Ⅱ　数学の授業展開の形式について

高　須　照　夫

従来，高校の数学の授業では，ほとんどの部分で，まずはじめに新しい基本事項（法則，定理，公式）を理論的に導き（証明），そのあとでそれを利用するための練習問題を解かせることによりその内容を理解させる。という展開形式がとられているように思われる。これは私達がこれまで数学を学んできたときくりかえして来た形式でもあり，多くの数学の参考書が読者に理解させるためにとっている形式でもある。高校の数学の学習においてもこの形式が最も適しており，これ以外の方法は邪道なのだろうか。最近とくに高校数学の内容の多様化と高度化，ならびに高校生の学力の幅の拡大にともない，かなり多くの生徒がとっつきの部分の厳密さと難解さのために早い時期に数学を敬遠してしまう原因となってはいないだろうか。たとえば，

数Ⅰ，指数法則の拡張の部分，対数の公式

数Ⅱ，三角関数の加法定理ならびにそれに続く公式

数Ⅲ，微分法に入る前の極限と連続についての理論

など。

また，大学入試において，教科書のはじめにのっているような基本事項の証明や，定理の内容を述べさせるような問題が出題された場合に，技巧的な難問がよくできるのに反して意外とできがよくなかったという報告をみたりきいたりしたこともあり，校内のテストでも出題してみて公式の使いかたはよくできるが証明のしかたは知らないという部分が多いのに気付く，これは高校における学習の段階で，練習問題を解くことにより，やっとその使い方がわかった時点では，その証明はとっくに終っており，使い方は知っていても証明や内容のこまかい条件は忘れてしまっているためではなかろうか。たとえば

数Ⅰ，因数定理，余りの定理，対数の公式

数Ⅱ，三角関数の加法定理，正弦定理，余弦定理，ベクトルの内積の成分表示

数Ⅲ，商の微分の公式

など。

もっとも例外的な展開の形式として次のA，Bのようなものがみられる。

A. 新しい公式を導くに先だって，その証明に用いる式の変形や考え方をいくつかの具体例について練習しておき，一般化のための準備をしておく。あるいは具体例の説明で一般的証明の代用をする。あるいは具体例で一般の場合の予測をしておく。この形式がよくとられるのは次のようなところである。

- 2次式の平方完成（2次方程式の根の公式，放物線の頂点，円，だ円，双曲線の中心や頂点など）
- 指数法則（整数の指数）
- 常用対数の指標のきめ方
- 順列，組合せなどの公式
- 数列 $\{r^n\}$ の収束，発散
- x^n（n：自然数）の導関数
- 確率の加法定理，乗法定理など

B. 法則，定理，公式などの基本事項をひとまず認めさせ，それを用いて問題を解いたり，あるいは，それを出発点として理論をすすめたりして，証明はあとの段階にまかせる。あるいは自由研究として特別にあつかうか，あるいは省略する。この形式は，中学校では，「更に進んだ数学によれば」などとことわって，円錐や球の体積，球の表面積の公式が使われたりするが，高等学校の教科書では，証明を省いたり，厳密さを欠く場合にはそれがなるべく目立たないような配慮がくばられた表現がしてあるようにみうけられる。この形式が使われるのは，やむをえない場合にかぎられ，次のような部分にみられる。

- 指数法則の実数の指数（一般に実数の連続性に関することがら）
- 数列，関数の極限についての公式
- eの値
- 正規分布と二項分布の関係
- 標本平均の分布における標準偏差と，母集団の標準偏差の関係

など

さて，このAの形式については具体的なものから次第に一般化して行く過程で授業にもりあがりができ充実した感じの授業ができることが多く，生徒の方も理解がしやすく，また個々のものから一般へとまとめる意味の発見学習ということが自然になされていることになりすぐれた展開形式であると思われる。しかしこの形式をどこででも利用することは不自然でもありまた時間的にも無理が多く，前に述べた部分で用いるくらいが適当であろう。

