論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※　　　　第　　　号

氏　　　　名　　江澤　樹

論　文　題　目

APPROXIMATING A FIXED POINT OF A FINITE FAMILY OF MAPPINGS ON A CAT(1) SPACE
(CAT(1)空間における有限個の写像の不動点近似)

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
小　林　亮　一

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
納　谷　　信

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（数理学）
植　田　好　道

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士(数理科学)
松　尾　信　一　郎

論文審査の結果の要旨

論文タイトル：APPROXIMATING A FIXED POINT OF A FINITE FAMILY OF MAPPINGS ON A CAT(1) SPACE

申請者：江澤樹

結論：本論文は学位論文に値する．

1．背景. Halpern (1967) は Browder の不動点定理の構成的証明を動機として，実 Hilbert 空間で次の問題を考えた：C を閉凸集合，$\{\alpha_n\}$ を $(0,1)$ 内の数列，$T : C \to C$ を非拡大 (1-Lipschitz) 写像とする．漸化式 $x_1 = x \in C$, $x_{n+1} = (1-\alpha_n)Tx_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ で定められる点列 $\{x_n\}$ はどのような条件下で T の不動点に収束するか? Wittmann (1992) が与えた収束スキーム（Halpern 型収束スキーム）は次である：$u, x_1 \in C$ を固定する．$x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n)Tx_n$, $\alpha_n \to 0$, $\sum \alpha_n = \infty$, $\sum |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty \Rightarrow x_n \to P_F u$．ここで P は正射影，$F = F(T)$ は T の不動点集合である．Wittmann 以降，不動点集合が空でないことを仮定した上で収束スキーム自体の研究に特化した研究方向がある．本論文はこのような不動点近似の研究の流れの中で書かれたものである．

2．論文内容. 本論文の主定理は 3 つある．3 つの主定理は，いずれも先行結果では単独の非拡大写像だったものを有限複数個に一般化したり，CAT(0) 空間で考えていたものを CAT(1) 空間で考えるという形をとっている．ここで CAT(0) (resp. CAT(1)) は曲率が 0 (resp. 1) 以下の測地的距離空間を意味する．Atsushiba-Takahashi (1999) は Hilbert 空間の閉凸集合から自分自身への r 個の非拡大写像 $\{T_i\}$ で共通の不動点集合 $F \neq \emptyset$ を持つものと $(0,1)$ 内の数列 $\{\alpha_{n,i}\}$ から W 写像というものを構成して，与えられた u, x_1 に対しある種の漸化式で定められる点列 $\{x_n\}$ が $P_F u$ に収束する Halpern 型収束スキームを定式化した．Kimura-Satô (2013) は CAT(1) 空間において単独の非拡大写像に対する Halpren 型収束スキームを与えた．第 1 主定理は，Kimura-Satô の結果を複数有限個の非拡大写像を含むクラス（quasi-nonexpansive かつ Δ-demiclosed) に拡張したものである：X を任意の 2 点間の距離が $\frac{\pi}{2}$ 未満の CAT(1) 空間とする．$T_1, \dots, T_r : X \to X$ をある条件を満たす非拡大写像で $F = \cap F(T_i) \neq \emptyset$ であるもの，$[a, 1-a]$ 内の数列 $\{\alpha_{n,i}\}$ $(n = 1, 2, \dots; r = 1, \dots, r$, $a \in (0, \frac{1}{2}))$，$\{W_n\}$ を $T_1, \dots, T_r$ と $\{\alpha_{n,i}\}$ から構成される W 写像 (Atsushiba-Takahashi 1999) とする．$\{\beta_n\}$ は $\beta_n \in (0,1)$, $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$, $\sum \beta_n = \infty$ を満たすとする．もし (a) $\sup_{v,v'} d(v, v') < \frac{\pi}{2}$, (b) $d(u, P_F u) < \frac{\pi}{4}$ で $d(u, P_F u) + d(x_1, P_F u) < \frac{\pi}{2}$, (c) $\sum \beta_n^2 = \infty$ のいずれか 1 つが成り立てば，$x_{n+1} = \beta_n u \oplus (1-\beta_n)W_n x_n$ という漸化式で定められる点列 $\{x_n\}$ は $P_F u$ に収束する．ここで記号 $\oplus$ は測地線の内分点をとることを意味する．

証明自体は，3 角不等式と，Hilbert 空間における中線定理の CAT(1) 空間の場合の類似物と解釈される不等式（cos が $(0, \frac{\pi}{2})$ において monotone, concave であることに基づく）を使い回す初等的なものである．収束スキームの先行研究が蓄積された結果，とくに Saejung-Yotkaew のある種の漸化式で定義される実数列が 0 に収束するための十分条件に関する結果 (2012) を巧みに使いこなして証明（不等式の連鎖）を組み立てるところに，江澤氏の工夫を見てとれる．

Halpern 型収束スキームの他に CQ 射影法と収縮射影法という収束スキームが知られている．本論文の第 2 および第 3 主定理は，拡大写像が単数複数か，および空間が何かで分類すると，複数で CAT(0) の場合や単独で CAT(1) の場合に定式化された射影法を使う収束スキームの先行結果 Nakajo-Takahashi (2003), Nakajo-Shimoji-Takahashi (2006), Solodov-Svaiter (2000)（以上，CQ 射影法）Takahashi-Takeuchi-Kubota (2008), Kimura-Takahashi(2009), Kimura(2010)（以上，収縮射影法）を，CAT(1) かつ複数の非拡大写像の場合に一般化したものである．例えば第 2 主定理：C は CAT(1) とくに Hilbert 球面の閉凸部分集合とくに任意の 2 点間の距離 $< \frac{\pi}{2}$ となるものとする．$[a, 1-a]$ 内の数列 $\{\alpha_{n,i}\}$ $(n = 1, 2, \dots; r = 1, \dots, r$, $a \in (0, \frac{1}{2}))$ とする．$T_1, \dots, T_r : X \to X$ を非拡大写像で $F = \cap F(T_i) \neq \emptyset$ であるものとする．$\{W_n\}$ を $T_1, \dots, T_r$ と $\{\alpha_{n,i}\}$ から構成される W 写像とする．与えられた $x_1 \in C$ に対し，$y_n = W_n x_n$, $C_n = \{z \in C \mid d(y_n, z) \le d(x_n, z)\}$, $Q_n = \{z \in C \mid \cos d(x_1, x_n) \cos d(x_n, z) \ge \cos d(x_1, z)\}$, $x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_1$ で定められる点列 $\{x_n\}$ は $P_F x_1$ に収束する．

証明は主定理 1 の証明の技法の延長上にある議論でなされるが，新しいアイディアを含んでいる．

3．審査経緯. 公開学位審査セミナーを 2 月 25 日に行った．主定理 1 は Y.Kimura 氏との共同研究であるが，証明の最も本質的部分である Saejung-Yotkaew の漸化式に乗せる議論は江澤氏によるものであることを確認している．主定理 2,3 は江澤氏単独の結果である．学位審査セミナーでの講演は研究の背景と証明の本質から成る論旨明快なものであった．質疑応答への答も的確であった．収束スキーム研究への貢献には一定の価値があると認められることから，本論文は学位論文に値すると判断した．