論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　　第　　　　号

氏　　　　名　　嵐　晃一

論　文　題　目

Holomorphic multiplier representations over bounded homogeneous domains

(有界等質領域上の正則乗数表現)

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（数理学）
植　田　好　道

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　Ph.D.
宇　澤　　達

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　Ph.D.
森　吉　仁　志

委　員　大阪市立大学大学院理学研究科　教授　博士（理学）
伊　師　英　之

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

コンパクト Lie 群に対する Borel–Weil 理論や Hermite 型 Lie 群の正則離散系列表現のように、等質複素多様体上の同変正則直線束の正則切断の空間上に重要な既約ユニタリ表現が自然に構成される。一般的な枠組みで、このような表現はコヒーレント状態表現として Lisciecki が、また一般化最高ウェイト表現として Neeb が研究している。特に Lisciecki は、変換群がユニモジュラーであるという条件の下、コヒーレント状態表現を完全に分類した。コヒーレント状態という名称から明らかなように、Lisciechi の扱った表現は、表現論や函数解析、複素幾何に加え、幾何学的量子化の理論を通じて数理物理の話題にも関連する。

本申請論文に於いて申請者は、有界等質領域 D に推移的に作用している Lie 群 G に関する同変正則直線束の正則切断の空間に実現されるユニタリ表現を研究し、それらを完全に分類することに成功した。ところで、ユニモジュラー Lie 群が推移的に作用する有界等質領域は対称なものに限るという埴野の定理がある。すなわち、考察の有界等質領域 D が非対称な場合は、G は必然的にユニモジュラーではなく、上述の Lisciecki の研究の枠組みに入らないことは、本申請論文の価値を判断する上で重要である。

一般に有界等質領域 D は可縮な擬凸領域なので、D 上の正則直線束は全て自明であり、それに付随する G の表現は、正則乗数 (holomorphic multiplier) $m : D \times G \to \mathbb{C}^\times$ を用いて D 上の正則函数の空間 $\mathcal{O}(D)$ 上に、次のように実現される：

$$(T_m(g)f)(z) := m(g^{-1}, z)^{-1} f(g^{-1} \cdot z) \qquad (f \in \mathcal{O}(D),\, z \in D,\, g \in G).$$

このとき、$\mathcal{O}(D)$ に埋め込まれた非自明な Hilbert 空間 $\mathcal{H}_m$ 上に実現する G のユニタリ表現 $(T_m, \mathcal{H}_m)$ を T_m のユニタリ化と呼ぶ。なお、ユニタリ化を与える Hilbert 空間 $\mathcal{H}_m$ は存在すれば一意であり、$(T_m, \mathcal{H}_m)$ は既約表現となる。すなわち、以上のユニタリ化を得る手続きは G の既約ユニタリ表現の組織的な幾何学的実現法である。すると、既約ユニタリ表現の分類論の観点から次の問題が生じる：

- 表現 T_m がユニタリ化 $(T_m, \mathcal{H}_m)$ を持つための条件は何か？
- 2つのユニタリ化 $(T_m, \mathcal{H}_m)$ と $(T_{m'}, \mathcal{H}_{m'})$ が同値になるのはいつか？

本申請論文では、考察の Lie 群 G が実代数群の連結成分であるという仮定の下で議論を展開している。この場合は、G の極大連結分裂型可解 Lie 部分群 (岩澤部分群) B が D に単純推移的に作用する。可解 Lie 群 B の Lie 代数 $\mathfrak{b}$ には正規 j 代数と呼ばれる構造が入り、詳細な解析が可能である。実際、D 上の正則函数の空間に実現される B のユニタリ表現については、伊師による先行研究がある。

申請者は本申請論文に於いて、以上のような G の表現の解析を B についてのそれに帰着させる方法を確立する次の 2 つの定理を得た。

定理 A（Theorem 1.7）T_m のユニタリ化が存在することは、その B への制限 $T_m|_B$ がユニタリ化を持つことと同値である。

定理 B（Theorem 1.8）ユニタリ化 $(T_m, \mathcal{H}_m)$ と $(T_{m'}, \mathcal{H}_{m'})$ が同値であるためには、それらの B への制限が同値あってかつ 1 点のファイバーにおけるイソトロピー表現が一致することが必要十分である。

なお、これらの定理に可解 Lie 群 B についての先行研究とを組み合わせることにより、T_m のユニタリ化として得られる G の表現は完全に分類される。すなわち、上記 2 定理は上述の問題に対する完全解答である。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

有界等質領域 D 上の調和解析に関する先行研究の多くは、D を Siegel 領域、B をアファイン変換群として実現して考察する。このとき、D 上の正則函数の空間にアファイン変換群の作用に関して不変なものを構成するのは比較的易しいが、その作用を正則同型群に拡張するのが非自明で難しいところである。この典型的な研究方針とは異なり、申請者による定理 A は本質的に新しい視点を与えるものであり、新奇性が高い。さらに、その証明が単純明快であることが素晴らしい。他方で、定理 B の証明は幾つもの技術的困難を乗り越えて得られる労作である。実際、定理 B の証明は、考察の Lie 群 G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ についての代数的な命題 (Proposition 4.23) に帰着するが、$\mathfrak{g}$ の構造は正規 j 代数 $\mathfrak{b}$ のそれと比較して複雑で取り扱いが難しい。この困難を乗り越え、Siegel 領域の幾何学的構造も利用して、最終的に $\mathfrak{g}$ の階数についての帰納法によって上述の代数的命題の証明を完成したところに申請者の力量が現れている。

以上のように、申請論文は有界等質領域上の調和解析の基本的な問題に完全な解答を与えるものであり、学位論文に相応しい内容を持つ。

令和２年１月３１日に行われた学位審査公開セミナーにおいても、申請者は、研究の背景、本申請論文の主結果とその応用、さらには今後の研究課題を明解に示した。さらに、講演・質疑応答を通して、申請者に学位を授与されるに相応しい学識を示した。

以上のことから、学位審査委員会は申請者には博士 (数理学) の学位が授与される資格があるものと判断する。