『経済科学』第67巻第４号（2020年３月発行）
THE ECONOMIC SCIENCE, Vol.67, No.4, March 2020

DOI:10. 18999/ecos. 67. 4. 75

静的な政策ポートフォリオと動的なリバランス戦略

Static Policy Portfolio and Dynamic Rebalancing Strategy

中 島 英 喜*
NAKASHIMA Hideki

In this paper we first describe the desirable relationship between a static policy portfolio and its dynamic rebalancing strategy. Subsequently we investigate efficient dynamic rebalancing strategy in a standard multi-period model. Though it is not difficult to show an objective function with quadratic form to get efficient strategy in this model, it is not easy to get the optimal solution for it. Therefore we restrict the solution to within myopic strategies, and search with a heuristic approach how the duration of once executed rebalancing operation depends on the portfolio after this operation. With this approach we can get some or many alternative strategies. Furthermore we calculate the objective function above for each strategy with numerical simulation. We should choice the strategy with the highest score in this function as the most efficient rebalancing strategy in the class of the prepared solutions.

Keywords: Policy Portfolio, Dynamic rebalancing strategy, Costs of rebalancing operation, Myopic Strategy, Duration of a rebalancing operation, Heuristic approach, Numerical simulation

*名古屋大学大学院経済学研究科
Graduate School of Economics, Nagoya University

Ⅰ．はじめに

日本の厚生年金保険や国民年金の積立金を運用するGPIF（年金積立金管理運用独立行政法人）は，世界最大規模の機関投資家と言われる[1)]。法令で定められた制度の資金を預かる機関投資家はGPIFの他にも多数存在する。これら機関投資家の多くは巨額の資金を運用するが，制度の加入者は十分な任意性を持たないこと（例えば強制加入など）も少なくない。このため，これらの機関投資家には十分に合理的かつ検証可能な行動が求められる。

例えば米国の企業年金資金の運用に関しては，ERISA法で「Prudent-man Rule」が課せられているし，日本の企業年金の基金には，「運用の基本方針」と「政策的資産構成割合」の策定が法令により義務付けられている。なおここで言う「政策的資産構成」やその「割合」は，一般には，政策ポートフォリオ，基本ポートフォリオ，戦略的資産配分などと呼ばれる。本稿ではこれを政策ポートフォリオと呼ぶ。

日本では，企業年金だけでなく，上述のGPIFをはじめとした主要な年金・共済制度も，それぞれ政策ポートフォリオを策定している。これら機関投資家が政策ポートフォリオを策定する場合，現代投資理論（MPT）に基づく平均・分散効率性に着目するのが標準的である。また，政策ポートフォリオの適用期間は，一般に将来数年以上に亘る長期を前提として[2)]，長期の 1 期間モデルで平均・分散効率性を評価することが多い。

しかし政策ポートフォリオの策定後，実際のポートフォリオ（資産構成）を政策ポートフォリオと厳密に一致させることは現実にはほぼない。すなわち，資産構成の管理に関して，目標（理想）と現実は通常一致しない。このため，両者の乖離を放置すると，政策ポートフォリオはいずれ画餅に帰し実効性を持たなくなる。このため，目標と現実の乖離を何らかの形で修正する作業が求められる。この作業はリバランスと呼ばれる。本稿では，このリバランスの実施方針をリバランス戦略と呼ぶ。

あるリバランス戦略の効率性は，選択した政策ポートフォリオに依存すると考えるのが自然である。またその逆も然りであり，ある政策ポートフォリオの効率性はその実効性を担保するリバランス戦略に依存する。このため，政策ポートフォリオとリバランス戦略は，本来同時に決定するのが望ましい。しかし多くの場合，政策ポートフォリオは長期の 1 期間モデルを前提に策定されており，期中のリバランスは（1 期間モデルなので当たり前だが）考慮されない。

政策ポートフォリオは，その効率性や決定過程を加入者や関係者に広く理解してもらう必要がある。このため，扱いの難しい多期間モデルに代えて 1 期間モデルを利用することは相応の理がある。一方，リバランスは期中の実行が前提であり，その戦略を長期の 1 期間モデルで議論するのはそもそも適当でない。

このため次善の策として，政策ポートフォリオの決定後，速やかにそれを前提としたリバランス戦略を選択し，両者をセットで実行に移す方法が考えられる。しかし現実には，こうした規律付けはほとんど見当たらず（少なくとも明文化されたものとしては），政策ポートフォリオを改訂しても，リバランス戦略は従前のものを継続することも少なくない。本稿では，この規律付けの意義を確認するため，ある政策ポートフォリオを所与とした時のリバランス戦略の評価と選択を検討する。

