* S + a_0^* \dot{a}_1 Z S^*) \\ &\quad + \epsilon^2 \lambda^s (\dot{a}_0^* a_1 Z^* S + \dot{a}_0 a_1^* Z S^*) + \epsilon^4 \lambda^s |Z|^2 (a_0^* a_1 S + a_0 a_1^* S^*) \\ &\quad + \lambda^{2s} |\dot{a}_1|^2 |S|^2 + \epsilon^2 \lambda^{2s} (\dot{a}_1^* a_1 Z^* + \dot{a}_1 a_1^* Z) |S|^2 + \epsilon^4 \lambda^{2s} |a_1|^2 |Z|^2 |S|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

ただし,  $\dot{a}_i \equiv \partial a_i / \partial Z$ , ( $i = 0, 1$ ) とした. 1 行目は  $S$  について 0 次の項, 2, 3 行目は  $S$  について 1 次の項, 最後の行は  $S$  について 2 次の項である.  $|D_S W|^2, |D_\Theta W|^2, |W|^2$  は前の模型で計算したものと同じ形である. まず  $\dot{a}_0 \sim 0$  となるように  $\langle Z \rangle$  を決める. そうすると  $|D_Z W|^2$  から現れる項は  $S$  の期待値を変えず,  $S$  の期待値は前の模型で計算したものと同様になる. また, この時  $D, D_S W, D_\Theta W$  の期待値も前の模型と同様であり, グラビティーノの質量も前の模型と同様,  $m_{3/2} = \langle W \rangle / M_{Pl}^2 \sim a_1 \lambda^s \Lambda / \sqrt{3} M_{Pl}$  で与えられる.

Potential の  $Z$  についての停留条件から,  $D_Z W$  の期待値が求まる. 以下の計算では  $D_Z W = x$  とおく. そうすると, Superpotential の  $Z$  での微分は  $x$  を用いて,

$$D_Z W = W_Z + \epsilon^2 Z^* W = x \quad (\text{A.9})$$

$$\therefore W_Z = x - \epsilon^2 Z^* W \simeq x - m_{3/2} Z^* \quad (\text{A.10})$$

と表せる. ただし,  $W_X \equiv \partial W / \partial X$ , ( $X = Z, S, \Theta$ ) であり,  $W_Z$  の最後の表式には  $\epsilon^2 W \simeq m_{3/2}$  であることを使った. 同様に  $D_S W, D_\Theta W$  等も  $x$  を使って書き直すと,

$$\frac{\partial}{\partial Z} D_Z W = W_{ZZ} + \epsilon^2 Z^* W_Z \quad (\text{A.11})$$

$$\simeq W_{ZZ} + \epsilon^2 Z^* (x - m_{3/2} Z^*) \quad (\text{A.12})$$

$$D_S W = W_S + \epsilon^2 S^* W \simeq W_S + m_{3/2} S^* \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial}{\partial Z} D_S W \simeq W_{SZ} + \epsilon^2 S^* (x - m_{3/2} Z^*) \quad (\text{A.14})$$

$$D_\Theta W \simeq W_\Theta + m_{3/2} \Theta^* \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial}{\partial Z} D_\Theta W \simeq W_{\Theta Z} + \epsilon^2 \Theta^* (x - m_{3/2} Z^*) \quad (\text{A.16})$$

となる. Potential の  $Z$  微分は, これらを用いて,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_F}{\partial Z} &= (D_S W)^* \frac{\partial}{\partial Z} D_S W + (D_\Theta W)^* \frac{\partial}{\partial Z} D_\Theta W + (D_Z W)^* \frac{\partial}{\partial Z} D_Z W - 3\epsilon^2 W^* \frac{\partial W}{\partial Z} \\ &\simeq (W_S^* + m_{3/2}^* S) (W_{SZ} + \epsilon^2 S^* (x - m_{3/2} Z^*)) \\ &\quad + (W_\Theta^* + m_{3/2}^* \Theta) (W_{\Theta Z} + \epsilon^2 \Theta^* (x - m_{3/2} Z^*)) \\ &\quad + x^* (W_{ZZ} + \epsilon^2 Z^* (x - m_{3/2} Z^*)) - 3m_{3/2}^* (x - m_{3/2} Z^*) \\ &= W_S^* W_{SZ} + m_{3/2}^* W_{SZ} S + \epsilon^2 W_S^* S^* (x - m_{3/2} Z^*) + \epsilon^2 m_{3/2}^* |S|^2 (x - m_{3/2} Z^*) \\ &\quad + W_\Theta^* W_{\Theta Z} + m_{3/2}^* W_{\Theta Z} \Theta + \epsilon^2 W_\Theta^* \Theta^* (x - m_{3/2} Z^*) + \epsilon^2 m_{3/2}^* |\Theta|^2 (x - m_{3/2} Z^*) \\ &\quad + x^* W_{ZZ} + \epsilon^2 Z^* |x|^2 - \epsilon^2 m_{3/2} (Z^*)^2 x^* - 3m_{3/2}^* x + 3 |m_{3/2}|^2 Z^* \end{aligned}$$

