Ⅱ　空間図形の教材の配列についての試案

高　須　照　夫

要　旨

今年度久しぶりに高校1年の空間図形の授業をして，今回もまた感じたことは，やり終ったあとをふりかえってみると，教科書に出てくる定理や問題を次々証明しながら歩いて来ただけという感じで，重点をどこにおいてやって来たのか自分自身ばくぜんとしており，もう一度全体を再構成してみようとしても，他の教材のようにはできないということだった。

その理由の一つは教材研究の不足，もう一つは教材配列の意図が不明確なことではないかと思われる。その点の解消と，今一つ昨年の紀要にも書いたように，数学の学習において，生徒は前もって今後進むべき方向と，その行先きにある主なる内容をある程度知っておいてから出発すべきである。という考えの主張のために次のようなことをやってみた。

(14) ページの『空間図形の授業に先だって』でとりあげたように，「平面における直線の平行と垂直に関する6つの定理（1～6）」から派生した「空間における直線と平面の平行と垂直に関する32個の命題」の真偽をしらべてみると20個の正しいものをみつけることができる。この20個の正しい命題を系統的に証明することを1つの目標とした空間図形の教材を組立ててみるとどうなるかということである。

平面内では次のことが成り立つ

1 〔直線 a〕外の点Oを通り〔a〕に平行な〔直線〕がただ1つある。

2 〔直線 a〕外の点Oを通り〔a〕に垂直な〔直線〕がただ1つある。

3 〔直線 a〕上の点Oを通り〔a〕に垂直な〔直線〕がただ1つある。

異なる3直線 a，b，c があって，

4 〔a〕//〔c〕，〔b〕//〔c〕ならば〔a〕//〔b〕

5 〔a〕//〔b〕，〔c〕⊥〔a〕ならば〔c〕⊥〔b〕

6 〔a〕⊥〔c〕，〔b〕⊥〔c〕ならば〔a〕//〔b〕

3次元の空間で，上のことおよび〔　〕の一部または全部の直線を平面におきかえた命題を考えると，次の32個ができる。すなわち，

a，b，c は異なる3直線，α，β，γ は異なる3平面とし，a，b，c は α，β，γ のいずれにも含まれないものとするとき

⑪　a 外の点Oを通り a に平行な直線がただ1つある

12　a 外の点Oを通り a に平行な平面がただ1つある

13　α 外の点Oを通り α に平行な直線がただ1つある

⑭　α 外の点Oを通り α に平行な平面がただ1つある

21　a 外の点Oを通り a に垂直な直線がただ1つある

㉒　a 外の点Oを通り a に垂直な平面がただ1つある

㉓　α 外の点Oを通り α に垂直な直線がただ1つある

24　α 外の点Oを通り α に垂直な平面がただ1つある

31．a 上の点Oを通り a に垂直な直線がただ1つある

㉜　a 上の点Oを通り a に垂直な平面がただ1つある

㉝　α 上の点Oを通り α に垂直な直線がただ1つある

34　α 上の点Oを通り α に垂直な平面がただ1つある

㊶　$a//c$，$b//c$　ならば　$a//b$

㊷　$\alpha//c$，$b//c$　ならば　$\alpha//b$

43　$\alpha//c$，$\beta//c$　ならば　$\alpha//\beta$

44　$a // \gamma$, $b // \gamma$　ならば　$a // b$

㊺　$\alpha // \gamma$, $b // \gamma$　ならば　$\alpha // b$

㊻　$\alpha // \gamma$, $\beta // \gamma$　ならば　$\alpha // \beta$

(51)　$a // b$, $c \perp a$　ならば　$c \perp b$

(52)　$a // b$, $\gamma \perp a$　ならば　$\gamma \perp b$

(53)　$\alpha // b$, $c \perp \alpha$　ならば　$c \perp b$

54　$\alpha // b$, $\gamma \perp \alpha$　ならば　$\gamma \perp b$

55　$a // \beta$, $c \perp a$　ならば　$c \perp \beta$

(56)　$a // \beta$, $\gamma \perp a$　ならば　$\gamma \perp \beta$

(57)　$c // \beta$, $c \perp c$　ならば　$c \perp \beta$

(58)　$c // \beta$, $\gamma \perp \alpha$　ならば　$\gamma \perp \beta$

61　$a \perp c$, $b \perp c$　ならば　$a // b$

(62)　$\alpha \perp c$, $b \perp c$　ならば　$\alpha // b$

(63)　$\alpha \perp c$, $\beta \perp c$　ならば　$\alpha // \beta$

(64)　$a \perp \gamma$, $b \perp \gamma$　ならば　$a // b$

(65)　$a \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$　ならば　$a // \beta$

66　$\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$　ならば　$\alpha // \beta$