次に，Bの形式であるが，前にも述べたように高校の教科書ではこれを極力避けて編集してあるようにみうけられるが，数学では証明がまだやってない段階で定理や公式などを用いて問題を解いたり，更に理論を進めることは教育上のぞましくないのだろうか。という疑問をときどきいだいてきた。要するにこのBの形式をもう少し積極的に授業にもちこんでみることはよくないことなのだろうかと考えた次第である。すなわち基本事項をひとまず借りものの形で受けいれて利用することにより内容使いみちをよく知ってから，しかもその成立する理由について疑問なり興味なりをいだいたあとにおいて証明する。という形式を適当な部分で意識的に用いてみることによりそれなりの効果があるのではなかろうか。たとえば次にあげるような。

〔1〕 定理，法則，公式などの証明はその内容を十分理解していなければ証明のすじ道や必然性をなっとくすることがむずかしい場合が多い。したがって新しい単元に入ってはじめに，まずこれから用いる基本事項を厳密に証明しあとは安心して使えばよいというのでなく，しばらくの間は証明なしで用いてみて使いなれてから証明をすれば，証明の段階では理解が容易であろう。

〔2〕 証明なしで基本事項を用いている段階で，学習者はその便利さに気づくと同時に，何故この便利な基本事項がなり立つのだろうかという疑問が生ずるにちがいない。これはすなわち証明それ自身の発見にもつながる。Aの形式が法則の発見に役立つのにくらべてBの形式は証明の発見に役立つと考えられる。

〔3〕 一つの単元の入り口が定理の証明などのために厳密，難解，はんざつであることにより，はじめから拒否反応を示す生徒が出る場合もあり得る。はじめの一つ二つの基本事項の証明だけを省略して認めればあとはそれ程の抵抗もなくうけ入れられる場合は，そうすることにより数学が不得意な者もかなり気楽に深入りをすることができるのではなかろうか。

更に極端な考えもまじえてつけ加えれば

〔4〕 数学にも実験があってもよいのではないか。

〔5〕 価値ある法則などを生徒に紹介してもよいのではないか。

〔6〕 急激な科学技術の進歩におくれないためその正しいことが保証されておればどんどん使いこなす融通性があってもよいのではないか。

等……

以上いくつかの理由をならべてみたが，多分にひとりよがりなこじつけもあり，これらと表裏をなす欠点もあると思われる。またもちろん証明より利用を優先させることを全面的に主張するわけではなく適当な部分で適宜このような展開形式もまじえてみたらどうだろうかという程度の気持で一，二の実験的授業をこころみ反応をしらべてみた。

一つは昨年度はじめ，高校2年の数ⅡB三角関数のところで加法定理ならびにそれから導びかれる公式の証明と応用に関する部分で，A，B，Cほぼ等質の三クラスについて（表1）に示すような三種の授業展開をしてみた。そして直後および一年後にテストを実施して（表2）のような結果を得た。この結果だけによれば直後においては殆んど変らず（実はこののちめあてのBの組の数学の成績が目立ってよくなりいささか気をよくしたのであるが）一年後の結果はBの組が目に見えてよくないことに気付く，そして少くとも自分の考えは成功していなかったことになる。もっともBの組では証明を最後にまとめるさい，抽象的にきちょうめんにやりすぎたこともあるいはえいきようしているかも知れない。

（表 1）

時限＼クラス	A	B	C
1	数Ⅰ三角関数の復習 $\sin(\alpha\pm\beta)$，$\cos(\alpha\pm\beta)$の利用	左に同じ	数Ⅰ三角関数の復習 $\cos(\alpha-\beta)$ の公式を導く
2	上の公式の証明 $\tan(\alpha\pm\beta)$ の利用，証明	$\tan(\alpha\pm\beta)$ の公式利用問題演習	$\cos(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha\pm\beta)$， $\tan(\alpha\pm\beta)$ の公式を導く
3	問題演習	2倍角，半角公式の利用	上の公式の利用
4	2倍角，半角公式の利用	3倍角公式の利用	問題演習
5	上の公式の証明 3倍角の公式利用	和↔積公式の利用	2倍角，半角公式を導く，同公式の利用

