

論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

氏 名 五明 工

論 文 題 目

Embedding optimization problems for a graph related to Laplacian
eigenvalue maximization

(ラプラシアン固有値の最大化に関連するグラフの埋め込み最適化問題)

論文審査担当者

主 査 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 Ph.D.
森 吉 仁 志

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士
納 谷 信

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 Ph.D.
藤 江 双 葉

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士(数理科学)
川 村 友 美

論文審査の結果の要旨

グラフの頂点集合および辺集合にウェイト（以下それぞれ頂点ウェイト，辺ウェイトとよぶ）が与えられると，頂点集合上の関数に作用するラプラシアンという半正値な線形作用素が定義される．有限連結グラフに対して，この作用素の最小固有値はゼロであり，2番目に小さい固有値は正となる．総和を一定とした辺重み全体に涉ってこの第2固有値を最大化するという問題を背景として，本申請論文では，この問題と関連したグラフの埋め込みの最適化を取り扱い，その最適埋め込みを決定する問題を考察している．ここでグラフの埋め込みとは，頂点集合からユークリッド空間への写像のこととする．そのような埋め込み最適化問題の一つは，Göring-Helmberg-Wappler (2008, 2011) によって次のように定式化された：

第1最適埋め込み問題. 有限連結グラフ G の頂点 i と辺 ij に各々ウェイト s_i と長さパラメータ l_{ij} を与え，ユークリッド空間 \mathbb{R}^n への埋め込み $i \mapsto v_i$ を考える．このとき隣接する頂点間の距離が $\|v_i - v_j\| \leq l_{ij}$ であって $\|\sum_i s_i v_i\|^2 = 0$ をみたすという条件下で， $\sum_i s_i \|v_i\|^2$ の値を最大にせよ．

彼らは，半正値計画問題の枠組みにおいて，先述のラプラシアンの第2固有値を最大化する問題とこの埋め込み問題が，適切なラグランジュ関数を通して双対関係にあることを示した．そして，この問題の解である最適埋め込みが実現されるユークリッド空間の最小次元を考え，さらに頂点ウェイトと長さパラメータの全体に涉っての次元の最大値をグラフの rotational dimension と定義した．この rotational dimension（以下 $\text{rotdim}(G)$ と表す）はグラフ G の頂点数が n の場合に $n-1$ 以下であることは明らかである．また，グラフのマイナーによる順序列に対して単調に変化するグラフ不変量でもあり，さらに他のグラフ不変量，clique number $\omega(G)$, tree-width $\text{tw}(G)$ と次の関係をもっている：

$$\omega(G) - 1 \leq \text{rotdim}(G) \leq \text{tw}(G) + 1. \quad (1)$$

本論文では，まず完全グラフをその $\text{rotdim}(G)$ によって特徴付ける問題を考察し，次の結果を得た：

主定理 1. 頂点数 n のグラフに対し， $\text{rotdim}(G) = n - 1$ となるのは G が完全グラフ K_n の時に限る．

この定理は，完全グラフ K_n から1個の辺を除いて得られるグラフ $K_n \setminus e$ に対して， $\text{rotdim}(K_n \setminus e) = n - 2$ となることを示し，マイナー単調性を適用することで証明される．

すべての頂点ウェイトと長さパラメータに対する最適埋め込みを考えなければならないので， $\text{rotdim}(G)$ を具体的に求めることは一般に容易ではない．実際，本論文以前に $\text{rotdim}(G)$ の値が知られていたのは少数の特殊例にとどまる．上記定理 1 は，頂点数 n という一般的条件の下で，限定された $\text{rotdim}(G) = n - 1$ の場合であるにせよ，その時のグラフに対する必要十分条件を得ており，本論文における独創的な部分と認められる．本論文ではこの結果に加え，弦グラフとよばれるグラフに対して評価 (1) がタイトになることに着目して，rotational dimension が一定のままで頂点数がいくらかでも大きくなる弦グラフの例も与えている．

次いで共著論文の成果として，本論文では Göring 等のものと異なった次のようなグラフの埋め込み最適化問題も扱っている．

第2最適埋め込み問題. 有限連結グラフ G の頂点 i と辺 ij に各々ウェイト s_i と長さパラメータ l_{ij} を与え，ユークリッド空間 \mathbb{R}^n への埋め込み $i \mapsto v_i$ を考える．このとき隣接する頂点間の距離が $\|v_i - v_j\| \leq l_{ij}$ であって $\sum_i s_i \|v_i\|^2 / \sum_i s_i = 1$ という条件下で， $\|\sum_i s_i v_i / \sum_i s_i\|^2$ の値を最大にせよ．

論文審査の結果の要旨

この問題に関連して申請者は以下の定理を証明した。

主定理 2. 第2最適埋め込み問題も、適切なラグランジュ関数を通じて、先述のラプラシアン
の第2固有値を最大化する問題と双対関係にある。

2つの与えられた半正値計画問題に対して、それらの双対性を導くようなラグランジュ関数
を見出したところに申請者独自の工夫がみられる。

また本論文では、グラフに対する最適埋め込みを多数例示している。特にフラーレングラフ
 C_{60} （サッカーボールの表面に生じるグラフ）を切頂正 20 多面体の骨格として3次元ユーク
リッド空間へ埋め込むとき、これが最適埋め込みになることを確かめている。この場合、同時
にラプラシアンの第2固有値の最大化問題も解いているが、最大値を実現する辺ウェイトが辺
のタイプによって微妙に異なることを考察している点は非常に興味深い。具体例に対するこの
ような検証も、本論文の独自性を高めていると認められる。

本学位審査委員会は2020年2月21日に公開学位審査セミナーを行った。その場において申
請者は、グラフの最適埋め込み問題とラプラシアンの第2固有値最大化問題について、問題の
背景と意義および主定理証明の着想を明快に説明した。また質疑に関する的確な応答を与え
ており、申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することも確認した。

以上により本学位審査委員会は、申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格がある
ものと判断する。