別紙 4

| 報告番号 | ※　　　　第　　　　号 |
|---|---|

# 主　論　文　の　要　旨

論文題目 Embedding optimization problems for a graph related to Laplacian eigenvalue maximization
（ラプラシアン固有値の最大化に関連するグラフの埋め込み最適化問題）

氏　　名 五明　工

## 論　文　内　容　の　要　旨

Göring-Helmberg-Wappler によって有限グラフのユークリッド空間への埋め込みに関する最適化問題が導入された．その問題は, absolute algebraic connectivity と呼ばれる最適値を与えるラプラシアン最小正固有値の最大化問題の, 半正値プログラミングの意味での双対問題として得られる．有限グラフ $G=(V,E)$ に対し, 頂点上のパラメーター $s \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{|V|}$ と辺上のパラメーター $l \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{|E|}$ を与えたとき, それらの最適化問題はパラメーター $s, l$ 付きとして一般化される．Göring らは, 一般化された埋め込み問題における最適埋め込みが実現できる空間の最小次元から rotational dimension を定義した．rotational dimension (以下 $\mathrm{rotdim}(G)$ と記す) はグラフのマイナーによる順序列に対して単調に変化するグラフ不変量である．すなわち $G'$ が $G$ のマイナーであるならば $\mathrm{rotdim}(G) \geq \mathrm{rotdim}(G')$ が成り立つ．

申請者は次の 2 つについての研究を行った．(i) 頂点数の多い完全部分グラフを持つグラフの rotational dimension の考察, (ii) Göring らによって導入された問題とは別の埋め込み問題に関する考察．

(i) 完全グラフ $K_n$ から 1 辺を取り除いたグラフの rotational dimension を決定することによって, rotational dimension による完全グラフの特徴付けを行った．

**定理 1.** $n$ 頂点グラフ $G$ において, $G=K_n$ であることの必要十分条件は $G$ の *rotational dimension* が $n-1$ となることである．

また弦グラフと呼ばれる，その内部の長さ 4 以上の全ての閉路において，その閉路で隣接しないある 2 頂点が辺でつながれているようなグラフに着眼し，その rotational dimension についても考察した．Göring らによる結果から rotational dimension は clique number や tree-width といった別のグラフ不変量によって上下から評価されるが, $G$ が弦グラフのときこの両不等式はタイトなものになる．この弦グラフの性質を用いることによって, rotational dimension を保ちつつ，頂点数の多い弦グラフを構成する方法を考案した．

(ii) 有限グラフに対して, Göring らによるグラフ埋め込み問題とは別の埋め込み問題を導入した．以下パラメーター $s, l$ を固定し, $M := \sum_{i \in V} s_i$ とする．

**問題 1.**

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & \|\frac{1}{M}\sum_{i \in V} s_i v_i\|^2 \\ \text{subject to} & \frac{1}{M}\sum_{i \in V} s_i \|v_i\|^2 = 1, \\ & \|v_i - v_j\| \le l_{ij}, \quad \forall ij \in E, \\ & v_i \in \mathbb{R}^n, \quad \forall i \in V. \end{array}$$

Göring らによる埋め込み問題はラプラシアン最小正固有値の最大化問題と双対関係にあるが, 我々の問題においても同様であることを明らかにした．

**定理 1.** 我々の埋め込み問題はラプラシアン最小正固有値の最大化問題の双対問題である．

さらに, 様々な多面体に対して, その 1-スケルトンと同型なグラフの最適埋め込みは, もとの多面体の 1-スケルトンとして実現されることを確認した．例えば, フラーレングラフ $C_{60}$ の最適埋め込みは切頂 20 面体 (サッカーボール) によって与えられる．

(ii) における結果は小林俊公氏, 近藤剛史氏, 納谷信氏との共同研究によるものである．