以上のうち　○をつけた20個の命題が正しい。これらを全部証明するのには教材をどのように配列すればよいかを考え，以下のような形にまとまった。A，B，……a，b，……γ，β，……はそれぞれことわらなくても点，直線，平面を表わすものとし，必要な予備定理は（　）内に通し番号をつけて表わすことにした。

公理1　2点を通る直線はただ1つある。

公理2　平面上の2点を通る直線上のすべての点はその平面上にある。

公理3　直線a外の点を通りaに平行な直線は2つはない。

公理4　1直線とその上にない1点を通る平面は1つあって1つしかない。

公理5　2平面が1点Pを共有すればその2平面はPを通る1直線で交わる。

{直線の位置関係}

公理1により共有点の数は0か1である。

{1}
- 交わる　　　　　共有点1つ ｝（同一平面上）
- 平行（$a // b$）　｝共有点なし
- ねじれの位置

{直線と平面の位置関係}

公理2により共有点の数は0か1か無数である。

{2}
- 直線が平面にふくまれる　共有点無数
- 交わる　　　　　　　　共有点1つ
- 平行（$a // c$）　　　　　共有点なし

{2平面の位置関係}

公理5により共有点の数は0か無数である。

{3}
- 一直線で交わる　　共有点無数
- 平行　（$\alpha // \beta$）　共有点なし

{平面の決定}

公理4より次のものが1つの平面を決定することがわかる。

〈1〉1直線とその上にない1点

〈2〉1直線上にない3点

〈3〉交わる2直線

〈4〉平行2直線

⑪　直線a外の点Oを通りAに平行な直線がただ1つある。

〈証〉aとOが決定する平面（〈1〉による）上でOを通りaに平行な直線をひくことができる(1)。このような直線は1つよりない（公理3）

(1)　$\alpha // \beta$で，γがα，βとそれぞれa，bで交われば，$a // b$である。

∵）a bはともにγ上にあり共有点をもたないから{(1)}

(2)　$a // \alpha$で，aをふくむ平面βとαとの交線がbであれば$a // b$である。

∵）(1)と同じ

(3)　αとγがaでαとβがbで交わり，a，bが点Pで交われば，c，βはPを通る直線で交わる。

∵）α，βが点Pを共有するのだから公理5によりc，βはPを通る直線で交わる。

(4)　a，bはγ上の直線で，$a // b$，Pはγ外の点とする。aとP，bとPが決定する平面をそれぞれα，βとすると，αとβはPを通る直線cで交わり，$c // a$，$c // b$である。

∵) α，βがPを通るcで交わることは$\boxed{\text{公理5}}$による。α上のaとcが交わるとすれば(3)によりγとβの交線bもその交点を通ることになり$a//b$に反する。故に，$c//a$，同様に　$c//b$

㊶　$a//c$，$b//c$　**ならば**　$a//b$

〈証〉 $a//c$だからb上の点Pとa，cの決定する平面をα，γとし，α，γの交線をb'とすれば，(4)により$b'//a$，$b'//c$，これと$b//c$とからb'とbは一致するから$b//a$。

㊷　$\alpha//c$，$b//c$　**ならば**　$\alpha//b$　**またはbがαにふくまれる。**

〈証〉 {2}よりbとαが交わらないこと**を示せばよ**い。bとαが点Pで交わるとすると，bとcが決定する平面(〈4〉)をβとすれば，βとαはPを通る直線aで交わる。($\boxed{\text{公理5}}$。そして(2)により$c//a$，ところが$b//c$であったから$\boxed{\text{公理3}}$に反する。

㊺　$\alpha//\gamma$，$b//\gamma$　**ならば**　$\alpha//b$**またはbがαにふくまれる。**

〈証〉 bとαが交わらないことを示す({2})。bとαがPで交わるとする。bとγ上の1点Qが決定する平面(〈1〉)をβとし，βがα，γと交わる直線をそれぞれa，cとする($\boxed{\text{公理5}}$)すると(1)により

$a//c$　一方(2)により$b//c$　これは$\boxed{\text{公理3}}$に反する。

{2直線のなす角}

(5) 空間に2直線があるとき，任意の点を通り，これらに平行な2直線のなす角は一定である。

(証明は平行四辺形，三角形の合同を用いてできる)