6	3倍角公式の証明	$\cos(\alpha-\beta)$ の公式より出発してこれまで用いた公式を順に証明する。 全体のまとめ	3倍角の公式を導く，同公式の利用
7	和↔公式の利用とその証明		和↔積公式を導く，その利用
8	公式の記憶テスト 全体のまとめ	公式の記憶テスト $\cos(\alpha-\beta)$ の公式の証明	公式の記憶テスト 全体のまとめ
9	公式証明テスト		
⋮	加法定理の応用，問題演習，中間考査（公式利用テスト）のあと正弦，余弦定理へ進む， Aは計画中断（教生のため）B，Cはそれぞれその形式をできるだけ保って進める。		

（表 2）

テストの種類	直後のテスト			一年後のテスト		
ク　ラ　ス	A	B	C	A	B	C
公式記憶テスト	93	91	92	80	72	76
公式証明テスト	84	84	90	72	65	75
公式利用テスト	56	54	52	72	66	74

いま一つは本年度はじめから高校3年の数Ⅲ微積分の授業のさい，それぞれのねらいをもって種々の試みをしてみた。このたびはうけもったクラスはただ一つで他との比較もできないのでただ実施してみただけでその効果については何ともいえない。生徒は比較的数学に関心のあるものが多く熱心である。

1. 数Ⅲ微積分における授業展開

数Ⅲの微積分が終った直後であったので，（表3）に示すような形で微積分の計算がかなり自由にできるところまで運んだ。<ねらい>入り口のはんざつさを避けて計算力を能率的につけること，公式が成り立つ理由に関心をもたせること。

2. 中間のアンケート

つぎの2つのアンケートをしてみた。この時点では前ページの形式にしたがい，数Ⅲの微分および不定積分の計算はほぼできる状態にあり，認めた微分の公式はまだ証明してない。

<ねらい>証明なしで基本事項を認めることについての意識と抵抗を調べる。

〔問1〕中学校以来，証明をしないで用いたことのある公式，定理，法則を知っていたら書け。またそれがその後いつどこで証明されたかをおぼえていたら書け。

その解答は（表4）のようで後半の問いについてはほとんど解答がなかった。これによればきわめて意識はうすいとみられる。

〔問2〕数学で証明がまだできていない公式，定理，法則などを用いて問題を解くときの心境を述べよ。

その解答の表現はまちまちであるが主なる主旨を大別して表にすると（表5，6，7）のようになった。証明なしで基本事項を応用することについては技術的にも気分的にもかなり抵抗があるようにみえる。

3. 教科書内容の確認

そのあとは大体教科書に沿って進み認めてきた公式の証明も順に証明をすます。その途中で関数の和差積商の極限の公式が今まで使って来た教科書でどの程度に扱かわれているかをしらべ（表8）のように扱ってあることを知る。

<ねらい>高校の数学ではあらゆることを完ぺきな厳密さであつかうことはできないことの一例を見させる。

4. 期末考査の問題の中で

期末考査の問題の一つとして「ロピタルの定理」を認めて極限を求めさせる問題を出してみた。問題と結果は（表9）のようである。

<ねらい>定理の条件を十分理解して使わないと失敗しやすいことを体験させる。

5. 補充の演習問題として

一時間の演習用に（表10）のように□内の公式を説明なしで与えそれを用いる問題を解かせてみた。その結果は（表11）のようであった。大体の意味を察してかなり使いこなせるものだと感じた。

<ねらい>証明もなく，使い方もおそわらずに公式だけを与えられて，どの程度的確に使いこなせるかを体験させる。あるいは調べる。

6. 宿 題

（表12）に示すような問題を与えて考えさせてみた。結果は（表13）

<ねらい>便利な公式であることがわかったとき，その公式を自分で証明しようという意欲をわかせる。あるいは意欲をわかすかどうかを調べる。

7. まとめのアンケート（表14）

<ねらい>以上のような各種の試みによって証明と利用に関する考え方が多かれ少なかれできたであろうが，どのようにうけとめどのように反応するかを調べてみた。選択枝の文章は前に生徒が自由に出したアンケートの答えを参考にしてこちらで作ったものである。

