数　学　科

I　数学的な考え方について

―― クラス分けによる組合せの問題 ――

持　田　都　也

〔I〕クラス分けを用いた考え方

数学的な考え方で大切なものは，ものごとをすじ道を通して考えることである。これについては，すでに，前の紀要で発表したが，すじ道を通してものを考える際に，複雑な事柄を重複しない様に分類して，考える対象を単純化し，考える事柄を簡単にすることが出来る。また，数学の学習を通して，数学を創り出していく際にも，この分類は有効である。特に集合の概念を用いる数学については，この分類は非常に役立つ。

この分類のことを，**クラス分け**と言っている。クラス分けすることによって

(1) 考える対象が単純化され，考える事柄を簡単にすることが出来，いろいろな法則の発見に役立つ。

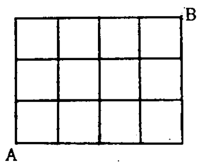
(2) クラス分けによって，同一クラスに属するものの間の相互の関係や，分類した各クラス間の相互の関係が明らかになる。

(3) クラス分けによって生れる，いろいろの性質を総合することによって，事柄の全体的な構造も明らかになってくる。

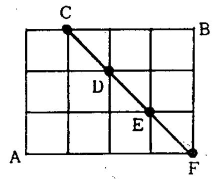
以上のように，**クラス分け**は，数学の問題の解決や発見の上にも有効な方法である。そこで，実際の数学の学習指導の中で，**クラス分け**を用いた例を挙げて見たい。

例(1)

右の図のような，碁盤目の道をAからBまで，遠回りしないで行く方法は何通りあるか。



この問題は順列，組合せの考え方を知らないものにとっては，いちいち鉛筆で道をたどって，行き方をしらべなければならない。そこで，いま，図のように線分ＣＦを引いて見ると，