Ⅱ．1 期間モデルと先行研究

既に述べたように，政策ポートフォリオの策定は，長期の 1 期間モデルを用いて，期末の積立金 w の平均・分散効率性を評価するのが一般的である。これは，期末の積立金 w の期待値 $\mathrm{E}[w]$ と分散 $\mathrm{var}[w]$ で表された目的関数を，無条件もしくは幾つかの制約条件の下で最大化する問題と見なすことができる。さらに，政策ポートフォリオを策定する機関投資家をある代表的な個人と見なすならば，この目的関数は，当該個人の期待効用関数 $\mathrm{E}[\mathrm{u}(w)]$ の 2 次近似に相当する。

$$\mathrm{E}[\mathrm{u}(w)] \approx \mathrm{E}[w - w_f] - 0.5\lambda\,\mathrm{var}[w]$$

ここで w_f は期初の積立金を全て安全資産で運用した時の期末の積立金（確定値）であり，λ は投資家に固有な正の定数である。そして，安全資産を除く各資産への期初の資金配分を表すベクトル（ポートフォリオ）を π と書き，上式右辺の目的関数を U と書くと次式を得る。

$$U = \mu'\pi - 0.5\lambda(\pi'\Sigma\pi) \tag{1}$$

ここで，x' はベクトル x の転置を表す。また，μ と Σ はそれぞれ次式で与えられる期待値のベクトルと共分散の行列である[3)]。なお次式において，r_f

は1期間投資の安全利子率，R は同期間における個々の危険資産のリターンを要素とするベクトル，$\mathit{1}$ は全要素1の定数ベクトル，E[・] と var[・] は期待値と分散・共分散の演算子を意味する。

$$\mu = \mathrm{E}[R - r_f \mathit{1}]$$
$$\Sigma = \mathrm{var}[R - r_f \mathit{1}]$$

以上が，1期間モデルに基づくポートフォリオ選択問題の基本セッティングである。あとは，(1)式の目的関数 U に関する最大化の1階条件（$\mu - \lambda\Sigma\pi^* = 0$）を解けば平均・分散効率的な政策ポートフォリオ π^* が得られる。

$$\pi^* = (\lambda\Sigma)^{-1}\mu \tag{2}$$

山下（2000）は，こうしたセッティングの下，投資対象が2つか3つの危険資産に限られるケースの最適リバランス戦略を議論している。また中島（2018）は，危険資産の数の制約を外した一般的なケースについて，政策ポートフォリオに対する期初のポートフォリオの乖離 δ が，(1)式の目的関数を次式の $\varDelta U$ だけ低下させることを示している。

$$\varDelta U = -0.5\lambda(\delta'\Sigma\delta) \tag{3}$$

そして，取引コストを考量した最適リバランス戦略を示した上で，多期間のセッティングでの適時リバランスとその効果の持続性を明示的に考慮する必要性を指摘し，代替案を簡単に議論している。

言うまでもなく，上記の1期間モデルを前提とする場合，リバランスは期初の1度に限られる。このため，期中のリバランスは行わず，期末（数年後）までポートフォリオを放置することになる。これは，本来考えるべきリバランスが最初から捨象されることを意味する。以下では中島（2018）の問題意識に従い，期中のリバランス戦略を考える。

Ⅲ．期中のリバランスの役割

既に述べたように，政策ポートフォリオの策定は，長期の1期間モデルに基づくのが通常である。しかし前節で指摘したように，リバランス問題まで1期間モデルで考えると，本来のリバランス戦略，すなわち期中における適時リバランスは扱えない。

一方，特定の政策ポートフォリオを所与として期中のリバランス戦略を考える場合，期中における政策ポートフォリオの位置付けが問題になる。ここでは思考実験として，リバランスにかかるコスト（取引費用，意思決定の手間，作業時間，その他諸々）を完全に無視できると仮定して，足下のポートフォリオが政策ポートフォリオから乖離した時に，下記のいずれの方針を採るのが望ましいか考える。

(1) 速やかに乖離を完全解消する
(2) 常に乖離を放置する
(3) 状況に応じて乖離を部分的に修正する
(4) 市況に応じて政策ポートフォリオに代わる目標ポートフォリオを考える

1期間モデルは上記(2)を前提としているが，これはあくまで便宜的な制約に過ぎない。また上記(3)であるが，リバランスのコストが一切無視できる世界において，この方針が妥当する「状況」とは如何なるものだろうか。

たとえば市場が危機的急落を迎えた局面では，上記(1)は必ずしも望ましくないかもしれない。しかし，意思決定の手間を含むすべてのコストが捨象できる世界では，成行きのポートフォリオを出発点とするより，上記(4)のように，その局面に則した新たな目標ポートフォリオを設定するのが望ましい筈である。

このように，目標ポートフォリオを特定の数値に固定するのではなく，市況に応じて適合的に変化させる投資戦略は，一般にTAA（戦術的資産配分：Tactical Asset Allocation）と呼ばれる。その多くは，各資産の短期的なリターンの期待値が一定でないと考える。そして，その評価値を適宜更新し，目標ポートフォリオを短期的に変更することで，固定的な政策ポートフォリオに対する投資効率の改善を目指す。すなわち，上記(4)はまさしくTAAに他ならない。

