別紙４

報告番号	※　　　　第　　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目 Holomorphic multiplier representations over bounded homogeneous domains
(有界等質領域上の正則乗数表現)

氏　　名 嵐　晃一

論　文　内　容　の　要　旨

有界等質領域に推移的に作用する代数群の単位元成分の作用に関する同変正則直線束を考える．本論文はこの同変正則直線束が定める表現にユニタリ化が存在する条件，及びそれらのユニタリ表現の分類を与える．

複素多様体 $\mathcal{M}$ に Lie 群 G_0 が推移的かつ正則同相写像として作用しているとする．ここで $\mathcal{M}$ 上の G_0-同変正則直線束 L に対して，正則切断全体の成すベクトル空間 $\Gamma^{hol}(L)$ 上の G_0 の表現 l が

$$l(g)s(\mathrm{z}) = gs(g^{-1}\mathrm{z}) \quad \left(g \in G_0, s \in \Gamma^{hol}(L), z \in \mathcal{M}\right)$$

で定義される．このような表現は，コンパクト Lie 群に対する Borel-Weil 理論, Hermite 型 Lie 群に対する正則離散系列表現, Heisenberg 群に対する Bargmann-Fock 表現，そして可解 Lie 群に対する Auslander-Kostant 理論など Lie 群の表現論の様々な場所に現れる．この時次の基本的な問題が考えられる:

(Q1) 表現 l のユニタリ化可能性,
(Q2) それらの表現のユニタリ同値類の決定.

ここで l のユニタリ化とは部分表現 $(l, \mathcal{H})$ で，非自明なユニタリ表現であり，包含写像 $\iota: \mathcal{H} \hookrightarrow \Gamma^{hol}(L)$ が $\Gamma^{hol}(L)$ のコンパクト開位相に関して連続であるようなもの，したがって $\mathcal{H}$ が再生核 Hilbert 空間であるもののことである．なお小林昭七の結果 [3] により，表現 l のユニタリ化を与える Hilbert 空間は存在すれば一意的である．特にユニタリ化は G_0 の既約表現である．

本論文は $\mathcal{M}$ が有界等質領域 $\mathcal{D}$ であり，群 $\mathrm{G}_0 \subset \mathrm{Aut}_{hol}(\mathcal{M})$ が代数群の単位元成分 G である場合に，問題 (Q1), (Q2) に対する解答を与える．ここで有界等質領域 $\mathcal{D}$ の正則自己同型群 $\mathrm{Aut}_{hol}(\mathcal{D})$

は Lie 群の構造を持ち，単位元成分 $\mathrm{Aut}_{hol}(\mathcal{D})^o$ はある線型代数群の単位元成分と同型であることが知られている．群 G の例として，正則自己同型群の単位元成分，Siegel 領域の実現におけるアフィン変換全体の成す Lie 群の単位元成分等がある．領域が対称であるときには，Lie 群$\mathrm{Aut}_{hol}(\mathcal{D})$ の放物型部分群の単位元成分も例になる．この設定の下，極大連結実分裂型可解 Lie 部分群 $B \subset G$（岩澤部分群）が $\mathcal{D}$ に単純推移的に作用することが知られている．

まず問題（Q1）に関して，有界等質領域上の G-同変正則直線束 L に対して，表現 l のユニタリ化可能性は $l|_B$ のユニタリ化可能性と同値であることを証明する．基準点 $p \in \mathcal{D}$ を固定し，点 p における G の等方部分群を K とおくとき，問題（Q2）に関して，表現 l のユニタリ化 $(l, \mathcal{H})$ のユニタリ同値類は，岩澤部分群 B の表現 $(l|_B, \mathcal{H})$ のユニタリ同値類とファイバー L_p への K の作用で決定されることを証明する．この証明の副産物として，直線束 L の K-同変正則直線束としての同型類は，ファイバー L_p への K の作用で決定されることが従う．これらの事実は問題（Q1），(Q2) への具体的な解答を与える．今 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{b}$ をそれぞれ Lie 群 G, K, B の Lie 環とする．複素部分代数 $\mathfrak{g}_- \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を

$$\mathfrak{g}_- = \left\{Z = X + iY \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}; \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{tX}p + i\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{tY}p \in T_p^{0,1}\mathcal{D}\right\}$$