以上では何も結論を出すことはできず大して意味もないかも知れないが，この間毎日の授が大へん楽しかったことだけつけ加えておこう。

数Ⅲ微積分における授業展開　　45.4〜

微積分の公式 $\boxed{}$ 内のものはひとまず認める。

$\boxed{(x^r)'=rx^{r-1}\quad r：\text{有理数}} \Longrightarrow \int x^r dx=\frac{x^{r+1}}{r+1}+C \qquad (r \neq -1)$

$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ \left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$

$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}}$

$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{u'}{v^2}$

$\boxed{y=f(u),\ u=g(x)\ \text{のとき}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$ $\Longrightarrow$ $f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とすると $\int f(g(x))g'(x)dx=F(g(x))+C$

$y=(f(x))^n$ のとき

$y'=n(f(x))^{n-1}\cdot f'(x)$ 　　$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$

$x^2+y^2=a^2$ のとき

$2x+2yy'=0$

$\boxed{(\sin x)'=\cos x,\ (\cos x)'=-\sin x \quad (x\text{ は radiam})}$ $\Longrightarrow$ $\int \cos x dx=\sin x+C$

$\int \sin x dx=-\cos x+C$

$(\tan x)'=\sec^2 x,\ (\cot x)'=-\mathrm{cosec}^2 x$

$(\sec x)'=\sec x \tan x$ など $\longrightarrow$ $\int \sec^2 x\, dx=\tan x+C$ など

$\boxed{(e^x)'=e^x,\ (\log x)'=\frac{1}{x}\ (\text{底は } e)}$ $\Longrightarrow$ $\int e^x dx=e^x+C$

$(a^x)'=a^x\log a,\ (\log ax)'=\frac{1}{x\log a}$ $\longrightarrow$ $\int\frac{1}{x}dx=\log|x|+C$

$(\log|x|)'=\frac{1}{x},\quad (\log|f(x)|)'=\frac{f'(x)}{f(x)}$ 　　$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$

$\int \tan x\, dx,\ \int \sec x\, dx$ など

（表 3）

◎ 証明なしで用いた公式や定理

球の体積，表面積	5	左にあげたもののほかには，(各1)
円すい，角すいの体積	5	三角形の重心，内心，外心など
ピタゴラスの定理	3	平行線は交わらない
2次方程式の根の公式	2	2点を通る直線はただ一つ存在
円の面積	2	方べきの定理
おぼえていない，なし	14	ヘッセの標準形
中学では公式の証明は全くなった	1	$\log_b c=\dfrac{\log_a c}{\log_a b}$　$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$
		$a^m\cdot a^m=a^{m+n}$,　$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

（表 4）

◎ 気にならない方の意見

- 公理のようなものとして認めることにより（1）
- 一ばんの基本になるところを認めたが，そのあとの関連は論理的に示してあるから（1）
- ふだん公式などを用いるとき，それが証明してあるかどうか，またどのように導びかれたかをそれほど意識していないから（1）
- 公式などの証明をやっても，どっちみちはっきりおぼえているわけではない，それを用いて問題解決できればよい。（4）
- どうせおぼえなければならないことだからとすなおにうけ入れてしまう。（1）
- 証明がむづかしくて，用いる方がやさしいようなものは特に用い方だけをおしえてもらえば楽しい。（1）
- どうせ証明できるにきまっているから不安はない。（1）