このように，市場の危機的な急落局面に限って上記(4)を採用するとしても，意思決定のコストを無視できる世界では，それは上記(3)の延長ではなく，TAAの一種として考えるべきものである。この場合，リバランスの問題は，平時の通常局面と危機時の急落局面に分けて考えることができる。さらに，後者はTAAの範疇だが前者はそうでないと考えるなら，平時における目標ポートフォリオは一定（固定的）であり，政策ポートフォリオがこれに相当する。以上を踏まえると，コストを無視できる世界において，TAAによる投資効率改善を見込まないならば，リバランスは上記(1)に従うのが適当と考えられる。

Ⅳ．平時のリバランス戦略

平時の目標ポートフォリオが固定的だとしたら，投資家は投資対象の短期的な超過リターンの期待値や共分散行列が一定，もしくは変化するとしてもコストに対して無視できる範囲と評価していることになる（これらのパラメータの評価値がある程度以上変化すると考えるなら，それに則したTAAによって投資効率の改善を図るはずである）。そしてこれは，期中の短期的なリターンの系列相関を無視できること意味する。

ここでは，政策ポートフォリオ π^* を所与とした上で，セッティングを多期間（T 期間）に拡張して短期（各期初）の適時リバランスを考える。まずⅡ節のセッティングに準じ，t 期（$t=1,2,\cdots,T$）における危険資産のリターンと安全利子率を R_t と $r_{f,t}$ で表し，同期初のポートフォリオを π_t で表す。

また標準的な設定の下で，政策ポートフォリオの有効期間におけるリターンの複利効果をほぼ無視できるとすると[4)]，政策ポートフォリオ π^* に対する期中のポートフォリオ π_t の乖離 $\delta_t=\pi_t-\pi^*$ がもたらす⑶式の目的関数の低下幅 $\varDelta U$ は近似的に次式で与えられる。

$$\varDelta U \approx -0.5\lambda \sum_{t=1}^{T} \delta_t' \left(\frac{1}{T}\Sigma\right)\delta_t$$

上式の $(1/T)\Sigma$ は，短期のリターンの共分散行列である。これ以降は表記の煩雑を避けるため，この短期リターンの共分散を単に Σ で表す。

$$\varDelta U \approx -0.5\lambda \sum_{t=1}^{T} \delta_t'\Sigma\delta_t$$

さてこの時，多期間（T 期間）の投資における最適リバランス $\varepsilon_t^*(t=1,2,\cdots,T)$ は，その実行コストを加味した上で，t 期初のリバランス前のポートフォリオ π_t を ε_t 変化させて期待効用の低下幅 $-\varDelta U$ を最小化する（非正値 $\varDelta U\leq 0$ を最大化してゼロに近づける）問題の解として与えられる。

$$\max_{\varepsilon_t}\ -0.5\lambda \sum_{t=1}^{T}\left[(\delta_t+\varepsilon_t)'\Sigma(\delta_t+\varepsilon_t)\right] - \mathrm{p}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_T) \qquad (4)$$

ここで $\mathrm{p}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_T)$ は，リバランス過程 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_T\}$ の実行にかかる全てのコストの合計を表す非負の関数である。このコストは，資産の売買にかかる取引費用だけでなく，意思決定の手間や作業時間なども含む。逆に言えば，上記のリバランス過程が単純なルールに従い十分簡単に実行できるなら，取引費用以外のコストは捨象できる。さらに，各時点の取引に十分な流動性が確保され，取引コストが定率従量制だとしたら，上記のリバランス過程にかかるコストは，各時点の売買額の絶対値の単純な線形関数になる。

$$\mathrm{p}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_T)=p'\sum_{t=1}^{T}|\varepsilon_t|$$

ここで p は，投資対象資産 1 単位の売買に要する取引コスト（非負の取引費用単価）を要素とするベクトルであり，$|\varepsilon_t|$ は，t 期初のリバランス ε_t の各要素の絶対値を要素とするベクトルである。この場合，⑷式の最適化問題は次のように書き換えられる。

$$\max_{\varepsilon_t}\ -0.5\lambda \sum_{t=1}^{T}\left[(\delta_t+\varepsilon_t)'\Sigma(\delta_t+\varepsilon_t)\right] - p'\sum_{t=1}^{T}|\varepsilon_t| \qquad (5)$$

なお，政策ポートフォリオ決定後の s 期初（$1\leq s\leq T$）において，翌期以降（$s+i$ 期初，$i>0$），のポートフォリオ π_{s+i} は一般に不確実であり，乖離 δ_{s+i} やこれに依存するリバランス ε_{s+i} も不確実である。そこで，⑸式の出発点となった⑴式が，ある代表的な個人の効用関数の期待値（２次近似）であったことを思い出すと，s 期初における最適リバランス問題は次のように書ける。

$$\max_{\varepsilon_t}\ -0.5\lambda \sum_{t=s}^{T}\mathrm{E}_s\left[(\delta_t+\varepsilon_t)'\Sigma(\delta_t+\varepsilon_t)\right] - p'\sum_{t=s}^{T}\mathrm{E}_s\left[|\varepsilon_t|\right] \qquad (6)$$