のように書ける. ここで,  $S \sim \epsilon \lambda^2$ ,  $\Theta = \lambda$ ,  $a_1 \lambda^s \sim \epsilon^{-1} m_{3/2}$  より,  $W_S, W_\Theta$  等は

$$W_S = \frac{\partial}{\partial S} (a_0 + a_1 (S\Theta^s)) = a_1 \lambda^s \sim \epsilon^{-1} m_{3/2} \quad (\text{A.17})$$

$$W_{SZ} = \frac{\partial W_S}{\partial Z} = \dot{a}_1 \lambda^s \sim \epsilon^{-1} m_{3/2} \frac{\dot{a}_1}{a_1} \quad (\text{A.18})$$

$$W_\Theta = s a_1 S \lambda^{s-1} \sim s \lambda m_{3/2} \quad (\text{A.19})$$

$$W_{\Theta Z} \sim s \epsilon \dot{a}_1 \lambda^{s+1} \sim s \lambda m_{3/2} \frac{\dot{a}_1}{a_1} \quad (\text{A.20})$$

$$W_{ZZ} \sim \ddot{a}_0 \quad (\text{A.21})$$

と書くことができる. これらを代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_F}{\partial Z} \sim & \epsilon^{-2} |m_{3/2}|^2 \frac{\dot{a}_1}{a_1} + \lambda^2 |m_{3/2}|^2 \frac{\dot{a}_1}{a_1} \\ & + \epsilon^2 m_{3/2}^* \lambda^2 x - \epsilon^2 |m_{3/2}|^2 \lambda^2 Z^* + \epsilon^4 m_{3/2} \lambda^4 x - \epsilon^4 \lambda^4 |m_{3/2}|^2 Z^* \\ & + s^2 \lambda^2 |m_{3/2}|^2 \frac{\dot{a}_1}{a_1} + s \lambda^2 |m_{3/2}|^2 \frac{\dot{a}_1}{a_1} \\ & + s \epsilon^2 \lambda^2 m_{3/2}^* x - s \epsilon^2 \lambda^2 |m_{3/2}|^2 Z^* + \epsilon^2 \lambda^2 m_{3/2}^* x - \epsilon^2 \lambda^2 |m_{3/2}|^2 Z^* \\ & + \underline{x^* \ddot{a}_0} + \epsilon^2 Z^* |x|^2 - \epsilon^2 m_{3/2} (Z^*)^2 x^* - 3 m_{3/2}^* x + 3 |m_{3/2}|^2 Z^* \end{aligned}$$

であるが, 下線を引いた2つの項に対して他の項はほとんど無視することができ, 結局,  $\partial v_F / \partial Z = 0$  であるためには,

$$D_Z W = x \sim \epsilon^{-2} |m_{3/2}|^2 \frac{\dot{a}_1}{a_1 \ddot{a}_0} \quad (\text{A.22})$$

であれば良い. 一般に  $a_1 \sim \dot{a}_1$  なので,  $D_Z W \sim \epsilon^{-2} |m_{3/2}|^2 / \ddot{a}_0$  である.

