

論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

氏 名 原田 遼太郎

論 文 題 目

Multiple Zeta Values and Multi-Poly-Bernoulli Numbers in Positive Characteristic (正標数における多重ゼータ値と多重ポリ Bernoulli 数)

論文審査担当者

主 査 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士
松 本 耕 二

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (理学)
古 庄 英 和

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士
金 銅 誠 之

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (数理科学)
中 岡 宏 行

論文審査の結果の要旨

整数論の分野においては、代数体(標数 0 の世界)と有限体上の関数体の場合(正標数の世界)の間には種々の数学的現象の類似が存することが知られている。標数 0 における種々の現象の正標数類似を探ることは現在も整数論の中心的課題であるといえる。

多重ゼータ値と多重ポリ Bernoulli 数は標数 0 の世界の対象として近年盛んに研究されているが、原田氏はそれらの正標数類似について基本的な結果を学位論文で得ている。この学位論文は 4 章からなり、第 0 章では多重ゼータ値と多重ポリ Bernoulli 数の研究の動機と歴史を標数 0 の世界と正標数の世界を対比しながら解説している。第 1 章から第 3 章が原田氏の得た結果で、それぞれの章が原田氏の論文及びプレプリント 1 編に対応している。

第 1 章では、正標数の二重ゼータ値に関する Lara Rodríguez の予想について論じている。標数 0 の世界においては、多重ゼータ値が調和積と呼ばれる積和公式を満たすことが知られている。一方で正標数の世界においては、Thakur が 2004 年に多重ゼータ値の正標数類似を構成し、同種の積和公式が存することを 2010 年に示している。しかしながら Thakur の結果は存在証明のみにとどまりこの公式の明示的な表示までは与えていない。Lara Rodríguez は 2010 年に、特殊な二重の指数に対してこの積和公式を明示的に書き下す 4 つの式を予想 (Lara Rodríguez' full conjecture) として提出した。原田氏は Chen(2015) と Lucas(1878) の結果を用いることで一つ目と二つ目の式を肯定的に解決している。一方、三つ目と四つ目の式については具体的に反例を構成することで否定的に解決し、さらに正しい形を導きそれを肯定的に解決している。この結果は今後の正標数の多重ゼータ値の調和積の研究に関しての足がかりになる研究といえる。

第 2 章では、多重ポリ Bernoulli-Carlitz 数について論じている。標数 0 の世界においては、2014 年に今富-金子(昌)-武田はポリ Bernoulli 数の一般化である多重ポリ Bernoulli 数を導入し、これの階乗数と第二種 Stirling 数を用いた明示的な表示を与え、また金子(昌)-Zagier の有限多重ゼータ値との関係を明らかにした。一方、正標数の世界においては、1935 年に Carlitz により Bernoulli-Carlitz 数と呼ばれる Bernoulli 数の正標数類似が導入されており、2016 年に金子(元)-小松によりこれの第二種 Stirling-Carlitz 数 (Stirling 数の正標数類似) を用いた明示的な表示が得られている。原田氏は、これの多重化に当たる多重ポリ Bernoulli-Carlitz 数を Chang(2014) の Carlitz 多重ポリログを用いて構成を与え、Carlitz-階乗数と第二種 Stirling-Carlitz 数を用いて、その明示的な表示を与えている。さらに、Chang-三柴が 2017 年に導入した有限多重ゼータ値の正標数類似との関係も明らかにしている。この結果により今富-金子-武田の研究が正標数の世界でも正しく定式化され確立されたといえる。

第 3 章では、正標数の交代多重ゼータ値について論じている。標数 0 の世界では、交代多重ゼータ値とは多重ゼータ値の分子を捻ることで定義される実数である。原田氏は、これの正標数類似を導入し、次の 4 つの基本的性質を明らかにしている。一つ目は正標数の交代多重ゼータ値に関してこれらが非自明であることである。この非自明性は Thakur (2009) によるモニック多項式のべき和の次数に関する不等式を用いて示されている。二つ目は正標数の交代多重ゼータ値が積和公式を満たすことである。これは 2010 年に Thakur が示した正標数の多重ゼータ値の結果の拡張といえる。この積和公式は Chen (2015) による正標数の二重ゼータ値における積和公式を拡張し、帰納法を用いることで示されている。三つ目は正標数の交代多重ゼータ値が周期であることである。これは Anderson-Thakur の 2009 年の論文に現われるプレタモチーフをもとに、正標数の交代多重ゼータ値が周期行列に現われるようなプレタモチーフを実際に構成している。四つ目は正標数の交代多重ゼータ値がある種の線形独立性を

論文審査の結果の要旨

満たすことである。詳しくは、原田氏は Anderson-Brownawell-Papanikolas の判定法 (2004) を適用し、さらに Chang (2016) による MZ-property を拡張することで指数の和が異なる正標数の交代多重ゼータ値たちは線形独立であることを示している。この結果は正標数の世界の様々な周期の研究に関して発展が期待できる基本的な結果といえる。

このように、原田氏の学位論文は正標数の多重ゼータ値および多重ポリ Bernoulli 数の研究を着実に前に進めるものであり、学位論文として十分な内容を持つものである。第一章の成果は副論文として、Int. J. Number Theory 誌へ掲載されており第二章の成果は副論文として、J. Number Theory 誌への掲載が決定している。第三章の成果は副論文として、arxiv に挙げられており現在学術雑誌に投稿中である。

令和2年1月30日に行われた学位審査セミナーにおいても、原田氏の問題意識とその解決への基本的アプローチおよび主結果の意義などが明快に示され、審査委員からの質問にも的確に応答がなされた。

以上のことから、学位審査委員会は、申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する。