ここで $\mathrm{E}_s[\cdot]$ は，評価時点の s 期初における期待値の演算子である。この問題は，リバランス ε_t に関する動的な問題であり，その絶対値の項を含むため，解 $\{\varepsilon_1^*,\varepsilon_2^*,\cdots,\varepsilon_T^*\}$ を解析的に求めるのは難しい。さらに「単純なルール」と言っても，実際には無数のクラスやバリエーションが考えられる。このため，想定するルールをある程度限定した上で，各ルールの下でのシミュレーションによって⑹式の目的関数を数値的に評価し，それらの比較によって，限定したルールの中から最良のものを選ぶのが現実的であると思われる。

Ⅴ．単純なルールとしての近視眼的なリバランス戦略

簡単のため，個々の投資対象資産の期待リターンの差異と複利効果を無視すると，将来 $s+i$ 期初の

ポートフォリオ π_{s+i} の期待値 $\mathrm{E}_s[\pi_{s+i}]$ は，s 期初のリバランス直後のポートフォリオ $\pi_s+\varepsilon_s$ と一致する。さらに，リバランスは s 期初のみに実施されるとすると，このリバランス ε_s の効果（s 期初から見た将来の不確実なポートフォリオ π_{s+i} に対する期待効用の改善）は減衰せずに持続する（補論参照）。

一方，s 期初以降も何らかのルールに基づいて適宜リバランスを実行する（$\varepsilon_t \neq 0$），もしくは実行しない（$\varepsilon_t = 0$）場合，s 期初におけるリバランス ε_s の将来的な効果は，選択したルールに依存する。ただしこの場合も，次回のリバランス（$s+i$ 期初，$i > 0$）の直前までは，上記と同じ議論が成立する。そこで，(6)式の動的な最適化問題を，あるリバランスから次回リバランスの実行直前までの期間に分割して，s 期初における近視眼的な最適化問題を考える。

$$\max_{\varepsilon_s} \ -0.5\lambda\left((\delta_s+\varepsilon_s)'\Sigma(\delta_s+\varepsilon_s)+\sum_{t=s+1}^{s+i-1}\mathrm{E}_s[\delta_t^{s\prime}\Sigma\delta_t^s]\right) -p'|\varepsilon_s|$$

ここで δ_t^s は，s 期初にリバランス ε_s を行った後，次回のリバランスまでの t 期初（$s < t < s+i$）におけるポートフォリオ π_t と政策ポートフォリオ π^* の乖離である。この式の第１項の期待効用の改善効果は，s 期初以降も減衰せずに持続するので，この期間の近視眼的な最適化問題は，先にⅡ節で扱った１期間モデルを用いて表現できる。

$$\max_{\varepsilon_s} \ -0.5\lambda[(\delta_s+\varepsilon_s)'\Sigma(\delta_s+\varepsilon_s)]i-p'|\varepsilon_s| \qquad (7)$$

言うまでもなく，上式のリバランス停止期間 i は，s 期初のリバランス ε_s に依存する。ε_s がゼロに近ければ，コスト $p'|\varepsilon_s|$ は小さくなるものの，期待効用の改善は十分でなく，次回のリバランスまでの期間 i も短くなる傾向がある。逆に ε_s が $-\delta_s$ に近ければ，コスト $p'|\varepsilon_s|$ は大きくなるものの，期待効用は十分改善され，次回のリバランスまでの期間 i も長くなる傾向がある。したがって，(7)式の近視眼的な最適化問題を解くには，s 期初に行ったリバランス後のリバランス停止期間 i が，同リバランス直後の乖離 $\delta_s+\varepsilon_s$ にどのように依存するか明示的に把握する必要がある。

Ⅵ．リバランス停止期間の探索的な評価

前節では多期間モデルにおける近視眼的なリバランス戦略に関して，(7)式の最適化問題を示した。同式は１期間モデルと見なすことができるが，s 期初にリバランス ε_s を実行した後のリバランス停止期間 i は，s 期初において一般に不確実であり，その長さはリバランス ε_s の実行直後のポートフォリオと政策ポートフォリオとの乖離 $\delta_s+\varepsilon_s$ に依存する。

２資産のポートフォリオであれば，１変数のドリフト付きブラウン運動を仮定して，任意の閾値への到達時刻に関する確率分布（逆ガウス分布）を得ることができるが，評価が相当複雑になる上，投資対象が３資産以上だと更なる簡単化の仮定が必要になる。