で定めると，Tirao-Wolf の結果［4］により $\mathcal{D}$ 上の G-同変正則直線束の同型類全体は

$\mathcal{L}(G) = \{\theta \in \mathfrak{g}_-^*;$ 線型形式 θ は $\mathfrak{g}_-$ の複素一次元表現で，制限 $\theta|_{\mathfrak{k}}$ が K の一次元表現に持ち上がる $\}$

と同一視される．Cartan 部分代数 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ を正規 j-代数の構造から定まるものとし，$\mathfrak{a}_- = \{X + ijX; X \in \mathfrak{a}\} \subset \mathfrak{g}_-$ とおくと $\mathcal{L}(B) \simeq \mathfrak{a}_-^*$ となる．ここで $r = \dim \mathfrak{a}$ とし，$\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r) \in \{0,1\}^r$ に対して，$Z(\varepsilon) = \{\underline{\zeta} = (\zeta_1, \cdots, \zeta_r) \in \mathbb{R}^r; \varepsilon_k = 1$ ならば $\zeta_k = 0\}$ とおく．伊師英之は［1,2］で $\mathcal{D}$ 上の B-同変正則直線束の同型類［L］のうち表現 l がユニタリ化可能であるものを記述する部分集合 $\Theta \subset \mathfrak{a}_-^*$ と，ユニタリ同値類に対応する分割

$$\Theta = \bigsqcup_{\varepsilon \in \{0,1\}^r} \bigsqcup_{\underline{\zeta} \in Z(\varepsilon)} \Theta\left(\varepsilon, \underline{\zeta}\right)$$

を $\mathfrak{b}$ のルート空間分解におけるルート空間の重複度を用いて与えた．ここで

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathfrak{z}(\mathfrak{k})^*;\ \text{ある}\ K\ \text{の一次元表現}\ \chi\ \text{に対して}, i\lambda = d\chi|_{\mathfrak{z}(\mathfrak{k})}\}$$

とおき，また $\varepsilon \in \{0,1\}^r$，$\underline{\zeta} \in Z(\varepsilon)$，$\lambda \in \Lambda$ に対して，$\Theta\left(G, \varepsilon, \underline{\zeta}, \lambda\right) = \left\{\theta \in \mathcal{L}(G); \theta|_{\mathfrak{a}_-} \in \Theta\left(\varepsilon, \underline{\zeta}\right), \theta|_{\mathfrak{z}(\mathfrak{k})} = i\lambda\right\}$ とおき，$P = \left\{\left(\varepsilon, \underline{\zeta}, \lambda\right) \in \{0,1\}^r \times \mathbb{R}^r \times \Lambda; \underline{\zeta} \in Z(\varepsilon), \Theta\left(G, \varepsilon, \underline{\zeta}, \lambda\right) \neq \emptyset\right\}$ とする．この時パラメータ集合 $\Theta(G) = \{\theta \in \mathcal{L}(G); \theta|_{\mathfrak{a}_-} \in \Theta\}$ は $\mathcal{D}$ 上の G-同変正則直線束の同型類［L］のうち表現 l がユニタリ化可能であるものを記述し，集合の分割

$$\Theta(G) = \bigsqcup_{\left(\varepsilon, \underline{\zeta}, \lambda\right) \in P} \Theta\left(G, \varepsilon, \underline{\zeta}, \lambda\right)$$

は G のユニタリ同値類に対応する分割を与える．集合 $\Theta(G)$, P は具体的に決定可能であり，本論文では五次元の非対称有界等質領域に対する例を与える．

References

[1] H. Ishi, Representations of the affine transformation groups acting simply transitively on Siegel domains. J. Funct. Anal. 167 (1999), no. 2, 425–462.

[2] H. Ishi, Unitary holomorphic multiplier representations over a bounded homogeneous domain. Adv. Pure Appl. Math. 2 (2011), no. 3-4, 405-419.

[3] S. Kobayashi, Irreducibility of certain unitary representations. J. Math. Soc. Japan 20 (1968), 638-642.

[4] J. A. Tirao and J. A. Wolf, Homogeneous holomorphic vector bundles. Indiana Univ. Math. J. 20 (1970/1971), 15-31.