論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　　第　　　　号

氏　　　　名　　　才川 隆文

論　文　題　目

Formalization of Equational Reasoning in the Set-Theoretic Interpretation of Type Theory
(型理論の集合論的意味論を用いた等式変形証明法の形式化)

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　Ph.D.
大　平　　徹

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（情報科学）
ガリグ　ジャック

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（学術）
久　保　　仁

委　員　Institute of Information Science, Academia Sinica
教授　Ph.D.　Shin Cheng-Mu

論文審査の結果の要旨

本論文は形式論理による表現を用いて数学における証明を計算機において検証支援を行う探求の一つである。通常数学で行われている「非形式」な証明では、公理や論理の個々をより抽象化して行うことが多い一方、計算機における操作は基本的には記号の操作であるために、一般の証明のように、数値だけでなく、プロポジションや定義の同値性をも含む等式やその変形を含む抽象化された複雑な状況にも精密に対応するためには、「型」(Type)など、種々の道具立てが必要となる。

本論文において、才川氏は集合論的な意味論の視点から型理論で形式化をする研究について述べている。その主結果は非決定性混合モナドを使ったプログラムに対する等式証明の健全性を保証するモデルの構築とその計算機による完全な証明である。ここでいうモナドは圏論における Kleisli triple であるが、Moggi [Moggi,1989] の構成により、モナドによって純粋な関数型プログラムにその意味を拡張するエフェクト(状態、入出力、例外処理や様々な非決定性など)を加えることができる。Gibbons 等の研究[Gibbons and Hinze, 2011]により、モナドで拡張されたプログラムに対しても等式変換による証明が可能である。ただし、変換の正しさを保証するために、必要な等式をみたすモナドを数学的に構成しなければならない。各エフェクトを実現するモナドは基本的に簡単に構成できるが、複数のエフェクトを組合せたモナドは必ずしも自明ではない。特に確率的非決定性(通常のモデルで計算の結果が値の上の確率分布)と選択的非決定性(通常のモデルで計算の結果が値の集合)を組み合わせた非決定性混合モナドを構成する試みについては 1995 年代から研究され、理論的には最近 Cheung の学位論文 [Cheung, 2017] の主結果として構成が与えられたばかりという状況である。

本論文は上記の結果の定理証明支援系 Coq 上の証明の完成を報告しており、その準備についても丁寧に記述している。まず、非決定性混合モナドのモデルとなる幾何学凸性モナドを構築するには、凸空間が必要になる。拡張性のために Stone [Stone, 1949] に基いた公理的な定義が選ばれたものの、証明のしやすさのために凸錐空間への埋め込みも新たに形式化されている (３章)。凸空間の概念を導入することで情報理論に於けるエントロピーや相互情報量への応用ができることも示している。

次にプログラミング用のモナドを扱う枠組みがなければならないが、圏 Set 上のモナドに限定することで、圏の射を Coq の関数として扱えるような形式化が得られている（４章、副論文）。この簡単な枠組みで Gibbons 等で提案されたエフェクトとその 19 の組合せのほとんどが扱える。このアプローチの有効性は選択的非決定性や確率的非決定性を使ったプログラムの等式変換の例で示されている。ただし非決定性混合モナドのみが例外である。

最終的には、非決定性混合モナドのみは準同型はアフィンでなければならず、圏 Set から出る必要がある。しかし、ここでも、concrete category に限定することで射が Coq の関数である性質を保っている（５章）。これは新しい方法であり、前述の Cheung の理論とほぼ同じ構成を行うことができる。ただし、冪集合の構成が有限生成から無限生成に変わっていて、その上で新しく考えた semicomplete semilattice という構成を行い、非決定性混合モナドのモデルが得られる。この証明は分野の課題であったが、才川氏は多くの概念を導入しながら Coq によって与えることに成功した。

ここでの形式化は Mizar のような古典的集合論に基いた定理証明支援系ではなく、型理論に基いた Coq を使っていたため、この違いも考慮しなければならない。まず、圏 Set を形式化するときには、集合論の集合のクラスではなく、ある型のユニバース Type を使っている。2 章でこの

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

ユニバースを Grothendieck universe で解釈することで、Type で行った証明が集合論でも正しいことを議論している。さらに、分布の分布を作るときに内部的な構成で選択公理を使っている。本論文ではこの点についても述べている。

才川氏の上記の研究への貢献は特に以下のようになる。１）数学の理論を直接に型理論の上で展開するときに、数学との整合性のために集合論的解釈が必要という視点を推進したこと。２）主に数学的な側面と型理論の両面の知識を駆使しながら Coq の実装的な性質に沿う形で、凸空間などいくつかの必要な概念を形式化したこと。３）上記の概念の形式化などを反映して、ライブラリを作成して実際の計算機証明に活用できるようにしたこと。そして、これらによりいままでは取り扱えなかった圏論の実装に道を開いたことは十分な意義がある。

２０２０年３月９日に行われた学位審査セミナーにおいても、申請者は自身の研究成果と結果が歴史的な背景も織り込みながら、非専門家にも伝わるように工夫し、質問に対しても丁寧・明快に回答した。以上によって、学位審査委員会は、申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する。