そもそも多期間モデルにおける近視眼的な戦略は，問題を簡単にするための便宜的な制約に過ぎず，これらの制約的な戦略の優劣は，最終的に多期間の数値シミュレーションによって評価される。このため，その制約の中で厳密を期しても得られるものは限られるであろう。

ここでは，リバランス実施直後の乖離 $\delta_s+\varepsilon_s$ と，その後のリバランス停止期間 i との関係を探索的（ヒューリスティック）な手法で幾つか推測する。両者の関係を複数用意することで，リバランス戦略のユニバースを得ることができる。そして次節では，推測された両者の関係を(7)式の近視眼的な最適化問題に適用し，その優劣を長期（多期間）の数値シミュレーションで評価して，戦略ユニバースの中から最適なリバランス戦略を選択する。

まず投資対象として，国内株式，国内債券，外国株式，外国債券を考え，これら４資産に関する平均・分散効率的な政策ポートフォリオ π^* を適当に定める[5)]。これを(2)式に当てはめ，前提としたパラメータ（μ と Σ）の評価値を代入すると定数 λ を逆算できる。

次に４資産のリターンの相関係数を基に，投資対象をブロック化して２資産のポートフォリオを考える。一般に外国株式のリターンは国内株式や外国債券との相関が大きい。これに対し，国内債券はこれら３資産のリターンとの相関が相対的にゼロに近い。このため，前者の３資産を一つの資産と見なし（便宜的に「高リスク資産」と呼ぶ），これと国内債券から成る２資産のポートフォリオを考える。そして，リバランスに関する適当なルールを幾つか定め，数値シミュレーションによって，リバランス実施後の乖離 $\delta_s+\varepsilon_s$ と，その後のリバランス停止期間 i との関係を推測する。

なお，この予備的なシミュレーションでは，最適化

によらない単純なルールに基づくリバランスを想定する。具体的には，まずポートフォリオの目標からの乖離に関する閾値 $\pm\delta^{Bound}$ と戻し乖離値 $\pm\delta^{Target}$ の定数セットを予め定める（$0 \leq \delta^{Target} \leq \delta^{Bound}$）。そして期中の乖離が前者の値を超えた時にのみ，後者の値まで乖離を戻す戦略を考える。ある定数セットの下で，1ヶ月を単位期間とした数値シミュレーションを1万ないし10万ヶ月行えば，当該セットの下でのリバランス停止期間 i の事後的な平均値 $i^{Average}$ を計算できる。さらに，これら2つの定数の値を少しずつ変更することで，δ^{Target} に対する平均的なリバランス停止期間 i の依存関係を概略評価できる。

ここでは，このシミュレーションを下記の2種類の方法で行った。方法1は方法2に比べて，より強い簡単化の仮定を置いている。

方法1：下記の諸仮定の下，連続した1万ヶ月のシミュレーションを行い，事後的なリバランスの実施回数からリバランス停止期間 i の平均値 $i^{Average}$ を計算する。

- 複利効果は捨象
- 2つの資産の期待リターンおよび国内債券のボラティリティをゼロと仮定
- 目標配分を50：50と仮定
- 高リスク資産のボラティリティを年率10%と仮定

方法2：下記の諸仮定の下，$+\delta^{Target}$ および $-\delta^{Target}$ から始まる連続1000ヶ月のシミュレーションを行い，ポートフォリオの乖離が最初に閾値 $\pm\delta^{Bound}$ を超えるまでの月数を記録し，これを100回繰り返すことでリバランス停止期間 i の平均値 $i^{Average}$ を計算する。

- 複利効果を考慮
- 2つの資産の期待リターンおよび国内債券のボラティリティを明示的に考慮
- 目標配分は政策ポートフォリオに準じる（ここでは73：27）
- 2つの資産のリターンの共分散行列は，政策ポートフォリオ決定の行列 Σ に準じる

図1は，閾値と戻し乖離値（$\pm\delta^{Bound}$ と $\pm\delta^{Target}$）に関する個々の定数セットの下で，リバランス停止期間の平均値 $i^{Average}$ を計算し，リバランス直後の乖離の絶対値 δ^{Target} との関係を上記2つの方法でそれぞれ評価したものである。

Ⅶ．多期間モデルにおける近視眼的リバランス戦略の評価

図1を用いると，T 期間モデルの s 期初においてリバランス ε_s を実行した後の平均的なリバランス停止期間 $i^{Average}$ の評価値を全部で6つ得ることができる。これにより6つのリバランス戦略を考えることができる。ここでは，これらの評価値を用いて長期（T 期間）の数値シミュレーションをそれぞ