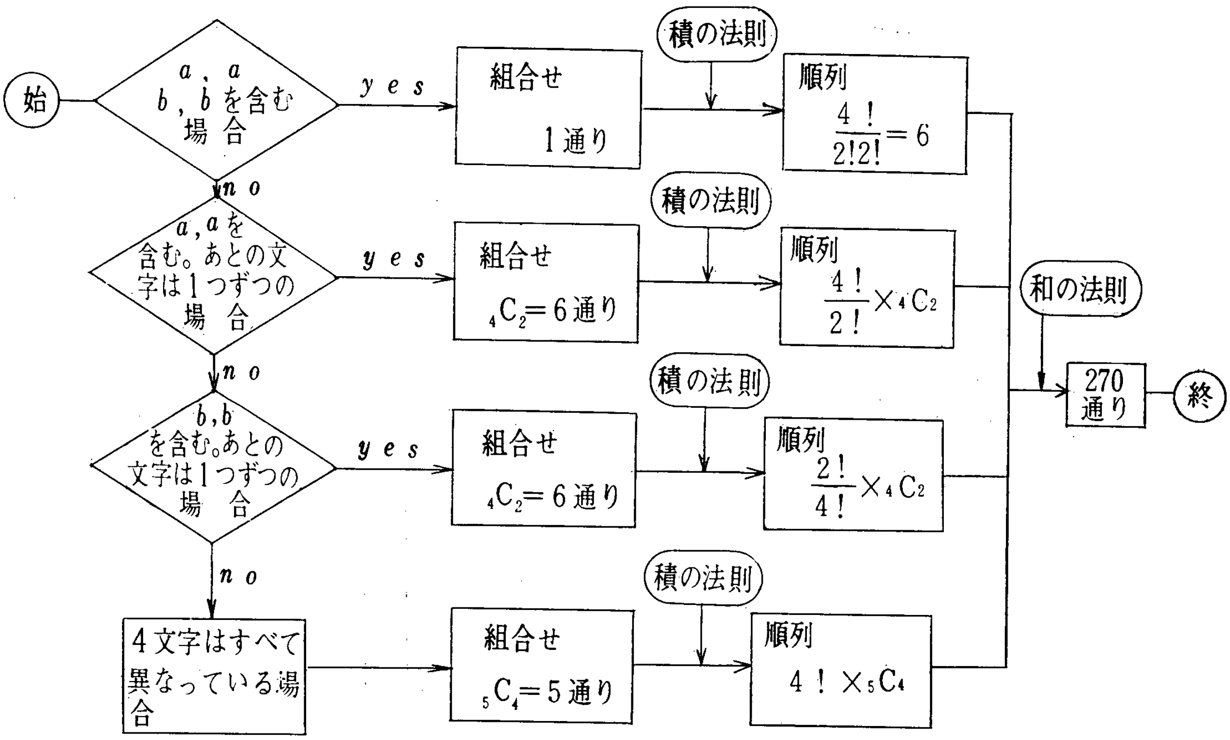
Ｃを通る行き方。
Ｄを通る行き方。
Ｅを通る行き方。
Ｆを通る行き方。

に**クラス分け**すれば，問題は単純になり，容易に教えられる。

例(2)

a，a，b，b，c，d，e の7個の文字から4個とって，並べる順列の数を求めよ。

クラス分けによって，枝別れを考えると



〔Ⅱ〕クラス分けの条件について

集合Mが，部分集合A_1，A_2，……，Anに**クラス分け**されているとき

(1) $M=A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots\cup An$

(2) $i\neq j$であれば　$Aj\cap Aj=\emptyset$

この(1)，(2)の条件がみたされていなければならない。

またMの**クラス分け**の属性P_1，P_2，……，Pnについては

(1)′Mのどの要素も，属性$P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n$のどれか1つはもっている。

(2)′Mのどの要素も，属性$P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n$の2つをもっていない。

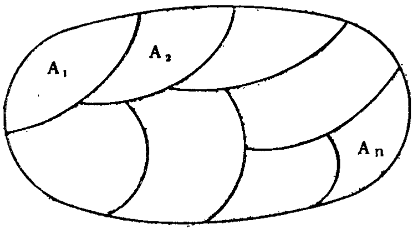
属性P_1をもつものの全体をA_1

属性P_2をもつものの全体をA_2

⋮

属性Pnをもつものの全体をA_n

とすると，A_1，A_2，……A_nについては，(1)，(2)の条件が成立ち，図のように，Mはすきまなく分類されることになる。



これが数学的な**クラス分け**の条件である。例1の場合では，MはAからBまで遠回りしないで行く行き方の集合であり。属性は，Cを通ること，Dを通ること，Eを通ること，Fを通ることである。C，D，E，Fを通るそれぞれの行き方の集合を，A_1，A_2，A_3，A_4とすれば，条件(1)，(2)を満足している。

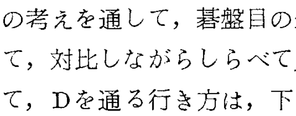
〔Ⅲ〕碁盤目の道の行き方と組合せ

クラス分けの考えを通して，碁盤目の道の行き方と組合せについて，対比しながらしらべて見た。

例1において，Dを通る行き方は，下の図で

A→D　と　D→B

の行き方をしらべて，A→D→B　を数えればよい。



$\left.\begin{array}{ll}A\longrightarrow D & 6\text{通り}\\ D\longrightarrow B & 3\text{通り}\end{array}\right\}$ A→D→B，$6\times3=18$通

同じように　Cを通るもの　4通り

Eを通るもの　12通り

Fを通るもの　1通り

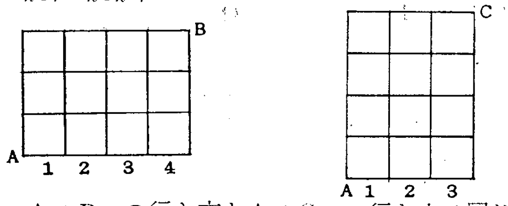
を数えれば，AからBへ行くには，上のどれかを通ることになり

$4+18+12+1=35$通り

となる。これは複雑なものを**クラス分け**によって，単純化した例である。

この碁盤目の道の行き方の数は，組合せの数と同じであるから，例1の行き方のを${}_7C_4=35$という記号で表わすことにして，碁盤目の道の行き方を通して，組合せの性質を考えて見る。