## 謝辞

本研究及び論文の作成にあたり, 指導教官の前川展祐先生には最後まで辛抱強く議論し励ましていただきました。感謝の気持ちは言葉では表し尽くせません。本当にありがとうございました。また, 共同研究者である, 大村雄司さん, 重神芳弘さんにも大変お世話になりました。ありがとうございました。最後に, 研究だけでなく日々の生活の面でも支えてくださった同期, 先輩, 後輩, スタッフの方々にも感謝しています。ありがとうございました。

## 参考文献

- [1] S. L. Glashow, “Partial Symmetries of Weak Interactions,” Nucl. Phys. **22** (1961) 579.
- [2] S. Weinberg, “A Model of Leptons,” Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264.  
A. Salam. in Elementary Particle Theory, N. Svartholm (eds.) (Almquist and Wiksells, Stockholm, 1969), p. 367.
- [3] A. Salam, “Weak and Electromagnetic Interactions,” Conf. Proc. C **680519** (1968) 367.
- [4] H. Georgi and S. L. Glashow, “Unity of All Elementary Particle Forces,” Phys. Rev. Lett. **32** (1974) 438.
- [5] H. P. Nilles, “Supersymmetry, Supergravity and Particle Physics,” Phys. Rept. **110** (1984) 1.
- [6] H. E. Haber and G. L. Kane, “The Search for Supersymmetry: Probing Physics Beyond the Standard Model,” Phys. Rept. **117** (1985) 75.
- [7] S. Dimopoulos and H. Georgi, “Softly Broken Supersymmetry and SU(5),” Nucl. Phys. B **193** (1981) 150.
- [8] N. Sakai, “Naturalness in Supersymmetric Guts,” Z. Phys. C **11**, 153 (1981).
- [9] S. Weinberg, “Baryon and Lepton Nonconserving Processes,” Phys. Rev. Lett. **43** (1979) 1566.
- [10] J. R. Ellis, M. K. Gaillard, D. V. Nanopoulos and S. Rudaz, “Uncertainties in the Proton Lifetime,” Nucl. Phys. B **176** (1980) 61.
- [11] N. Sakai and T. Yanagida, “Proton Decay in a Class of Supersymmetric Grand Unified Models,” Nucl. Phys. B **197** (1982) 533.
- [12] E. Witten, “Mass Hierarchies in Supersymmetric Theories,” Phys. Lett. **105B** (1981) 267.
- [13] D. Nemeschansky, “The Sliding Singlet,” Nucl. Phys. B **234** (1984) 379. doi:10.1016/0550-3213(84)90069-5
- [14] A. Masiero, D. V. Nanopoulos, K. Tamvakis and T. Yanagida, “Naturally Massless Higgs Doublets in Supersymmetric SU(5),” Phys. Lett. **115B** (1982) 380. doi:10.1016/0370-2693(82)90522-6
- [15] N. Maekawa, “Gauge coupling unification with anomalous U(1)(A) gauge symmetry,” Prog. Theor. Phys. **107** (2002) 597 [hep-ph/0111205].
- [16] N. Maekawa, “Neutrino masses, anomalous U(1) gauge symmetry and doublet - triplet splitting,” Prog. Theor. Phys. **106** (2001) 401 [hep-ph/0104200].