〔**定義1**〕(5)でのべた一定の角を2直線のなす角という。

〔**定義2**〕2直線のなす角が直角のとき，2直線は垂直であるという($a\perp b$)　2直線が垂直でしかも交わるとき直交するという。

(51)　$a//b$，$c\perp a$　**ならば**　$c\perp b$

〈証〉 a，b上の点A，Bを通りcに平行な直線c_1 c_2をひくと㊶より，$c_1//c_2$，これと$a//b$より，c_1とaのなす角，c_2とbのなす角は等しくなり((5)) $c\perp b$。

{直線と平面の垂直}

〔**定義3**〕平面α上の任意の直線が直線aと垂直なとき，aとαは垂直であるという。

(6) b，cがOにおいて直交する2直線で，b，cが決定する平面をαとするとき，α上にOを通る任意の直線dをひくと，$a\perp d$である。

(a上にOについて対称な2点A，A′をとり三角形の合同を用いて証明できる)

(7) (6)におけるOを通りaに垂直な直線dはαの上にある。

∵) aとdが決定する平面δとαとの交線d'はOを通る。($\boxed{\text{公理5}}$)そして(6)により，$d'\perp a$，故にδ上でdとd'はOを通りaに垂直であるから一致する。(③)

(8) (6)におけるα上の任意の直線はaに垂直である。

∵) α上の任意の直線をℓとする。ℓがOを通れば(6)により，$a\perp\ell$，ℓがOを通らなければOを通りℓに平行な直線ℓ'をひけば，⑪の証明でみられるようにℓ'はℓとOが決定する平面α上にあるから(6)により$a\perp\ell'$，故に$a\perp\ell$(〔定義2〕)

(9) aがα上の交わる2直線と垂直ならば$a\perp\alpha$

∵) aとαの交点をOとする。(aとαが交わることの証明略)Oを通りα上の交わる2直線に平行な2直線をひけば，⑪によりそれらはα上にある。そしてそれらは(6)によりaに垂直故に(8)と〔定義3〕より$a\perp\alpha$。

㉜　**a上の点Oを通り，aに垂直な平面がただ1つある。**

〈証〉 (6)のようにαをつくれば，(8)により$a\perp\alpha$，次にOを通りaに垂直な平面をα'とすると，α'上の任意の点PとOを結べばOP$\perp a$，故に(7)によりOP，したがってPはα上にある。α'上の任意の点がα上にあるのだからα'はαと一致する。

㉒　**a外の点Oを通りaに垂直な平面がただつある。**

〈証〉 Oからaに下した垂線の足をO′とする。O′を通りaに垂直な平面αをつくれば(㉜) OO′$\perp\alpha$だから(7)によりOはα上にある。すなわちαはOを通りaに垂直な平面である。

次にOを通りaに垂直な平面をα'とし，α'とaとの交点をO″とすると，OO″$\perp a$，OO′$\perp a$故に②によりO′とO″は一致する。すなわちαとα'は一致する。(㉜)

(52)　$a//b$，$a\perp\gamma$　**ならばB**　$b\perp\gamma$

〈証〉 a，bが決定する平面(〈1〉)βはγとcで交わる。($\boxed{\text{公理5}}$)β上でaがcと交わるからbもcと交わる，(①)。すなわちbはγと交わる。$a\perp\gamma$であるから，aはγ上の交わる2直線P，qと垂直，(〔定義3〕)，したがってaに平行なbもP，qと垂直になり(〔定義2〕)，〔定義3〕によって　$b\perp\gamma$。

(53)　$b//c$，$c\perp\alpha$　**ならば**　$c\perp b$

〈証〉 cとαとの交点をP，bとPが決定する平面とαとの交線をaとすれば(2)により，$b//a$，そしてcはαに垂直だから$c\perp a$，故に〔定義2〕により$c\perp b$。

(10) (三垂線の定理) Aをα外の点，aをα上の直線，Aからaへの垂線の足をB，α上でBを通りaに垂直な直線をcとする。Aからcへの垂線をℓとする

と　$\ell \perp \alpha$　（上で〈1〉が2度使われている）

∵）$a \perp c$，$a \perp$ ABだから(9)により $a \perp$ 平面ABC故に(8)より $a \perp \ell$，また　$\ell \perp c$　故に　$\ell \perp \alpha$

㉓　α 外の点Oを通り α に垂直な直線がただ1つある

〈証〉 ⑽により存在する。またOから α への垂線が2つあるとすると，その垂線の足をA，Bとすれば，〈3〉よりOA，OBの決定する平面内でOからABへの垂線が2つあることになり $\boxed{2}$ に反する。