（表 5）

◎ 気になる方の意見

- 証明がしてない公式はおぼえにくい，また忘れると思いだせない。（4）
- 証明を先にやった方がおぼえやすく，印象にのこる。（1）
- 証明をしてすっきりさせたいという気持が強い。（3）
- 本当に成り立つかどうか不安（3）
- 多少心苦しいがあきらめの心境（3）
- 全く不満公式や定理がわかってこそ真に問題が解けたといいうる。（1）
- 理解していないものを丸暗記するのは不得意である。（1）
- ごく基本的な公式など心配ないが，条件がたくさんある定理などはとつぜん与えられても使いにくい。（1）
- 何となく気もちが悪い。（3）
- まちがっておぼえているのではないかと不安（3）

（表 6）

◎ その他の意見

- 未知の興味というものがある。証明ができたときの満足感が予想される。（3）
- 証明のとき使いなれているとよく理解できるであろう。（1）

（表 7）

◎ 教科書内容の確認

◦ 数Ⅱ数列

収束する2つの数列の和・差・積・商については次の関係がなり立つ（証明なし）

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,\quad \lim_{n\to\infty} b_n = b \quad \text{ならば} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b \quad \text{など}$$

◦ 数Ⅱ微分法

関数の極限値については，数列と同じように次の関係がなり立つ。（証明なし）

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha,\quad \lim_{x\to a} g(x) = \beta \quad \text{ならば} \quad \lim_{x\to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \alpha + \beta \quad \text{など}$$

◦ Ⅲ微分法　関数の極限

数ⅡBでも学んだように，次の関係がなり立つ　上の公式

◦ 数Ⅲ微分法　関数の連続

関数の極限値の性質を用いれば，次の事がらが証明される

x の関数 $f(x)$，$g(x)$ が　$x = x_0$ で連続ならば
$f(x) \pm g(x)$ なども　$x = x_0$ で連続

（表 8）

◎ 期末考査に出題

問　「2つの関数 $f(x)$，$g(x)$ が $x=a$ の近くで微分できて $f(a)=g(a)=0$

のときは $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が成り立つ」

ことを認めて，次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{x^2}$

解答の分類

(1)　正答　37　　誤答　8　　計　45

(2) 正しくできたもの	11	計 45
できなかったけれど条条にあてはまらないことには気付いたもの	2	
分子，分母を2度微分してしまったもの	16	
全くできないもの	16	

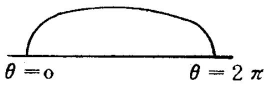
（表 9）

◎ 演　習

〔面積〕

○　媒介変数 $x=f(t)$，$y=g(t)$

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t)f'(t)\,dt$$



問 1. サイクロイド

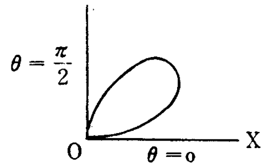
$x = a(\theta - \sin\theta)$

$y = a(1 - \cos\theta)$

と x 軸で囲まれた図形の面積

○ 極方程式 $r=f(\theta)$

$$\boxed{\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta}$$



〔孤の長さ〕

○ $y=f(x)$

$$\boxed{\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}$$

○ 媒介変数 $x=f(t),\ y=g(t)$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt}$$

○ 極方程式 $r=f(\theta)$

$$\boxed{\int_{\beta}^{\alpha} \sqrt{r^2+\left(\frac{d\gamma}{d\theta}\right)^2}d\theta}$$

〔回転体の表面積〕

$$\boxed{2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx}$$

問 2.

$r=a\ \sin 2\theta$ $(a>0)$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$

で囲まれた図形の面積

問 3. 四分円

$x^2+y^2=a^2,\ x\geqq0,\ y\geqq0$

の弧の長さ

問 4. 円

$x=a\ \cos\theta,\ y=a\ \sin\theta$

$(0\leqq\theta\leqq2\pi)$

の周

問 5. 円

$\gamma=2a\sin\theta$

$(0\leqq\theta\leqq\pi)$

の周

問 6.

