論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　　第　　　　号

氏　　　　　名　　丁　博舒

論　文　題　目

Geometric Relations among the Bott-Virasoro Group, Equicentroaffine Curves and the KdV Equation
(Bott-Virasoro 群と Equicentroaffine 曲線および KdV 方程式 の間の幾何的な関係)

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
小　林　亮　一

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　Ph.D.
森　吉　仁　志

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　理学博士
内　藤　久　資

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
糸　健　太　郎

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

論文タイトル：Geometric Relations among the Bott-Virasoro Group, Equicentroaffine Curves and KdV Equation.

申請者：Boshu Ding

結論：本論文は学位論文に値する．

1．背景. Khesin-Wendt は，Bott-Virasoro 群 $G := \mathrm{Diff}_+(S^1)\times_B \mathbb{R}$（円周の向きを保つ微分同相群 $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ の $\mathbb{R}$ による中心拡大）の左不変計量 $\langle (u\partial_x, a), (v\partial_x, b)\rangle = \int_{S^1} uvdx + ab$ に関する Euler 方程式は KdV 方程式であることを示した．一方，藤岡・黒瀬は，Pinkall によって導入された平面上の equicentroaffine curves 全体がなす空間に前シンプレクティック構造を考え，さらに equicentroaffine 曲率を用いて記述されたある汎関数を与えると，その Hamilton 流（equicentroaffine curve の 1 パラメータ族）に沿って equicentroaffine 曲率が KdV 方程式にしたがって時間発展することを示した．

2．論文内容. 平面曲線 $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ が equicentroaffine curve であるとは $\det(\gamma, \gamma') = 1$ を満たすことを言う．equicentroaffine 曲率 κ を $\gamma'' + \kappa\gamma = 0$ によって定義する．よって equicentroaffine curve は κ をポテンシャル関数とする Hill 方程式の 1 次独立な解を与える．したがって $\mathcal{M}$ には自然に $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ が働き，$\kappa = \frac{S(\gamma_1/\gamma_2)}{2}$（$S$ は Schwarz 微分）という関係式が生じる．ここで $\mathcal{M}$ は，平面上の equicentroaffine curves 全体がなす空間の連結成分で，equicentroaffine curve である単位円周 c を含むものとする．藤岡・黒瀬は $\hat{\omega}_1(X,Y) = \int_{S^1}\lambda\Omega\mu' dx$ によって $\mathcal{M}$ 上の前 symplectic form $\hat{\omega}_1$ を導入した．ここで $X = -\frac{1}{2}\lambda' + \lambda\gamma', Y = -\frac{1}{2}\mu' + \mu\gamma' \in T_\gamma\mathcal{M}$ は $\mathcal{M}$ の接ベクトルの一意的な表現，$\Omega = \frac{1}{2}\partial_x^2 + 2\kappa + \kappa'\partial_x^{-1}$ である．また任意の $\gamma \in \mathcal{M}$ は，Pinkall が導入した $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ の右作用を用いて，$\gamma = c\cdot\psi$ $(\psi \in \mathrm{Diff}_+(S^1))$ と一意的に表される．いま Bott-Virasoro 群 G の双対リー環を $\mathfrak{g}^*$ として，$d\Theta$ を余接束 $T^*G = (\mathrm{Diff}_+(S^1)\times_B\mathbb{R})\ltimes(\mathfrak{X}(S^1)\times_\omega\mathbb{R})^*$ の標準 symplectic form とする．$\mathcal{M}_1 = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\backslash\mathcal{M}$ とすると $\hat{\omega}_1$ は $\mathcal{M}_1$ 上の symplectic form を定める．このとき Pinkall が導入した右作用は $\mathcal{M}_1$ 上における Bott-Virasoro 群 G の Hamilton 作用を導く．Bott-Virasoro 群の $\mathcal{M}_1$ への作用 $[\gamma_1]\cdot(\varphi, a) = [\gamma\cdot\varphi]$ は Hamilton 作用である．ω_{KKS} を $\mathfrak{g}^* = (\mathfrak{X}(S^1)\times_\omega\mathbb{R})^*$ 上の Kirillov-Kostant-Souriau symplectic form とすると T^*G における coadjoint 作用に関して $\mathrm{pr}_2^*\omega_{\mathrm{KKS}}|_{\mathrm{orbits}} = d\Theta|_{\mathrm{orbits}}$ である．

