

別紙 4

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

## 主 論 文 の 要 旨

論文題目 Studies on multiple zeta values, Arakawa-Kaneko zeta functions and iterated log-sine integrals  
(多重ゼータ値と荒川・金子ゼータ関数, 反復 log-sine 積分に関する研究)

氏 名 梅 澤 瞭 太

## 論 文 内 容 の 要 旨

多重ゼータ値とは  $k_n \geq 2$  を満たす正の整数  $k_1, \dots, k_n$  に対して

$$\zeta(k_1, \dots, k_n) = \sum_{0 < m_1 < \dots < m_n} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_n^{k_n}}$$

で定義される実数である。多重ゼータ値は量子群や結び目理論などの様々な数学や物理との関係が知られており、現在様々な方向から盛んに研究されている対象である。特に、重さ、つまり  $k_1 + \dots + k_n$  が  $k$  のすべての多重ゼータ値で張られる  $Q$  ベクトル空間  $\mathcal{Z}_k$  の次元に関する予想 (Zagier 予想) は多重ゼータ値の理論の重要な未解決問題である。このため、多重ゼータ値の間にはどのような関係式が成り立つのかということは重要な研究対象となっている。本論文は多重ゼータ値と関係がある荒川・金子ゼータ関数と反復 log-sine 積分に関する研究を行い、それにより得られた自身の様々な結果まとめたものである。

第 1 章では多重ゼータ値と荒川・金子ゼータ関数, log-sine 積分それぞれに関しての背景や知られている結果を述べる。

第 2 章では荒川・金子ゼータ関数に関する研究, 特に伊藤氏が導入した荒川・金子ゼータ関数の類似の関数に関する自身の結果を述べる。荒川・金子ゼータ関数とはポリベルヌーイ数を負の整数点に持つようにリーマンゼータ関数を一般化した関数であるが、多重ゼータ値とも様々な関係を持つ。伊藤氏はこの荒川・金子ゼータ関数の類似の関数 (伊藤ゼータ関数) を導入し、その性質を調べることで Mordell-Tornheim 型の多重ゼータ値の間の関係式を得た。第 2 章の前半では伊藤氏の手法に沿って、伊藤氏が導入した別の関数 (一般化伊藤ゼータ関数) の性質を調べることにより宮川型の多重ゼータ値の関係式を証明する。第 2 章の後半では伊藤氏や第 2 章の前半で証明した定理の一般化を行う。

この系として宮川型の多重ゼータ値を含むある種の多重ゼータ値の関係式を得ることができる。第3章では反復 log-sine 積分に関する自身の研究について述べる。反復 log-sine 積分とは多重ゼータ値の研究のために自身が導入した積分であり、正の整数からなるインデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$  と非負の整数からなるインデックス  $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$  に対し、

$$\text{Ls}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{l}}(\sigma) = (-1)^n \int_0^\sigma \int_0^{\theta_n} \dots \int_0^{\theta_2} \prod_{u=1}^n \theta_u^{l_u} A^{k_u-1-l_u}(\theta_u) d\theta_1 \dots d\theta_n$$

で定義される積分である。ただし  $A(\theta) = \log|2 \sin(\theta/2)|$  である。この積分の  $n = 1$  のとき、つまり  $\text{Ls}_k^{(l)}(\sigma)$  は (generalized) log-sine 積分と呼ばれ、マーラー測度やファインマン・ダイアグラムの計算に現れることが知られている。第3章の初めに反復 log-sine 積分の基本的な性質を述べた後、反復 log-sine 積分に関する二つの研究について述べる。一つ目の研究では反復 log-sine 積分を使って多重ゼータ値の間関係式を得る新しい手法を与える。計算機を使った計算により、この手法だけではすべての多重ゼータ値の間関係式を得ることはできないことがわかるが、それでも多くの多重ゼータ値の間関係式を得ることができることがわかる。二つ目の研究で反復 log-sine 積分を多重ゼータ値や多重ポリログを使って表す定理を証明する。この定理により反復 log-sine 積分の数値実験が可能になる。そして第3章の最後に数値実験をもとにして様々な空間の基底の予想を与える。特に、ある種の反復 log-sine 積分 (shifted log-sine integrals) が  $\mathcal{Z}_k$  の基底となるという予想を与える。 $\mathcal{Z}_k$  の基底の予想は Hoffman によっても与えられているが、shifted log-sine integrals による基底は Hoffman の基底にはない性質を持つ基底である。