- [17] E. Witten, “Constraints on Supersymmetry Breaking,” Nucl. Phys. B **202** (1982) 253. doi:10.1016/0550-3213(82)90071-2
- [18] A. E. Nelson and N. Seiberg, “R symmetry breaking versus supersymmetry breaking,” Nucl. Phys. B **416** (1994) 46 [hep-ph/9309299].
- [19] H. Abe, T. Kobayashi and Y. Omura, “ $R$ -symmetry, supersymmetry breaking and metastable vacua in global and local supersymmetric theories,” JHEP **0711** (2007) 044 [arXiv:0708.3148 [hep-th]].
- [20] S.-G. Kim, N. Maekawa, H. Nishino and K. Sakurai, “Spontaneous SUSY breaking with anomalous U(1) symmetry in metastable vacua and moduli stabilization,” Phys. Rev. D **79** (2009) 055009 [arXiv:0810.4439 [hep-ph]].
- [21] M. Dine, A. E. Nelson, Y. Nir and Y. Shirman, “New tools for low-energy dynamical supersymmetry breaking,” Phys. Rev. D **53** (1996) 2658 [hep-ph/9507378].  
M. A. Luty and J. Terning, “Improved single sector supersymmetry breaking,” Phys. Rev. D **62** (2000) 075006 [hep-ph/9812290].  
N. Maekawa, “Vacuum selection by recollapsing,” hep-ph/0004260.  
T. Banks, “Cosmological breaking of supersymmetry?,” Int. J. Mod. Phys. A **16** (2001) 910 [hep-th/0007146].
- [22] K. A. Intriligator, N. Seiberg and D. Shih, “Dynamical SUSY breaking in meta-stable vacua,” JHEP **0604** (2006) 021 [hep-th/0602239].
- [23] K. A. Intriligator, N. Seiberg and D. Shih, “Supersymmetry breaking,  $R$ -symmetry breaking and metastable vacua,” JHEP **0707** (2007) 017 [hep-th/0703281].
- [24] A. Amariti, L. Girardello and A. Mariotti, “Non-supersymmetric meta-stable vacua in SU(N) SQCD with adjoint matter,” JHEP **0612** (2006) 058 [hep-th/0608063].  
S. A. Abel and V. V. Khoze, “Metastable SUSY breaking within the standard model,” hep-ph/0701069.  
S. Forste, “Gauging Flavour in Meta-Stable SUSY Breaking Models,” Phys. Lett. B **642** (2006) 142 [hep-th/0608036].  
M. Gomez-Reino and C. A. Scrucca, “Metastable supergravity vacua with F and D supersymmetry breaking,” JHEP **0708** (2007) 091 [arXiv:0706.2785 [hep-th]].  
R. Essig, K. Sinha and G. Torroba, “Meta-stable dynamical supersymmetry breaking near points of enhanced symmetry,” JHEP **0709** (2007) 032 [arXiv:0707.0007 [hep-th]].  
S. Abel, C. Durnford, J. Jaeckel and V. V. Khoze, “Dynamical breaking of U(1)(R) and supersymmetry in a metastable vacuum,” Phys. Lett. B **661** (2008) 201 [arXiv:0707.2958 [hep-ph]].  
A. Giveon and D. Kutasov, “Stable and Metastable Vacua in SQCD,” Nucl. Phys. B **796** (2008) 25 [arXiv:0710.0894 [hep-th]].



- A. Giveon, A. Katz and Z. Komargodski, “On SQCD with massive and massless flavors,” *JHEP* **0806** (2008) 003 [arXiv:0804.1805 [hep-th]].
- [25] K. R. Dienes and B. Thomas, “Building a Nest at Tree Level: Classical Metastability and Non-Trivial Vacuum Structure in Supersymmetric Field Theories,” *Phys. Rev. D* **78** (2008) 106011 [arXiv:0806.3364 [hep-th]].
- [26] H. Abe, T. Kobayashi and Y. Omura, “Metastable supersymmetry breaking vacua from conformal dynamics,” *Phys. Rev. D* **77** (2008) 065001 [arXiv:0712.2519 [hep-ph]].
- [27] S. R. Coleman and J. Mandula, “All Possible Symmetries of the S Matrix,” *Phys. Rev.* **159**, 1251 (1967). doi:10.1103/PhysRev.159.1251
- [28] R. Haag, J. T. Lopuszanski and M. Sohnius, “All Possible Generators of Supersymmetries of the s Matrix,” *Nucl. Phys. B* **88** (1975) 257. doi:10.1016/0550-3213(75)90279-5
- [29] J. Wess and B. Zumino, “Supergauge Invariant Extension of Quantum Electrodynamics,” *Nucl. Phys. B* **78** (1974) 1.
- [30] P. Fayet and J. Iliopoulos, “Spontaneously Broken Supergauge Symmetries and Goldstone Spinors,” *Phys. Lett.* **51B** (1974) 461. doi:10.1016/0370-2693(74)90310-4
- [31] L. O’Raifeartaigh, “Spontaneous Symmetry Breaking for Chiral Scalar Superfields,” *Nucl. Phys. B* **96** (1975) 331. doi:10.1016/0550-3213(75)90585-4
- [32] M. B. Green and J. H. Schwarz, “Anomaly Cancellation in Supersymmetric D=10 Gauge Theory and Superstring Theory,” *Phys. Lett.* **149B** (1984) 117. doi:10.1016/0370-2693(84)91565-X
- [33] C. D. Froggatt and H. B. Nielsen, “Hierarchy of Quark Masses, Cabibbo Angles and CP Violation,” *Nucl. Phys. B* **147** (1979) 277. doi:10.1016/0550-3213(79)90316-X
- [34] M. Bando and N. Maekawa, “E(6) unification with b - large neutrino mixing,” *Prog. Theor. Phys.* **106**, 1255 (2001) [hep-ph/0109018].
- [35] J. L. Chkareuli, C. D. Froggatt, I. G. Gogoladze and A. B. Kobakhidze, “From prototype SU(5) to realistic SU(7) SUSY GUT,” *Nucl. Phys. B* **594**, 23 (2001) [hep-ph/0003007].
- [36] Y. Nir and N. Seiberg, “Should squarks be degenerate?,” *Phys. Lett. B* **309**, 337 (1993) [hep-ph/9304307].
- [37] K. S. Babu *et al.*, “Working Group Report: Baryon Number Violation,” arXiv:1311.5285 [hep-ph].
- [38] T. Goto and T. Nihei, “Effect of RRRR dimension five operator on the proton decay in the minimal SU(5) SUGRA GUT model,” *Phys. Rev. D* **59** (1999) 115009 [hep-ph/9808255].
- [39] J. Hisano, D. Kobayashi, T. Kuwahara and N. Nagata, “Decoupling Can Revive Minimal Supersymmetric SU(5),” *JHEP* **1307** (2013) 038 [arXiv:1304.3651 [hep-ph]].

