

空間図形の授業に先だって

数学科 高 須 照 夫

〔説明〕

平面内では直線の平行と垂直に関する次の6つの定理がなり立っていました。まずそれを確認しましょう
 a は直線, O は点を表わしています。

- 1 直線 a 外の点 O を通り, a に平行な直線がただ1つある。
- 2 直線 a 外の点 O を通り a に垂直な直線がただ1つある。
- 3 直線 a 上の点 O を通り a に垂直な直線がただ1つある。
 a, b, c を異なる直線とします。
- 4 直線 a と b がともに直線 c に平行ならば, a と b は平行である。
- 5 直線 a と b が平行で, 直線 c が a に垂直ならば, c は b にも垂直である。
- 6 直線 a と b がともに直線 c に垂直ならば, a と b は平行である。 (7分)

以上は平面内でのことでしたが, 次に3次元空間で今のことおよび今の〔 〕内の直線の一部または全部を平面におきかえてみると, 次の32個の命題を作ることができます。

そのうち正しいものと正しくないものがありますのでその判定をしてみましょう。これから順々にそれを示しますから, 正しいときは①のボタンを, 正しくないときは②のボタンを押して下さい。

これから示す a, b, c は異なる直線を, α, β, γ は異なる平面を表わし, a, b, c は α, β, γ のいずれにもふくまれないとします。

ここでは直線が平面に含まれてしまう場合をのぞいていることと, もう一つ空間における2直線が垂直であるということは, 直交しているとは限らず, ねじれの位置にあっても垂直である場合もあることを忘れてないで考えて下さい。 (3分)

- 11 直線 a 外の点 O を通り, a に平行な直線がただ1つある。

正答は①です (1分)

- 12 直線 a 外の点 O を通り, a に平行な平面がただ1つある。

図のような場合があり, 正答は②です (1分)

〔提示〕

- ① $[a]$ 外の O を通り $[a]$ に平行な〔直線〕がただ1つある。
- ② $[a]$ 外の O を通り $[a]$ に垂直な〔直線〕がただ1つある。
- ③ $[a]$ 上の O を通り $[a]$ に垂直な〔直線〕がただ1つある。
- ④ $[a] // [c], [b] // [c]$ ならば $[a] // [b]$
- ⑤ $[a] // [b], [c] \perp [a]$ ならば $[c] \perp [b]$
- ⑥ $[a] \perp [c], [b] \perp [c]$ ならば $[a] // [b]$

正しい.....①
 正しくない.....②

a, b, c 直線
 α, β, γ 平面

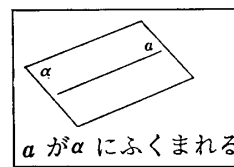


図1

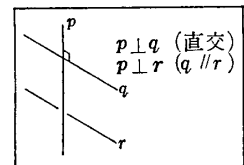


図2

11. a 外の点 O を通り
 a に平行な直線は1つ

12. a 外の点 O を通り
 a に平行な平面は1つ

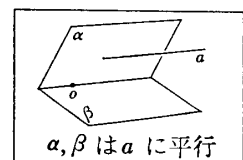


図3

13 平面 α 外の点 O を通り、 α に平行な直線がただ一つある。

13. α 外の点 O を通り
 α に平行な直線は1つ

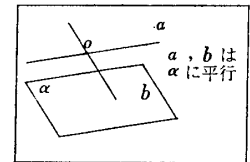


図4

図のような場合があり、正答は②です (1分)

14 平面 α 外の点 O を通り、 α に平行な平面がただ一つある。

14. α 外の点 O を通り
 α に平行な平面は1つ

正答は①です (1分)

1 直線 a 外の点 O を通り、 a に垂直な直線がただ一つある。

21. a 外の点 O を通り
 a に垂直な直線は1つ

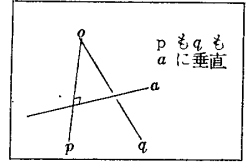


図5

図のような場合があり、正答は②です (1分)