(a) 本文の方法1による推定結果　　(b) 本文の方法2による推定結果

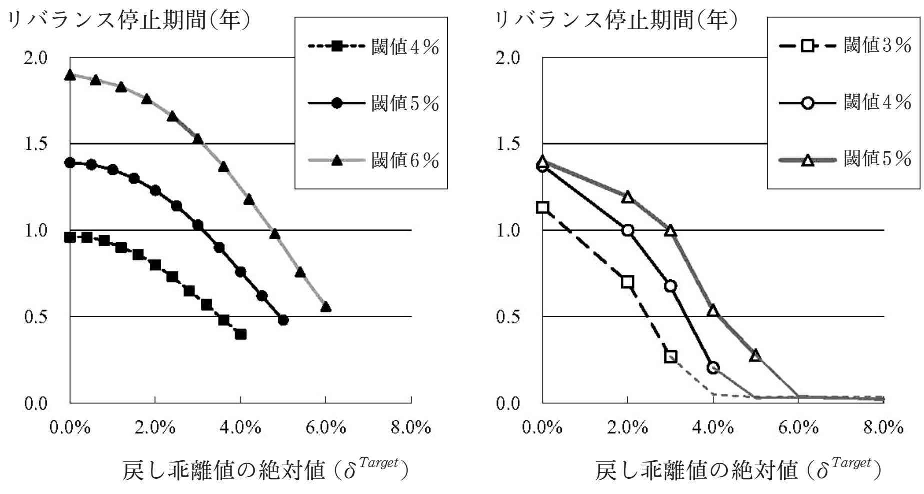


図1．リバランス直後の目標から乖離とその後の平均的なリバランス停止期間の関係

れ行い，これら６つの代替的なリバランス戦略の中から，最適な戦略を探索的に選択する。

具体的には，⑴式のパラメータ（μ と Σ）に準じた正規乱数を使い，T ヶ月間の月次リターンの系列をまず用意する。次に図１の６つのカーブを用いて，s 期初にリバランス ε_s を実行した後の平均的なリバランス停止期間 $i^{Average}$ の評価値をそれぞれ求める。これらを⑺式の近視眼的な最適化問題におけるリバランス停止期間 i に毎月代入すると，各カーブの下での近視眼的最適リバランス過程 $\{\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \cdots, \varepsilon_T^*\}$ をそれぞれ求めることができる。そしてこの系列を⑸式の長期の目的関数に代入して同関数を評価する。この作業を繰り返し行えば，６つの戦略の中から，⑹式の長期の目的関数を数値的に最大化するリバランス戦略（平均的なリバランス停止期間 $i^{Average}$ の評価方法）を選ぶことができる。

なお，前節の予備的な（簡単化した）シミュレーションでは，閾値 $\pm\delta^{Bound}$ と戻し乖離値 $\pm\delta^{Target}$ を固定した戦略を用いた。これは図１の各カーブ，すなわちポートフォリオの乖離 $\delta_s+\varepsilon_s$ とその後のリバランス停止期間 $i^{Average}$ の関係を評価するための便宜的なものに過ぎない。本節で行う⑺式の近視眼的な最適化戦略は，固定的な閾値や戻し乖離値は用いず，図１のカーブのみ参照している点に注意が必要である。

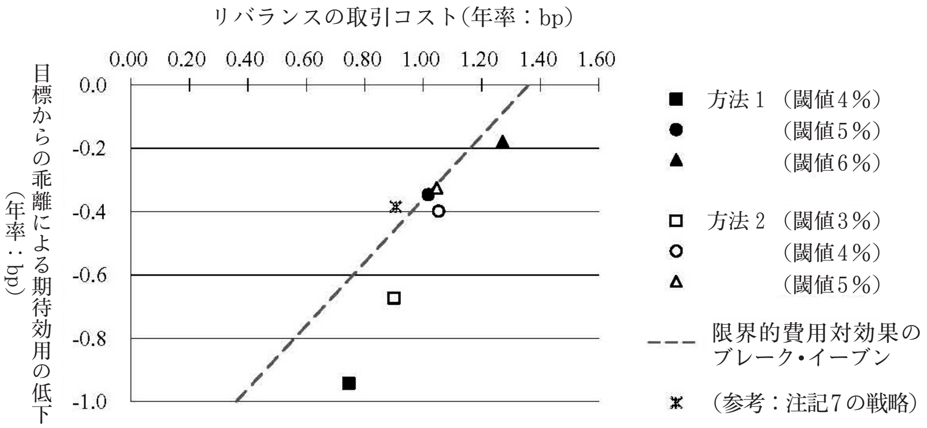
図２および表１は，図１で取り上げた平均的なリバランス停止期間 $i^{Average}$ に関する６つの評価方法を用いて，⑺式の近視眼的な最適化戦略の数値シミュレーションをそれぞれ行い，その優劣を⑹式の長期の目的関数によって定量的に比較したものである。これによると，図１の６つのカーブのうちパネル⒜の黒い実線（黒丸シンボル）に基づくリバランス戦略が最適であることが分かる。

