論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　第　　号

氏　　名　　藤谷　拓哉

論　文　題　目

On certain central extensions associated to covering spaces
(被覆空間に付随するある中心拡大について)

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（数理科学）
太　田　啓　史

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　Ph.D.
森　吉　仁　志

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（数理科学）
松　尾　信　一　郎

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
糸　健　太　郎

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

ある種の（微分）同相群の中心拡大と特性類に関するいくつかの結果からなる論文である。曲率がゼロである平坦束の特性類は $\mathbb{R}$ 上自明となるが、離散位相を入れた構造群の群コホモロジーを考えることで非自明な量が得られることがあり、平坦束を研究する上で群コホモロジーの視点は有用である。

S^1 の 1 次コホモロジーの生成元 $u \in H^1(S^1;\mathbb{Z})$ が与えられると、S^1 に向きが定まり S^1 上の正規 $\mathbb{Z}$-被覆 $\mathbb{R}^1 \to S^1$ の同型類が一意に定まる。u を保つ、即ち向きを保つ S^1 の同相写像のなす群を $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ と書くと、次の群の中心拡大が存在する。

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathrm{Homeo}(\mathbb{R}^1)^{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Homeo}_+(S^1) \to 1.$$

ここで $\mathrm{Homeo}(\mathbb{R}^1)^{\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{R}^1$ の同相写像で被覆変換群 $\mathbb{Z}$ の作用と可換なもの全体のなす群である。このとき、この中心拡大（コホモロジー）類は普遍平坦 S^1 束の Euler 類と一致することが古典的によく知られている。本論文ではこの古典的な結果の一般化を考察する。まず、上の設定を次のように定式化する。

連結な CW 複体 X と $\alpha \in H^1(X;\mathbb{Z})$ が与えられると、α に対応する X 上の正規 $\mathbb{Z}$-被覆 $\widehat{X} \to X$ の同型類が一意に定まる。α を保つ X の同相写像のなす群を $\mathrm{Homeo}_\alpha(X)$ と書くと、次の群の中心拡大が得られる。

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathrm{Homeo}(\widehat{X})^{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Homeo}_\alpha(X) \to 1. \tag{1}$$

ここで $\mathrm{Homeo}(\widehat{X})^{\mathbb{Z}}$ は $\widehat{X}$ の同相写像で被覆変換群 $\mathbb{Z}$ の作用と可換なもの全体のなす群である。

次に、普遍平坦 S^1 束に対応する概念とその Euler 類を定式化する必要がある。(以下 $G_\alpha(X) = \mathrm{Homeo}_\alpha(X)$ と略記。) 本論文では、連結な CW 複体 B 上のファイバー束 $E \to B$ でファイバーが X で構造群が $G_\alpha(X)$ であるもの（平坦とは限らない）を (X,α) 束とよび、(X,α) 束の Euler 類 $e_\alpha(E) \in H^2(B;\mathbb{Z})$ を定義した。特に普遍 (X,α) 束は $E_\alpha = (X \times EG_\alpha(X))/G_\alpha(X) \to BG_\alpha(X)$ で与えられ Euler 類は $BG_\alpha(X)$ の群コホモロジーの要素として定まる。ただし $EG_\alpha(X) \to BG_\alpha(X)$ は普遍 $G_\alpha(X)$ 束である。このとき、第一の結果は次である。

定理 1 [**藤谷-森吉**] (1) の中心拡大（コホモロジー）類は普遍平坦 (X,α) 束の Euler 類と一致する。

さらに、$(\widehat{X},X)$ から $(\mathbb{R}^1,S^1)$ への分類写像を用いて中心拡大類の群コサイクル表示を与えた。また、X が C^∞ 多様体の場合に同相群の代わりに微分同相群を考え、de Rham 複体係数の群二重複体において、中心拡大類のコサイクル表示も与えている。これらコサイクル表示は S^1 の場合に知られている森吉による表示式の直接的な一般化である。