(i)　${}_nC_r={}_nC_{n-r}$



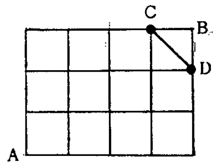
図で，A→Bへの行き方とA→Cへの行き方は同じ数だけある。従って

${}_7C_4={}_7C_3$

これを一般化すれば

${}_nC_r={}_nC_{n-r}$

(2)　${}_nC_r={}_{n-4}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$



図のように　A→C→B

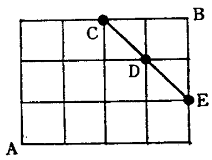
A→D→B　と**クラス分け**すれば

${}_7C_4={}_6C_4+{}_6C_3$

となる。これを，一般化すれば

${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

(3)　${}_nC_r={}_{n-2}C_{r-2}+2\,{}_{n-2}C_{r-1}+{}_{n-2}C_r$



A→C→B，A→D→B，A→E→B　と**クラス分け**すれば

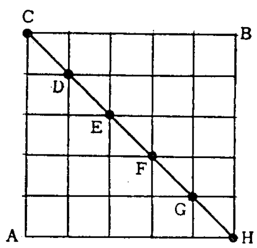
${}_7C_4={}_5C_1+2\,{}_5C_2+{}_5C_3$

となる。これを一般化すれば

${}_nC_r={}_{n-2}C_{r-2}+2\,{}_{n-2}C_{r-1}+{}_{n-2}C_r$

(4)　${}_nC_0{}^2+{}_nC_1{}^2+{}_nC_2{}^2+\cdots\cdots+{}_nC_n{}^2={}_{2n}C_n$

正方形の碁盤目の道を考えると



A→C→Bの行き方は　${}_5C_0 \times {}_5C_5 = {}_5C_0{}^2$ 通り
A→D→Bの行き方は　${}_5C_1 \times {}_5C_4 = {}_5C_1{}^2$ 通り
A→E→Bの行き方は　${}_5C_2 \times {}_5C_3 = {}_5C_2{}^2$ 通り
A→F→Bの行き方は　${}_5C_3 \times {}_5C_2 = {}_5C_3{}^2$ 通り
A→G→Bの行き方は　${}_5C_4 \times {}_5C_1 = {}_5C_4{}^2$ 通り
A→H→Bの行き方は　${}_5C_5 \times {}_5C_0 = {}_5C_5{}^2$ 通り

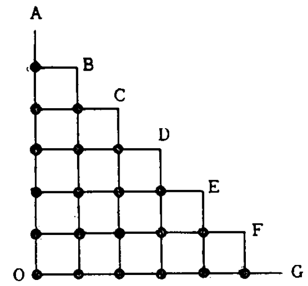
である。これはA→Bの**クラス分け**であるから

$${}_5C_0{}^2 + {}_5C_1{}^2 + {}_5C_2{}^2 + {}_5C_3{}^2 + {}_5C_4{}^2 + {}_5C_5{}^2 = {}_{10}C_5$$

となる。これを一般化すれば

$${}_nC_0{}^2 + {}_nC_1{}^2 + {}_nC_2{}^2 + \cdots\cdots + {}_nC_n{}^2{}_2 = {}_{2n}C_n$$

(5)　${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots\cdots + {}_nC_n = 2^n$



O→Aへの行き方は ${}_6C_0$ 通り
O→Bへの行き方は ${}_6C_1$ 通り
O→Cへの行き方は ${}_6C_2$ 通り
O→Dへの行き方は ${}_6C_3$ 通り
O→Eへの行き方は ${}_6C_4$ 通り
O→Fへの行き方は ${}_6C_5$ 通り
O→Gへの行き方は ${}_6C_6$ 通り