22 直線 a 外の点 O を通り、 a に垂直な平面がただ一つある。

22. a 外の点 O を通り
 a に垂直な平面は1つ

正答は①です (1分)

23 平面 α 外の点 O を通り、 α に垂直な直線がただ一つある。

23. α 外の点 O を通り
 α に垂直な直線は1つ

正答は①です (1分)

24 平面 α 外の点 O を通り、 α に垂直な平面がただ一つある。

24. α 外の点 O を通り
 α に垂直な平面は1つ

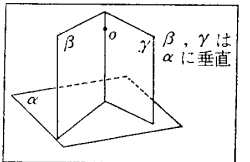


図6

図のような場合があり、正答は②です (1分)

31 直線 a 上の点 O を通り、 a に垂直な直線がただ一つある。

31. a 上の点 O を通り
 a に垂直な直線は1つ

図のような場合があり、正答は②です (1分)

32 直線 a 上の点 O を通り、 a に垂直な平面がただ一つある。

32. a 上の点 O を通り
 a に垂直な平面は1つ

正答は①です (1分)

33 平面 α 上の点 O を通り、 α に垂直な直線がただ一つある。

33. α 上の点 O を通り
 α に垂直な直線は1つ

正答は①です (1分)

34 平面 α 上の点 O を通り、 α に垂直な平面がただ一つある。

34. α 上の点 O を通り
 α に垂直な平面は1つ

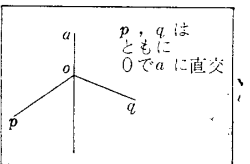


図7

図のような場合があり、正答は②です (1分)

41 2直線 a と b がともに直線 c に平行ならば、 a と b は平行である。

41. $a \parallel c, b \parallel c$
 $\rightarrow a \parallel b$

正答は①です (1分)

42 平面 α と直線 b がどちらも直線 c に平行ならば、 α と b は平行である。(b は α にふくまれない)

42. $\alpha \parallel c, b \parallel c$
 $\rightarrow \alpha \parallel b$

正答は①です (1分)

43 2平面 α と β がともに直線 c に平行ならば、 α と β は平行である。

43. $\alpha \parallel c, \beta \parallel c$
 $\rightarrow \alpha \parallel \beta$

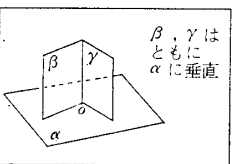


図8

図のような場合があり、正答は②です (1分)

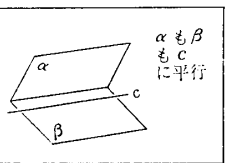


図9

- 44 2直線 a と b がともに平面 γ に平行ならば、 a と b は平行である。

$$44. a \parallel \gamma, b \parallel \gamma \rightarrow a \parallel b$$

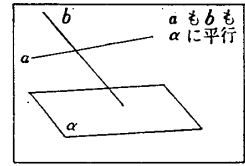


図10

図のような場合があり、正答は②です (1分)

- 45 平面 α と直線 b がどちらも平面 γ に平行ならば、 α と b は平行である。(b は α にふくまれない)

$$45. \alpha \parallel \gamma, b \parallel \gamma \rightarrow \alpha \parallel b$$

正答は①です (1分)

- 46 2平面 α と β がともに平面 γ に平行ならば、 α と β は平行である。

$$46. \alpha \parallel \gamma, \beta \parallel \gamma \rightarrow \alpha \parallel \beta$$

正答は①です (1分)

- 51 2直線 a と b が平行で、直線 c が a に垂直ならば c は b にも垂直である。

$$51. a \parallel b, c \perp a \rightarrow c \perp b$$

正答は①です (1分)

- 52 2直線 a と b が平行で、平面 γ が a に垂直ならば γ は b にも垂直である。

$$52. a \parallel b, \gamma \perp a \rightarrow \gamma \perp b$$

正答は①です (1分)