前節でみたように，図１の各カーブの評価にあたり，方法１は方法２に比べてかなり大胆な簡単化を課している。一方，本節で行った長期の評価で最も優れた戦略（図１のカーブ）は，方法１で推定したものである。これは前節で述べた見識，すなわち便宜的な制約の下で厳密を期すことは必ずしも最終的な評価の改善につながるとは限らないことを支持するものと言える。

ところで，これら６つのリバランス戦略に関する⑹式の目的関数の評価値は，最上位と最下位の戦略で年率0.33bp（basis point）の開きがある（表１参照）。この差は一見小さいように見えるが，2018年度末の資産規模が159兆円を超えるGPIFだと年間50億円以上になる。また預かり資産の規模が数千億円から10兆円の機関投資家であっても，その差は年間2000万円から３億円以上になる。

また，これ等の機関投資家の多くは，運用の経費を預かり資産から支払っている。そして，上記の金額（年間2000万円から50億円）は，運用の成果ではなく年間の経費と考えるべきものである[6)]。さらに，これ等の機関投資家の投資期間は通常10年を優に超える。すなわち，これ等の機関投資家やその加入者にとって，上述の評価値の差は，長期的に２億円から500億円を超える経費の差に相当する。

なお，ここで取り上げた６つのリバランス戦略は，



（注）1bp（basis point）は0.01%

図２．６つのリバランス戦略の効率性評価

表 1．６つのリバランス戦略の効率性評価

	直近のポートフォリオに対するリバランス停止期間 i の依存モデル					
（依存モデルの推定方法）	（方法 1 ：強い簡単化）			（方法 2 ：弱い簡単化）		
（推定時の便宜的な閾値）	（ 4 %）	（ 5 %）	（ 6 %）	（ 3 %）	（ 4 %）	（ 5 %）
（図 1 および図 2 のシンボル）	（■）	（●）	（▲）	（□）	（○）	（△）
リバランス停止期間の平均値（年）	2.03	0.70	0.22	2.37	0.76	1.30
A ：取引コストの平均値（年率：bp）	0.74	1.02	1.27	0.90	1.05	1.05
B ：目標からの乖離による期待効用の低下（年率：bp）	-0.94	-0.35	-0.18	-0.67	-0.40	-0.33
長期の目的関数の評価値（B - A）	-1.69	-1.36	-1.45	-1.57	-1.45	-1.37

（注）1bp（basis point）は0.01%.

いずれも同じような簡単化の下で選ばれたものであり，戦略のユニバースとしての広がりは限定的である。このため，より多様な戦略を加味して（例えば注記 7 参照），各機関投資家が採用している現行のリバランス戦略と比較すれば，削減可能な経費はより大きなものになるかもしれない。

Ⅷ．まとめと課題

本稿では，機関投資家の資産配分戦略に関して，政策ポートフォリオとリバランス戦略の関係をまず整理した。両者は相互依存しているため，本来同時に選択するのが望ましい。しかし多くの場合，技術的な制約から前者は後者に先立って決められる。この場合でも，両者の相互依存を考えれば，次善の策として，政策ポートフォリオの改定後，速やかにリバランス戦略を見直すのが望ましい。

続いてこの観点から，多期間での適宜リバランスを明示的に考慮した動的リバランス問題を考えた。選択された政策ポートフォリオを所与とすれば，この問題は標準的な2次形式の目的関数を用いて定式化できるが，これを解析的に解くのは難しい。

このため，解を近視眼的な最適化の逐次実行のクラスに限定した。ただしこのクラスにおいても，解を得るには，各期のポートフォリオで条件付けした次回リバランスまでのリバランス停止期間の確率分布を評価する必要がある。しかし，投資対象が3つ以上だとこれも難しい。このため，次回リバランスまでのリバランス停止期間が，足元のポートフォリオにどのように依存するか探索的な手法で予備評価した。

なお，この予備評価の結果は評価の前提や方法に依存する。このため，比較的尤もらしい前提と方法を幾つか用意すれば，複数の代替的な評価結果を得ることになる。そして，これらの評価結果ごとに，近視眼的な最適化を逐次行えば，近視眼的な解のクラスにおいて，複数の代替的なリバランス戦略を用意したことになる。

こうして個別具体的なリバランス戦略を用意すれば，シミュレーションによって多期間モデルにおける本来の目的関数を評価するのは容易である。これにより，用意した代替的なリバランス戦略群の中で最良のものを選択できる。

以上が本稿のアウトラインである。今回は，足元のポートフォリオとリバランス停止期間の関係の予備評価をかなり簡略化して行った。この予備評価の制約を緩めれば解のクラスの効率性の改善余地が生じる[7)]。また，両者の関係について，今回はリバランス停止期間の平均値のみに着目したが，他の確率的な特徴を見ることで，リバランス戦略の効率改善に関する何らかの知見を得ることができるかもしれない。なお本稿では，平時のリバランスのみを扱ったが，市場にショックが生じた時の戦略については稿を改めて考えたい。