一方，これらの行き方は，格子点で道がかならず2つに分れるから，OからA，B，C，D，E，F，Gのいずれかにいくためには，6つ格子点を通るから，全体で2^6の行き方がある。従って

$${}_6C_0 + {}_6C_1 + {}_nC_2 + {}_6C_3 + C_{64} + {}_6C_5 + {}_6C_6 = 2^6$$

になる。一般に

$${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots\cdots + {}_nC_n = 2^n$$

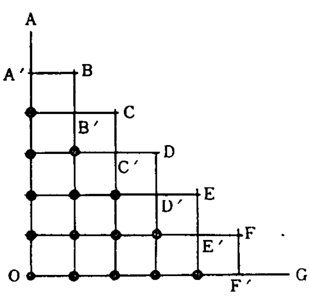
(6)　${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots\cdots = {}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \cdots\cdots = 2^{n-1}$

OからB‘D，Fのいずれかにいく方法は

O→A′→B，　O→B′→B，　O→C′→D
O→D′→D，　O→E′→F，　O→F′→F

である。従って，OからB，D，Fに行くには格子点を（6－1）回通ればよい。従って

$${}_6C_1 + {}_6C_3 + {}_6C_5 = 2^5$$



同様に　OからA，C，E，Gに行く方法は

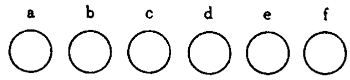
$${}_6C_0 + {}_6C_2 + {}_6C_4 + {}_6C_6 = 2^5$$

となる。一般に

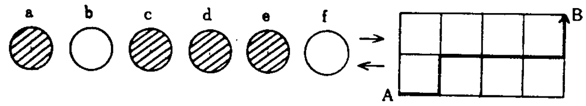
$${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots\cdots = {}_nC_1 + {}_nC_3 + \cdots\cdots = 2^{n-1}$$

(7)　$r{}_nC_r = n{}_{n-1}C_{r-1}$

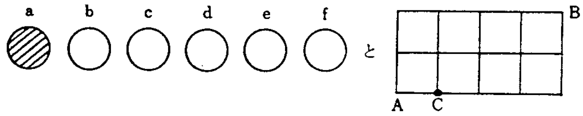
碁盤目の道の行き方と${}_nC_r$の考え方とが対応しているが，いま${}_6C_4$と${}_5C_3$との間の関係をしらべて見る。図のように a，b，c，d，e，f の場所を考えてみる。



この a，b，c，d，c，f の6つの場所の中から例えばa，c，d，eと4つの場所に斜線をいれると

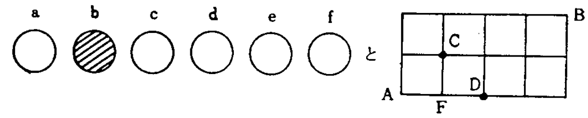


が対応している。(i) a b c d e f の中から，4個とるとり方の中でaを含むとり方



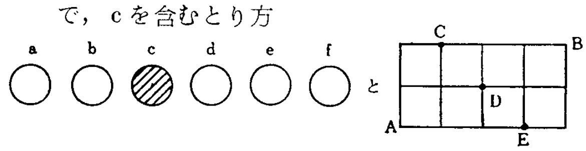
図で，C→Bのいき方と対応している。従って，その数は${}_5C_3$

(ii)　a，b，c，d，e，f の中で，bを含むとり方



図で，F→C→Bといくか，F→D→Bといくかに対応している。その数は，${}_4C_3 + {}_4C_2 = {}_5C_3$

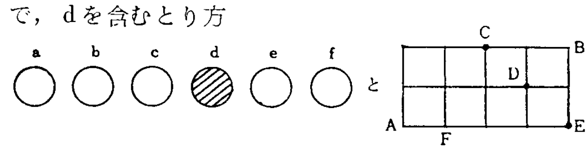
(iii)　a，b，c，d，e，f の中から4個とるとり方の中で，cを含むとり方