- 53 平面 α と直線 b が平行で、直線 c が α に垂直ならば、 c は b にも垂直である。

$$53. \alpha \parallel b, c \perp \alpha \rightarrow c \perp b$$

正答は①です (1分)

- 54 平面 α と直線 b が平行で、平面 γ が α に垂直ならば、 γ は b にも垂直である。

$$54. \alpha \parallel b, \gamma \perp \alpha \rightarrow \gamma \perp b$$

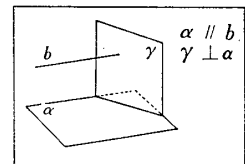


図11

図のような場合があり、正答は②です (1分)

- 55 直線 a と平面 β が平行で、直線 c が a に垂直ならば、 c は β にも垂直である。

$$55. a \parallel \beta, c \perp a \rightarrow c \perp \beta$$

図のような場合があり、正答は②です (1分)

- 56 直線 a と平面 β が平行で、平面 γ が a に垂直ならば、 γ は β にも垂直である。

$$56. a \parallel \beta, \gamma \perp a \rightarrow \gamma \perp \beta$$

正答は①です (1分)

- 57 2平面 α と β が平行で、直線 c が α に垂直ならば c は β にも垂直である。

$$57. \alpha \parallel \beta, c \perp \alpha \rightarrow c \perp \beta$$

正答は①です (1分)

- 58 2平面 α と β が平行で、平面 γ が α に垂直ならば γ は β にも垂直である。

$$58. \alpha \parallel \beta, \gamma \perp \alpha \rightarrow \gamma \perp \beta$$

正答は①です (1分)

- 61 2直線 a と b がともに直線 c に垂直ならば、 a と b は平行である。

$$61. a \perp c, b \perp c \rightarrow a \parallel b$$

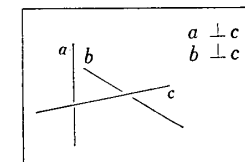


図13

図のような場合があり、正答は②です (1分)

- 62 平面 α と直線 b がどちらも直線 c に垂直ならば、 α と b は平行である。(b は α にふくまれない)

$$62. \alpha \perp c, b \perp c \rightarrow \alpha \parallel b$$

正答は①です (1分)

- 63 2平面 α と β がともに直線 c に垂直ならば、 α と β は平行である。

$$63. \alpha \perp c, \beta \perp c \rightarrow \alpha \parallel \beta$$

正答は①です (1分)

64 2直線 a と b がともに平面 γ に垂直ならば、 a と b は平行である。

正答は①です (1分)

$$\begin{array}{l} 64. a \perp \gamma, b \perp \gamma \\ \rightarrow a \parallel b \end{array}$$

65 直線 a と平面 β がどちらも平面 γ に垂直ならば、 a と β は平行である。

正答は①です (1分)

$$\begin{array}{l} 65. a \perp \gamma, \beta \perp \gamma \\ \rightarrow a \parallel \beta \end{array}$$

66 2平面 α と β がともに平面 γ に垂直ならば、 α と β は平行である。

図のような場合があり、正答は②です (1分)

$$\begin{array}{l} 66. \alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma \\ \rightarrow \alpha \parallel \beta \end{array}$$

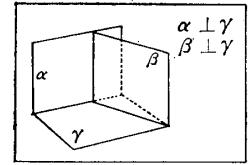


図14

以上のうちで正しいものが20個、正しくないものが12個あったわけです。正しくないものは、そのつど例を図で示してきましたが、正しいものは例を示すだけでは正しいことの保証にはなりません。これはいつでも正しいことを証明しなければならないわけです。

そして正しく証明するためには、まず、平行とか垂直とかの定義をはっきりしなければなりませんし、証明に必要な予備定理、更にさかのぼって必要な公理から出発しなければなりません。その意味でこれから順に空間図形に関する理論体系を作っていくことにします。

(3分)