

別紙 4

報 告 番 号	※	第	号
---------	---	---	---

主 論 文 の 要 旨

論文題目 Multiple Zeta Values and Multi-Poly-Bernoulli
Numbers in Positive Characteristic

(正標数における多重ゼータ値と多重ポリ Bernoulli 数)

氏 名 原田 遼太郎

論 文 内 容 の 要 旨

数論の分野において、数体の場合（標数 0）と有限体上の関数体の場合（正標数）との間で類似が成り立つということが知られている．この現象に基づき正標数の数論を考えることが可能であり、数体において成り立つ結果の正標数類似がどこまで構成可能かということが基本的な問題の一つとされている．

本論文では正標数の多重ゼータ値と多重ポリ Bernoulli 数に着目している．多重ゼータ値とは Riemann ゼータ値を多変数化した無限級数であり、1776 年の Euler による二重ゼータ値の研究から端を発するものである．2004 年に Thakur がその正標数類似を導入している．本論文の第一章から第三章にかけて正標数の多重ゼータ値における積和公式に関する予想や、正標数の有限多重ゼータ値と正標数の交代多重ゼータ値について Bernoulli 数の正標数類似の多重化も含めたこれまでの研究結果をまとめている．

第一章では Lara Rodríguez により 2010 年に構成された full conjecture を解決している．これは正標数の二重ゼータ値の間で成り立つ積和公式についての予想式であり、インデックスが特別な場合においてより明示的な積和公式を与えるものである．一方で full conjecture は誤りを含んでおり、実際に第一章中で反例を与えている．さらにこの予想に関して、その誤りを修正したうえで証明を与えている．証明には Chen (2015) による積和公式の別証明と Lucas (1878) による二項係数の合同式を用いている．

第二章では正標数の Bernoulli 数、即ち Bernoulli-Carlitz 数を多変数化した多重ポリ Bernoulli-Carlitz 数を導入している．これは今富・金子・武田の 2014 年の論文に

より導入された多重ポリ Bernoulli 数の正標数類似でもある. 同じく同論文により多重ポリ Bernoulli 数は階乗と第二種 Stirling 数を用いた明示公式で表されること, 金子-Zagier の有限多重ゼータ値との関係を持つことなどが示されており, 本論文ではこれらの結果の正標数類似が Carlitz 階乗, 第二種 Stirling-Carlitz 数, Chang-三柴の有限多重ゼータ値を用いて示されている. 特に明示公式に関しては, 金子(元)と小松の 2016 年の論文中の Bernoulli-Carlitz 数の明示公式に関する一般化を与えている. その一方で多重ポリ Bernoulli-Carlitz 数が 0 となる条件も与えられており, この結果は標数 0 の場合ではまだ示されていない性質である.

第三章では交代多重ゼータ値の正標数類似を導入し, その基本的性質を明らかにしている. 正標数において交代多重ゼータ値は, (正標数の)整数環の単元により多重ゼータ値の各項の分子をひねって定義される. そして正標数の交代多重ゼータ値に関してこれらが非自明であること, 積和公式を満たすこと, 周期であること, ある線形独立性を満たすことが示されている. 非自明性に関しては Thakur (2009)によるモニック多項式のべき和の次数に関する不等式を用いて, 正標数の交代多重ゼータ値が付値をとった際に 0 でないことを示した. 積和公式については Chen (2015)による正標数の二重ゼータ値における積和公式を拡張し, 帰納法を用いることで示されている. 周期に関しては, Anderson-Thakur の 2009 年の論文に表れるプレ t -モチーフをもとに正標数の交代多重ゼータ値が周期行列に表れるプレ t -モチーフが実際に構成されている. これにより, Anderson-Brownawell-Papanikolas の判定法(2004)が適用可能となり, さらに Chang (2016)による MZ-property を拡張することでインデックスの和が異なる正標数の交代多重ゼータ値たちは線形独立であることが証明されている.