別紙４

報告番号	※　　　　　第　　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目 A study on Fontaine's perfectoid rings and their algebraizations
（フォンテーニュのパーフェクトイド環とその代数化について）

氏　　名 仲里　渓

論　文　内　容　の　要　旨

近代の整数論においては混標数的な対象と正標数的な対象の間にある種の対応関係があることが知られていた。２０１１年、Scholze はパーフェクトイド空間を導入することでこの対応を扱うための確固とした枠組みを構築し、その理論は Deligne のウェイト･モノドロミー予想を始めとする数論幾何学における諸問題に対し多くの進展をもたらし続けている。さらにパーフェクトイド空間は Bhatt、Shimomoto らによって可換環論へも応用され、２０１６年に André はこの流れを汲み長年未解決であった直和因子予想を完全に解決した。

本論文ではこのパーフェクトイド空間（および代数）の理論について以下に述べる二つの方向への一般化に関する話題を扱う。パーフェクトイド代数は元々ある種の Banach 代数として導入されたが、これはその整構造を反映した部分環（整パーフェクトイド環）とその単項イデアル（定義イデアル）の組によっても特徴付けることが可能である。ここで整パーフェクトイド環は定義イデアルによる adic 位相について完備であることが要請されている。

まず一つの一般化の方法として、定義イデアルが単項でない場合への拡張を考えることができる。本論文ではこれに関連して、完備な正則局所環 R 上の忠実平坦な代数で R の極大イデアルに関する位相が入った adic 環から関手的にパーフェクトイド空間を構成できることを示した。構成の鍵となるのは Fujiwara-Kato による Zariski-Riemann 空間を用いたリジッド空間の視覚化である。また、この結果における「パーフェクトイド空間」は Scholze が導入時に課していた「パーフェクトイド体上に定義されている」という仮定を満たしていない。このような新しいクラスのパーフェクトイド空間は Fontaine が定義した「base ring を持たないパーフェクトイド環」を基礎に据えることで扱えるようになる。そこで本論文では将来の応用を見据え Fontaine のパーフェクトイド環の基礎理論を展開した。多くの部分は Scholze、Kedlaya-Liu らの先行研究と同様に議論を進めることができるが、パーフェクトイド空間のレベルでの混標

数的な対象と正標数的な対象の対応関係は（base の空間がない場合には）先行研究では取り扱えないものとなっていた。本論文では distinguished ideal sheaves という概念を導入してこの部分を処理している。

パーフェクトイド空間（代数）の理論の二つ目の一般化の方法として、整パーフェクトイド環の完備性を弱めることが考えられる。本論文では後半部において、André が直和因子予想を解く際に自ら示したパーフェクトイド代数についての定理（Perfectoid Abhyankar's Lemma）での完備性の仮定を、（応用上重要な場合に）Zariski 性にまで弱められることを証明した。この結果は日本大学の下元数馬准教授との共同研究に基づいている。その証明においては（非 Archimedes 的な状況での）Riemann の拡張定理の代数的な変種を確立することが要点となっており、それを示したことがこの共同研究に対する申請者の主要な貢献である。本論文ではこの拡張定理を、与えられた関数環の中の複数の整構造が adic 空間を用いて記述できることを示し、それらの空間を比較することで証明している。

なお、Scholze によるパーフェクトイド空間の理論（および本論文中）では Hensel 化の技巧が使われており、それは Elkik による Noether 環に対する Hensel 的近似定理に基づいている。一方でほとんどのパーフェクトイド代数は Noether 環でないため、適用の際は慎重な議論が必要となる。今後パーフェクトイドの理論が発展していく過程でより一般的な状況で Elkik 型の近似定理が要求される可能性を考慮し、本論文では付録において Elkik の近似定理の適用範囲についていくつかの限界を提示する反例を与えた。