# 論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

| 報告番号 | ※　　　　　第　　　　号 |
|---|---|

氏　　　　名　　相野　眞行

論　文　題　目

SPHERE, PRODUCT AND ALMOST RIGIDITY
(球面，積および概剛性)

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
小　林　亮　一

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（数理科学）
松　尾　信　一　郎

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
納　谷　　信

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（数理科学）
太　田　啓　史

# 論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

**1. 背景**. 正曲率の閉リーマン多様体は存在自体が奇跡と言うべき空間である．その存在は稀であるため，正曲率多様体に対しては何らかの適切な観点を設定することによってリーマン多様体のグロモフ・ハウスドルフ距離に関する種々の剛性が成り立つことが期待される．グロモフによって導入されたこの考え方は，幾何学研究をグロモフ前とグロモフ後で一変させたと言ってよい．幾何学研究のスタイルは一変したが，幾何学の伝統的な研究対象である正曲率多様体の剛性の研究はグロモフ後のスタイルでも非常に面白い研究対象であり続けている．このような状況のもと，相野氏の学位申請論文のテーマは，ラプラシアンの固有値を用いた球面 $\mathbb{S}^n(1)$ と球面と距離空間の直積 $\mathbb{S}^n(1)\times X$ へのグロモフ・ハウスドルフ近似である．

**2. 論文内容.** 主定理は 2 つある．第一主定理の源は Lichnerowicz-小畠の定理である：$\mathrm{Ric}\geq(n-1)g \Rightarrow \lambda_1(g)\geq n$ であり，等号成立 $\lambda_1(g)=n$ ならば $(M,g)=S^n(1)$. 等号成立条件を決定するのが，$S^n(1)$ を単振動で特徴づける小畠の定理である：$0\neq\exists f\in C^\infty(M)$ s.t. $\mathrm{Hess}\, f+fg=0 \Rightarrow (M,g)=S^n(1)$.

この古典的結果に対応して成り立つ概剛性の試みとして Petersen,Aubry,Honda による結果がある：$\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ $\mathrm{Ric}\geq(n-1)g$ かつ $\lambda_n(g)\leq n+\delta \Rightarrow d_{\mathrm{GH}}(M,S^n(1))\leq\varepsilon$. 相野氏は小畠の定理では Ric の仮定がないことに着目して，$\mathrm{Ric}\geq(n-1)g$ を仮定しないで $\|\mathrm{Hess}\, f+fg\|$ : small（ほぼ単振動） を仮定するとどうなるか？という問題を考えた．この種の問題で意味のある結論が得られるかどうかは，概剛性が成り立つことが期待され，かつ非自明な Riemann 多様体の集団をいかに設定するかにかかっている．これは，Riemann 多様体の空間にグロモフ・ハウスドルフ距離を入れたとき，$S^n(1)$ のまわりで計量不変量で決まる関数に関していかなる形状になっているかを $\varepsilon$-$\delta$ 論法によって記述しようという試みである．

相野氏の第一主定理は次である：$\forall n\geq 2$ $\forall\varepsilon>0$ $\forall K>0$ $\forall D>0$ に対して，$\mathrm{Ric}\geq -Kg$ $\mathrm{diam}\leq D$ $\exists V\subset C^\infty(M)$ ($n$-dim subspace) s.t. $\forall f\in V$ $\|\mathrm{Hess}\, f+fg\|_{L^2}\leq\delta\|f\|_{L^2}$ という条件を満たす $n$ 次元閉 Riemann 多様体の集団に属する任意の $(M,g)$ が $d_{\mathrm{GH}}(M,S^n(1))\leq\varepsilon$ を満たすような $\delta=\delta(n,K,D,\varepsilon)>0$ が在る．論文では第一主定理の部分空間 $V$ に対する仮定が満たされる自然な設定を与えている：$S^n(1)$ に $\mathbb{R}^{n+1}$ の余接束と自然な接続の $S^n(1)$ への制限をモデルとする階数 $n+1$ の接続つきベクトル束 $E$ の接続ラプラシアン $\triangle^E$ の $\lambda_n(\triangle^E)$ が小さいという条件と同値である．向き付け可能閉 Riemann 多様体の等長はめ込み $\iota:(M,g)\hookrightarrow\mathbb{R}^{n+1}$ に対し $\lambda_n(\triangle^E)\leq\frac{2}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M|A-\mathrm{Id}|^2d\mu_\iota$ が成り立つことから，$\mathbb{R}^{n+1}$ の全臍的閉部分多様体は $S^n(1)$ に限るという古典的定理の「ほぼ全臍的」部分多様体の概剛性定理が示される．

第二主定理の源は，$\mathrm{Ric}>0$ の閉 Riemann 多様体の $\lambda_1(g)$ の下からの評価を与える Lichnerowicz 不等式が非自明な平行微分形式を持つときに改良される，という Grosjean の結果 (2002) である：$\mathrm{Ric}\geq(n-p-1)g$ $(2\leq p\leq\frac{n}{2})$ かつ $0\neq\exists\omega\in\Gamma(\bigwedge^p T^*M)$, $\nabla\omega=0\Rightarrow\lambda_1(g)\geq n-p$ $(>\frac{n}{n-1}(n-p-1))$. さらに $M$ が単連結で $\lambda_1(g)=n-p$ のとき $(M,g)=S^{n-p}(1)\times X^p$ である．

この古典型定理の「ほぼ」版では，ホロノミーの分類やドラム分解が使えなくなるという困難が生じる．これをいかに克服するか，というのが相野氏の問題意識である．この問題に対に，相野氏は距離関数の近似のアイディアにより答を出した．それが第二主定理である．$p$ 次微分形式に働く接続ラプラシアンを $\triangle_{C,p}$ と書き，その第一固有値を $\lambda_1(\triangle_{C,p})=\inf\{\frac{\int_M|\nabla\eta|^2d\mu_g}{\int_M|\eta|^2d\mu_g}\,|\,0\neq\eta\in\Gamma(\bigwedge^p M)\}$ で定義する．第二主定理は次のように述べられる：$2\leq p\leq\frac{n}{2}$ を満たす自然数 $n,p$ と任意の $\varepsilon>0$ に対して $C(n,p)>0$ と $\delta=\delta(n,p,\varepsilon)>0$ であって，次の性質をもつものが存在する：

(1) $\mathrm{Ric}\leq(n-p-1)g$ ならば $\lambda_1(g)\geq n-p-C(n,p)\lambda_1(\triangle_{C,p})^{\frac{1}{2}}$.

(2) もし $\mathrm{Ric}\geq(n-p-1)g$, $\lambda_1(\triangle_{C,p})\leq\delta$, $\lambda_{n-p+1}(g)\leq n-p+\delta$ ならば $\exists X$ (compact metric space) s.t. $d_{\mathrm{GH}}(M,S^{n-p}(1)\times X)\leq\varepsilon$ で $M$ は向きづけ可能である．

以上の 2 つの主定理では問題設定と解決の両方に独創性が発揮されている．

**3. 審査経過.** 1 月 24 日に学位審査セミナーを行った．学位審査セミナーでは 2 つの主定理の背景，問題意識，証明のアイディア，今後の展望と問題解決へのアイディアが述べられた．講演内容からも委員からの質問への答からも，相野氏が研究テーマを深く理解していることと同時に広い視野を持つことが明らかになった．以上の理由により，本学位申請論文は学位に値するという結論に至った．