次に、X が C^∞ 多様体 W の境界 $X = \partial W$ である場合を考える。W 上に正規化された体積要素 $\Omega = -d\eta \in \Omega^{n+1}(W)$ が与えられ、Ω を保つ W の微分同相写像のなす群の identity component を $\mathrm{Diff}_\Omega(W)_0$ と書くと、全射制限写像 $\mathrm{Diff}_\Omega(W)_0 \to \mathrm{Diff}_+(X)_0$ の核を G_{rel} とおくことで完全系列

$$1 \to G_{\mathrm{rel}} \to \mathrm{Diff}_\Omega(W)_0 \to \mathrm{Diff}_+(X)_0 \to 1 \tag{2}$$

が得られる。$F : \mathrm{Diff}_\Omega(W)_0 \to \Omega^n(W)$ を $F(\overline{\phi}) = \overline{\phi}^*\eta - \eta$ とおくと、これを G_{rel} に制限したものは保体積写像のフラックス準同型 $\mathrm{Flux} : G_{\mathrm{rel}} \to H^n(W,X;\mathbb{R})$ として知られている。

今、W 上に $\overline{\alpha} \in H^1(W;\mathbb{Z})$ が与えられ、$\alpha = \overline{\alpha}|_X \in H^1(X;\mathbb{Z})$ とおくと (X,α) は先の状況となり中心拡大 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathrm{Diff}(\widehat{X})^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{p} \mathrm{Diff}_\alpha(X) \to 1$ が得られるが、それを $\mathrm{Diff}_+(X)_0 \subset \mathrm{Diff}_\alpha(X)$ に制限した

$$0 \to \mathbb{Z} \to p^{-1}\mathrm{Diff}_+(X)_0 \to \mathrm{Diff}_+(X)_0 \to 1 \tag{3}$$

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

を考える。第二の結果は中心拡大 (3) の拡大類を完全系列 (2) を通して W のフラックス準同型で表すものである。$[\overline{\omega}] = \overline{\alpha}$ となる W 上の閉 1 形式 $\overline{\omega}$ をとり、$G = \mathrm{Diff}_{\Omega}(W)_0$ の群 2 コチェインを $\overline{\phi}_i \in G$ に対し

$$L(\overline{\phi}_1, \overline{\phi}_2) = \int_W \overline{\phi}_2^* F(\overline{\phi}_1) \wedge \delta\overline{\omega}(\overline{\phi}_2)$$

と定める。但し $\delta\overline{\omega} \in C^1(G; \Omega^1(W))$ である。

定理 2 [**藤谷**] (i) L は $\mathrm{Diff}_+(X)_0$ の群 2 コサイクルを定め、そのコホモロジー類は (3) の拡大類に $\mathbb{R}$ 上一致する。
(ii) 完全系列 (2) に付随する Lyndon-Hochschild-Serre スペクトル系列において、$\langle \mathrm{Flux}, \overline{\alpha} \rangle$ を transgression map で送ったものは (3) の拡大類に $\mathbb{R}$ 上一致する。ここで、$\langle , \rangle$ は W 上の Poincaré 対を表す。

定理 2 は $W = D^2$(2 次元閉円板) の場合の森吉の結果の一般化を与える。

定理 1 は指導教員森吉との共同研究である。これらの結果において、古典的な S^1 の場合を念頭に正規 $\mathbb{Z}$ 被覆を持つ X に対して設定をしかるべく定式化するステップは重要である。申請者によるいくつかの予備的考察を踏まえ、最終的な定式化は指導教員との共同研究の中で得られ、また証明の方針（申請者の以前の予備的結果を使う）も指導教員によるものであるが、実際に細部に至り証明を遂行したのは申請者であることを予備審査会において確認している。定理 2 については上記定式化の下で議論されるが、結果と証明は申請者自身によるものである。

このように一般化の鍵となる定式化や証明のアイデアは指導教員との共同研究によるものであり、また先行研究に関する理解不足がみられたものの、定式化に至る予備的結果や実際に細部に至り証明を完成させたのは申請者であり、そこで行われた群コホモロジーの計算力は評価できる。得られた結果は明解で当該研究に意義があると考えられる。

本論文に関する公開審査会を 2020 年 4 月 30 日に行い (新型コロナウイルス感染予防のため Zoom による)、申請者が博士の学位を取得するに足る学識を有することを確認した。以上により、本学位審査委員会は、申請者に博士（数理学）の学位が授与される資格があると判断する。