図で，行き方F→C→Bか，F→D→Bか，F→E→Bかに対応している。従ってその数は，

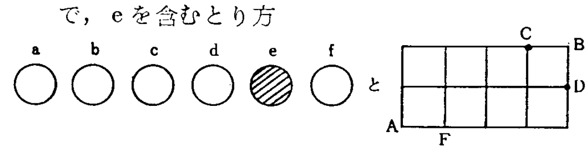
$${}_3C_1 + 2{}_3C_2 + {}_3C_3 = {}_5C_3$$

(iv)　a，b，c，d，e，f の中から4個とるとり方の中で，dを含むとり方



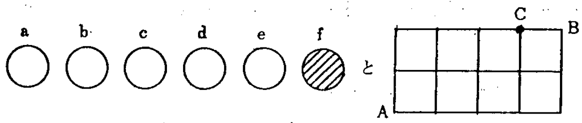
F→B（B→F）と対応し，その数は${}_5C_3$

(v)　a，b，c，d，e，f の中から4個とるとり方の中で，eを含むとり方



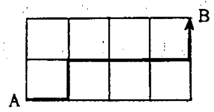
F→B（B→F）と対応している。その数は${}_5C_3$

(vi) a, b, c, d, e, fの 中から4個とるとり方の中で，fを含むとり方



図でA→Cと対応している。その数は，${}_5C_3$

この (i)(ii)(iii)(iv)(v)(vi) の中で，a, c, d, eのいき方は



図から (i)(ii)(iv)(v)の中に1つ入っている。他のa, b, c, d, e, f の中から，4個とるとり方も，(i)(ii)(iii)(iv)(v)(vi) の中にどれか4個入っている。

従って

$$4\,{}_6C_4 = 6\,{}_5C_3$$

となる。一般に

$$r\,{}_nC_r = n\,{}_{n-1}C_{r-1}$$

$${}_nC_r = \frac{n}{r}\,{}_{n-1}C_{r-1} = \frac{n}{r}\,\frac{n-1}{r-1}\,{}_{n-2}C_{r-2} =$$

この公式から

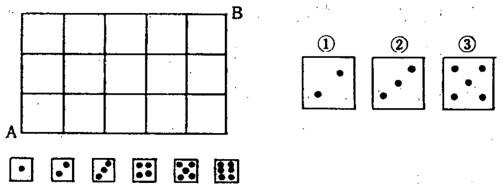
$${}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

がでる。これがn個の相異なるものからr個とる組合せの数である。

(8) ${}_nH_r = {}_{n+r1-}C_r$

3個のさいころをふるとき，出る目の組合せの数をつぎの方針で求めよ。

出た目を大きくない方から順に並べるとき，たとえば，下の図のようになったとする。このような目が出たとき，これを右の図のような太線で表わす。このようにすると，どんな目の出方にもAからBへの行き方



を対応させることができる。逆に，AからBへの行き方のおのおのには，一組の目の出方を対応させることができる。

これは1 2 3 4 5 6の6種類の数から重複を許して，3個とるとり方の数は${}_6H_3$であり， A→B の行き方${}_8C_5={}_8C_3$と同じである。${}_6H_3={}_8C_6$これを一般化すると

$${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$$

〔Ⅳ〕 むすび

以上で，碁盤目の道の行き方の例を通して，**クラス分け**の考え方をのべて見た。身近かな教材の中から，**クラス分け**を通して，事柄を単純化し，それによって法則性を見だし，全体としての数学の構造を発見していく方法を述べた。数学的な事象の発見ということのみでなく，もの事をすじ道を立てて，考える考え方にも，**クラス分け**は大切である。

(1)，(2)の条件をそなえた**クラス分け**は，問題の解決に非常に有効である。つねに，心していきたいものである。