この状況のもと，本学位申請論文の主定理は次のとおりである．

（定理 1）$\sigma_1 : \mathcal{M} \to T^*G$ を $\gamma \mapsto ((\psi, 0), (-\kappa dx\otimes dx, -\frac{1}{2}))$ によって定義すると $\sigma_1^* d\Theta = \hat{\omega}_1$ が成り立つ．

Bott-Virasoro 群 G の Lie 環上の L^2 内積を $((u\partial_x, a), (v\partial_x, b)) = \int_{S^1} uvdx + ab$ によって入れて Bott-Virasoro 群の左不変計量を定める．このとき Euler 方程式は $(\dot{u}dx\otimes dx, \dot{a}) = ((-su'u - au''')dx\otimes dx, 0)$ すなわち KdV 方程式である．一方，平面上の equicentroaffine curves 全体がなす空間 $\mathcal{M}$ 上の汎関数 $H : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ を $H(\gamma) = \frac{1}{2}\int_{S^1}\kappa^2 dx$ により定めると $\hat{\omega}_1$ に関する pre-symplectic 勾配は $X_H^1(\gamma) = \frac{1}{2}\kappa'\gamma - \kappa\gamma'$ で与えられる．この積分曲線にそって時間発展する equicentroaffine curve の equicentroaffine 曲率 κ の時間発展は KdV 方程式 $\dot{\kappa} = \Omega(-\kappa)' = -\frac{1}{2}\kappa''' - 3\kappa'\kappa$ で与えられる．Ding 氏は上の定理を使ってこの 2 つの事実を結びつける幾何を定式化した：

第 1 段. $E\circ\sigma_1(\gamma) = H(\gamma) + \frac{1}{8}$ である．ここで E は Riemann 多様体の余接束の energy 関数である．

第 2 段. $\forall Z \in T_\gamma\mathcal{M}$ に対し $d\Theta(X, \sigma_{1*}Z) = 0$ となる $X \in T_{\sigma_1(\gamma)}(T^*G)$ が在って $\sigma_{1*}X_H(\gamma) = X_E(\sigma_1(\gamma)) + X$ という関係が成り立つ．T^*G の標準 symplectic form $d\Theta$ の具体的な表示から，この X は $X = (K, (0dx\otimes dx, 0))$ と表される．ここで K は Bott-Virasoro 群の接ベクトル場である．

第 3 段. X_H の積分曲線が表す時間発展する equicentroaffine curve の equicentroaffine 曲率を κ とする．このとき第 2 段の式は $((\dot{\psi}, 0), (-\dot{\kappa}dx\otimes dx, 0)) = X_E((\psi,0), (-\kappa dx\otimes dx, 0)) + X = (K, -\mathrm{ad}^*_{(-\kappa\partial_x, -\frac{1}{2})}(-\kappa, -\frac{1}{2}) + (0,0))$ となる．したがって $\dot{\kappa} = -\frac{1}{2}\kappa''' - 3\kappa'\kappa$ となって equicentroaffine 曲率が満たす KdV 方程式が現れる．

以上から，KdV を導く二つのルートを関係づける幾何は，次の定理のように理解される：

（定理 2） σ_1 を定理 1 のように定義すれば，しかるべき設定のもとで次の図式は可換，すなわち $\mu_1\circ\pi_1 = \mathrm{pr}_2\circ\sigma_1$ が成り立つ．

$$
\begin{array}{ccc}
(\mathcal{M}, \hat{\omega}_1) & \xrightarrow{\sigma_1} & (T^*G, d\Theta) \\
{\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} \\
(\mathcal{M}_1, \omega_1) & \xrightarrow{\mu_1} & ((\mathfrak{X}(S^1)\times_\omega\mathbb{R})^*, \omega_{\mathrm{KKS}})
\end{array}
$$

審査経緯. 2 月 21 日に公開学位審査セミナーを行った．Ding 氏は，先行研究を理解した上で未発見だったリンクを発見したことによって自身が定式化した幾何学的枠組みについて，明快な説明を行った．また，質疑応答では理論全体をよく理解していることが分かった．以上の理由で，本論文は学位論文に値すると判断した．