

論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

氏 名 仲里 溪

論 文 題 目

A study on Fontaine's perfectoid rings and their algebraizations

(フォンテーニュのパーフェクトイド環とその代数化について)

論文審査担当者

主 査 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学)
高 橋 亮

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (数理科学)
藤 原 一 宏

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (理学)
伊 山 修

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (理学)
古 庄 英 和

論文審査の結果の要旨

申請者はこの申請論文において、数論幾何学と可換環論の境界領域における研究を行っている。特に P. Scholze によって導入された perfectoid 空間論を起点として二つの新しい結果を得ている。以下、具体的に説明をする。

正標数 p の可換環で Frobenius 準同型が同型を与えるものは perfect (完全) と言われるが、perfect な環については微分加群など繊細な量が消滅し、構造が極めて簡単になることが知られている。Scholze は混標数におけるその類似を発見し、perfectoid と名付け、その基本性質を確立した。通常現れる perfectoid 環は Banach 代数の構造を持っており、その幾何学的実現は perfectoid 空間と言われる解析空間となる。

申請者による第一の主結果はこの Scholze 理論で従来扱われていない実例に関するものである。

Theorem 0.1. 剰余体が perfect である完備正則局所環 (R, m) とその正則パラメータ系 $\{x_1, \dots, x_d\}$ に対し極限 $\varinjlim_n R[x_1^{1/p^n}, \dots, x_d^{1/p^n}]$ の m -進完備化を R_∞ とする (R の perfectification). X_∞ を形式スキーム $\mathrm{Spf} R_\infty$, \mathcal{X}_∞ をそれに伴うリジッド空間 X_∞^{rig} とすると \mathcal{X}_∞ の可視化空間 (visualization) は perfectoid 空間となる。

Scholze 理論には Kedlaya–Liu 他、多くの補足研究があるが、この定理の非自明な点は \mathcal{X}_∞ の取り扱いが先行研究の範囲に収まっておらず、基礎的な事項の再確認や技術的拡張が必要となるところにある。実際、申請者は Fontaine の定義 (現時点で最も一般的な perfectoid 環の定義) に基づき必要な事項を細部まで確認、確立しており、これがサーベイ部分も含め申請論文の多くの部分を占めている。Scholze 理論では perfectoid 空間を正標数の空間に変換する tilting 関手が存在しエタール位相同型を与えるが、これらも一般の場合に (特に上の定理の \mathcal{X}_∞ に適用可能な形に) に拡張される。定理には既に応用が発見されており、今後の数論幾何学における研究 (特に純性予想の研究) に有効である。

もう一つの結果は perfectoid 空間の可換環論 (特にホモロジカル予想) への応用に関係したものである。可換環論における難問として残っていた混標数のネーター完備局所整域に対する big Cohen–Macaulay algebra の存在は André により肯定的に解決されたが、それは perfectoid 空間論に基づくものであった。その際に関数論における Riemann の拡張定理の perfectoid 類似が重要な役割を果たすが、申請者は以下の弱い形の拡張定理 (有理関数に対する拡張定理) が成立することを見出した。

Theorem 0.2. A を π -進位相 (ただし $\pi \in A$ は非零因子) に関し Zariskian かつネーター環上整な環, $g \in A$ を非零因子とする。 $A[\frac{\pi^j}{g}]$ の $A[\frac{1}{\pi g}]$ における整閉包の $j \geq 0$ に関する逆極限は、 A の $A[\frac{1}{\pi g}]$ における整閉包と一致する。

これは有理関数に限るものの、拡張定理が perfectoid に限らずかなり一般的な環に対し成り立つことを示しており、特に完備性の仮定が大きく緩和されている。この定理は申請者と下元数馬 (日大) との共同研究の中で見出されたものである (副論文 1, 2 参照)。共同研究に基づき下元は Roberts による問題 (完備ネーター局所整域 R とその絶対整閉包 R^+ に対し中間環 B で almost Cohen–Macaulay algebra となるものが存在するか) にほぼ肯定的な解答を与えている。その際、上記定理で完備性を仮定していないことが重要な役割を果たしている。

また上記の二定理と直接関係はしないが、申請者は数論幾何学において基本的な Elkik 近似定理が無条件には成り立たないことを示す反例も構成しており、この結果については既に雑誌掲載済みである (参考論文)。

このように申請者によって与えられている結果は先行研究に依存しているが結果は新しく、既に応用があるだけでなく今後の応用も期待される。下元氏との共同研究の部分については委員会として精査しており、上述の結果は申請者によるものであると確認している。

2020年2月21日に行われた学位審査セミナーも、申請者の結果が非専門家にも伝わるよう一定の工夫がなされており、質問に対する応答も的確なものであった。以上によって、学位審査委員会は、申請者には博士 (数理学) の学位が授与される資格があるものと判断する。