球の表面積

（表 10）

公式の使い方は説明せず，式を見ただけで使いこなせるかどうかをみた。机間巡視中の質問にはできるだけ簡単に応答し，相互のはなし合いはできるだけさけさせた。定積分の形にするところまでをしらべて

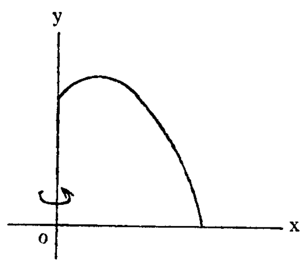
43名が提出し，23名が全問正解　誤答の数は次のようであった。

問1	問2	問3	問4	問5	問6
3	1	8	3	6	14

（表 11）

◎ 宿　題

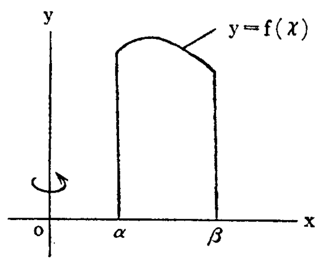
1. $y=-x^2+2x+3$ $(x\leqq0,\ y\leqq0)$ と x 軸 y 軸とで囲まれた図形を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。



2. 曲線 $y=f(x)$ が $0\leqq\alpha<x<\beta$ で正のとき，この曲線と $x=\alpha,\ x=\beta$ および x 軸で囲まれた図形を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積は次の式で求められる。

この公式を用いて1.を解け。

$$\boxed{2\pi\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx}$$



3. 曲線 $y=\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と x 軸，y 軸で囲まれた図形が y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。
4. 2，の公式の意味を説明せよ。（厳密でなくてもよい）

（表 12）

受講者45名中39人が提出　1，2，3はほとんど全員が正しい解答を出している。	
4に対する熱意は期待したほどなかった	
正しい教え方と適当な表現のもの	6
どうにかわかっているもの	10
何か少々書いているもの	6
白　紙	17

（表 13）

◎　アンケートのまとめ〔45名〕

数学の授業の形式として「いくつかの基本事項を，証明せずに認めた上で，それらを用いて更に進んだ事項をみちびいたり，問題を解いたりして，その基本事項の内容や，つかい方をはっきり把握したのちに，あらためて証明する。」というゆき方についてどのように感じたか，つぎのうち同感と思うもののを番号を○でかこんで下さい。（○は一つでなくてもよい。）

〔1〕基本事項を証明しないで用いる段階で

1. 証明がされてない事項は本当に理解してないことであり，それを用いたのでは真に問題が解けた気がしない。〔16〕
2. 証明してない事項はおぼえにくく，忘れても思いだせない。またまちがっておぼえているのではないかと不安である。〔25〕
3. 数学を学ぶときの基本的態度としては，やはり，いかなることも証明をしてから用いるべきである。〔10〕
4. 公理としてあつかうことにすれば証明なしで認めてもさしつかえない。〔12〕
5. 教科書にのっていることだから，まちがっているはずはなかろうし，あとで証明をするのだから不安なく用いることができる。〔6〕
6. 以前に証明したはずの定理でも，その証明のしかたはおぼえていないものが多いのだから，結果をおぼえれば，証明はしても，しなくてもさほど変りはない。〔9〕

〔2〕あとで基本事項を証明する段階で，

1. 証明すべきことがらの内容がよくわかっているので，証明のすじ道がよく理解できる。〔16〕
2. 用いているとき不安であっただけに，その証明の方法に興味がわき，印象に残る。〔6〕
3. 既に使い慣れて，当然のように考えられることを，あらためて証明するのは新鮮味がなく，循環論法にもおち入りやすい。〔23〕
4. 既に内容も利用法も知っているのだから，仮に証明を省略してしまっても実用上にはさしつかえないと思う。〔5〕
5. 数学の法則を他の分野に応用するためには，厳密な証明に時間をかけるよりも，新しいことをより多くおぼえることの方が先決であるから，証明をする時間を他にまわす方が有効である。〔1〕
6. 数学の理論は基礎にさかのぼれば，きりがなく，またかえってむずかしくなるから，高校程度では適当なところに出発点を設定すれば，証明しないで公理同様に認めてしまうものがあっても，やむを得ない。〔14〕

（表 14）