- [40] M. Srednicki, “Supersymmetric Grand Unified Theories and the Early Universe,” Nucl. Phys. B **202** (1982) 327. doi:10.1016/0550-3213(82)90073-6
- [41] S. M. Barr and S. Raby, “Minimal SO(10) unification,” Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 4748 doi:10.1103/PhysRevLett.79.4748 [hep-ph/9705366].
- [42] K. S. Babu and S. M. Barr, “Natural suppression of Higgsino mediated proton decay in supersymmetric SO(10),” Phys. Rev. D **48** (1993) 5354 doi:10.1103/PhysRevD.48.5354 [hep-ph/9306242].
- [43] Z. Chacko and R. N. Mohapatra, “Economical doublet triplet splitting and strong suppression of proton decay in SO(10),” Phys. Rev. D **59** (1999) 011702 doi:10.1103/PhysRevD.59.011702 [hep-ph/9808458].
- [44] N. Maekawa, Phys. Lett. B **521** (2001) 42 doi:10.1016/S0370-2693(01)01179-0 [hep-ph/0107313].
- [45] N. Maekawa, Y. Omura, Y. Shigekami and M. Yoshida, “Spontaneous SUSY breaking in natural SO(10) grand unified theory,” arXiv:1910.07679 [hep-ph].
- [46] N. Maekawa, Y. Omura, Y. Shigekami and M. Yoshida, “Spontaneous SUSY breaking without  $R$ -symmetry in supergravity,” Phys. Rev. D **97** (2018) no.5, 055015 [arXiv:1712.05107 [hep-ph]].
- [47] Y. Kawamura, H. Murayama and M. Yamaguchi, “Probing symmetry breaking pattern using sfermion masses,” Phys. Lett. B **324** (1994) 52 doi:10.1016/0370-2693(94)00107-3 [hep-ph/9402254].
- [48] Y. Kawamura, H. Murayama and M. Yamaguchi, “Low-energy effective Lagrangian in unified theories with nonuniversal supersymmetry breaking terms,” Phys. Rev. D **51** (1995) 1337 doi:10.1103/PhysRevD.51.1337 [hep-ph/9406245].
- [49] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], “Searches for Long-Lived Charged Particles in  $pp$  Collisions at  $\sqrt{s}=7$  and 8 TeV,” JHEP **1307** (2013) 122 [arXiv:1305.0491 [hep-ex]].
- [50] V. Khachatryan *et al.* [CMS Collaboration], “Search for long-lived charged particles in proton-proton collisions at  $\sqrt{s} = 13$  TeV,” Phys. Rev. D **94** (2016) no.11, 112004 [arXiv:1609.08382 [hep-ex]].
- [51] M. Aaboud *et al.* [ATLAS Collaboration], “Search for heavy charged long-lived particles in the ATLAS detector in  $36.1 \text{ fb}^{-1}$  of proton-proton collision data at  $\sqrt{s} = 13$  TeV,” Phys. Rev. D **99** (2019) no.9, 092007 [arXiv:1902.01636 [hep-ex]].