補論．リバランスの効果の持続性

ここでは，２期間モデルに(6)式の目的関数を適用して，s 期初のリバランス ε_s による同式第１項の改善を考える。ベンチマークとしては，s 期初にリバランスを行わないケースを考える（$\varepsilon_s = 0$）。なお本補論は，s 期初のリバランス ε_s の効果の持続性を見

るのが目的である。このため，翌$s+1$期初は両ケースともリバランスを行わないものとする（$\varepsilon_{s+1}=0$）。

まず，個々の投資対象のs期のリターンを要素とするベクトルをR_sと書く。そして，これらのリターンを対角成分とする対角行列を$\mathrm{diag}(R_s)$と書く。さらに，この対角行列と単位行列の和をΓ_sと書く（$\Gamma_s=\mathrm{diag}(1+R_s)$）。この対角行列$\Gamma_s$を用いると，$s$期初にリバランス$\varepsilon_s$を行ったケースの翌$s+1$期初におけるポートフォリオ$\pi^s_{s+1}$と，リバランスを行わなかったケースのポートフォリオπ_{s+1}は，それぞれ次のように表される。

$$\pi^s_{s+1}=\Gamma_s(\pi^*+\delta_s+\varepsilon_s)$$
$$\pi_{s+1}=\Gamma_s(\pi^*+\delta_s)$$

また，(6)式の目的関数の第1項の総和は，s期初にリバランスε_sを行ったケースと行わなかったケースとで，それぞれ下記のように表される。

$$(\delta_s+\varepsilon_s)'\Sigma(\delta_s+\varepsilon_s)+\mathrm{E}_s[(\pi^s_{s+1}-\pi^*)'\Sigma(\pi^s_{s+1}-\pi^*)]$$
$$\delta_s'\Sigma\delta_s+\mathrm{E}_s[(\pi_{s+1}-\pi^*)'\Sigma(\pi_{s+1}-\pi^*)]$$

この時，s期初のリバランスε_sの効果は，後者に対する前者の超過値として把握できる。そこでこれら2つの式に，Γ_sを使ったπ^s_{s+1}とπ_{s+1}の表現式を代入して整理すると，この超過値は次式で表される。

$$(2\delta_s'\Sigma\varepsilon_s+\varepsilon_s'\Sigma\varepsilon_s)+\mathrm{E}_s[2\delta_s'\Sigma\Gamma_s\varepsilon_s+\varepsilon_s'\Gamma_s\Sigma\Gamma_s\varepsilon_s]$$

ここで，R_sの各要素（個々の資産の短期のリターン）の期待値と分散・共分散（(6)式のΣの各要素）がいずれも1に比べて十分小さい場合，近似的に下記の関係が成立する。

$$\mathrm{E}_s[\Sigma\Gamma_s]\approx\Sigma$$
$$\mathrm{E}_s[\Gamma_s\Sigma\Gamma_s]\approx\Sigma$$

この場合，s期初のリバランスε_sの効果を表す上記の超過値は　次のように書き換えられる。

$$(2\delta_s'\Sigma\varepsilon_s+\varepsilon_s'\Sigma\varepsilon_s)+[2\delta_s'\Sigma\varepsilon_s+\varepsilon_s'\Sigma\varepsilon_s]$$

ここで，最初の小括弧内は，s期初にリバランスを行ったs期における期待効用の改善を表す。これに対し，次の大括弧内は，リバランス後の翌$s+1$期における期待効用の改善を表す。そして上式を見て分かるように，これら2つの改善効果は近似的に等しい。これはある期に行ったリバランスの効果が，将来にわたって減衰せずに持続することを示している。

注

1）「GPIF 世界最大規模の機関投資家」日本経済新聞（2016年7月22日）。

2）一旦決めた政策ポートフォリオを1年以内に改訂したケースは寡聞にして聞かない。

3）本稿Ⅳ節以降では，表記の煩雑を避けるため，短期のリターンの共分散行列$(1/T)\Sigma$をΣと記している。

4）仮に政策ポートフォリオの有効期間を5年として，この十数年来の環境の延長で，その超過リターンの期待値が年間3％，安全利子率をゼロとすると，通期の期待リターンは15.9%になる。この内，複利効果は0.9%に止まる。

5）ここでは，筆者が委員を務める機関投資家の政策ポートフォリオを使用した。

6）リバランスにかかる取引コスト，もしくはコスト換算の上で甘受するネガティブな（プレミアムを期待できない）リスク。

7）本文では割愛したが，図1のあるカーブを少し変更することで，(6)式の目的関数を改善できることを確認した（図2の「＊」シンボル)。

参考文献

中島英喜（2018）「政策ポートフォリオの選択とリバランス」『経済科学』第65巻3・4号，1‐6頁。

山下隆（2000）「政策アセットミックスへのリバランスについて」『証券アナリストジャーナル』第38巻5号，87‐103頁。