㉝　α 上の点Oを通り α に垂直な直線がただ1つある

〔証〕 α 外の点Aから α に下した垂線の足をA′とする。A′がOに一致すればよし，しなければOを通りAA′に平行な直線 a をひけば，(52)により $a \perp \alpha$，すなわちOを通り α に垂直な直線がある。

次にOを通り α に垂直な直線 a，a' があったとすると a，a' が決定する平面 β と α との交線を b とすれば β 内で b に垂直でOを通る2直線があることになり $\boxed{3}$ に反する。

(62)　$\alpha \perp c$，$b \perp c$　ならば　$\alpha // b$ または b が α にふくまれる。

〈証〉 {2}により b が α に交わらないことを示せばよい。b が α と共有点Pをもつとすれば，Pを通り c に平行な直線 c' をひけば(51)により $c' \perp$ b　そして(52)より　$c' \perp \alpha$，故に⑦により b は α にふくまれる。すなわち b と α は交わることはない。

(63)　$c \perp \alpha$，$c \perp \beta$ ならば　$\alpha // \beta$

〈証〉 Oと α，β との交点をA，Bとする。α，β が交わるとすれば，交線 ℓ 上の1点をPとすればPA，PBがともに c に直交することになり $\boxed{2}$ に反する。

(64)　$a \perp \gamma$，$b \perp \gamma$　ならば　$a // b$

〈証〉 a，b と γ との交点をA，Bとし，Bを通り a に平行な直線をb′とすると，(52)によりb′$\perp \gamma$，すると㉝により b とb′は一致する。故に　$a // b$。

(57)　$\alpha // \beta$，$c \perp \alpha$　ならば　$c \perp \beta$

〈証〉 β 上にあって c 上にない点Bと c が決定する平面（〈1〉）を γ，γ と β はBを共有するからBを通る直線 b で交わる（$\boxed{\text{公理5}}$）。$c \perp \alpha$ だから c は α と1点Aで交わり，γ は α とAを通る直線 a で交わる（$\boxed{\text{公理5}}$）。$\alpha // \beta$ だから(1)により $a // b$，故に γ 内で $c \perp a$ である。〔定義3〕から　$c \perp b$（$\boxed{5}$），Bしたがって b は任意にとれるから(6)，(8)より $c \perp \beta$

⑭　α 外の点Oを通り α に平行な平面がただ1つある

〈証〉 Oから α に垂線 ℓ をひき，Oを通り ℓ に垂直な平面 α' をつくる（㉜），すると(63)により $\alpha' // \alpha$。またOを通り α に平行な平面は(57)により ℓ に垂直，そしてそのような平面は㉜により1つしかない。

㊻　$\alpha // \gamma$，$\beta // \gamma$　ならば　$\alpha // \beta$

〈証〉 α と β が交われば，交線上の1点を通り γ に平行な2平面 α，β があることになり，⑭に反する。（{3}）

{2平面のなす角}

〔定義4〕 2平面 α，β の交線を ℓ，ℓ 上の1点Oを通り α，β にふくまれて ℓ に垂直な2つの直線 a，b のなす角（Oのとり方に関せず一定）を α，β のなす角という。

〔定義5〕 2平面 α，β のなす角が90°のとき α と β は垂直であるという。（$\alpha \perp \beta$）

⑾　α に垂直な直線 a をふくむ平面 β は α に垂直である。

∵）α，β の交線を ℓ，ℓ と a との交点を通り α 上で ℓ に垂直な直線を b とすれば，$a \perp \alpha$ だから〔定義3〕により a は ℓ にもbにも垂直，故に〔定義5〕にしたがって $\alpha \perp \beta$。

⑿　$\alpha \perp \beta$ のとき，α と β の交線を ℓ とする。α 上にあって ℓ に垂直な直線を a とすると $a \perp \beta$

∴）β 上で a と ℓ の交点を通って ℓ に垂直な直線 b をひくと，$a \perp b$〔定義5〕　また $a \perp \ell$

故に(9)により　$a \perp \beta$

⒀　$\alpha \perp \beta$ のとき α 上の点Aから β にひいた垂線は α にふくまれる。

∴）α，β の交線を ℓ とする。Aから ℓ への垂線は⑿により β に垂直，このような直線は。㉓によりただ1つしかない。

(58)　$\alpha // \beta$，$\gamma \perp \alpha$　ならば　$\gamma \perp \beta$

〈証〉 ⑭により γ は β に交わる。γ と α，β との交線を a，b とすれば，(1)により $a //$ p。γ 上で a に垂直な直線を c とすれば，⑿により $c \perp \alpha$。すると(57)により $c \perp \beta$　故に⑾により $\gamma \perp \beta$

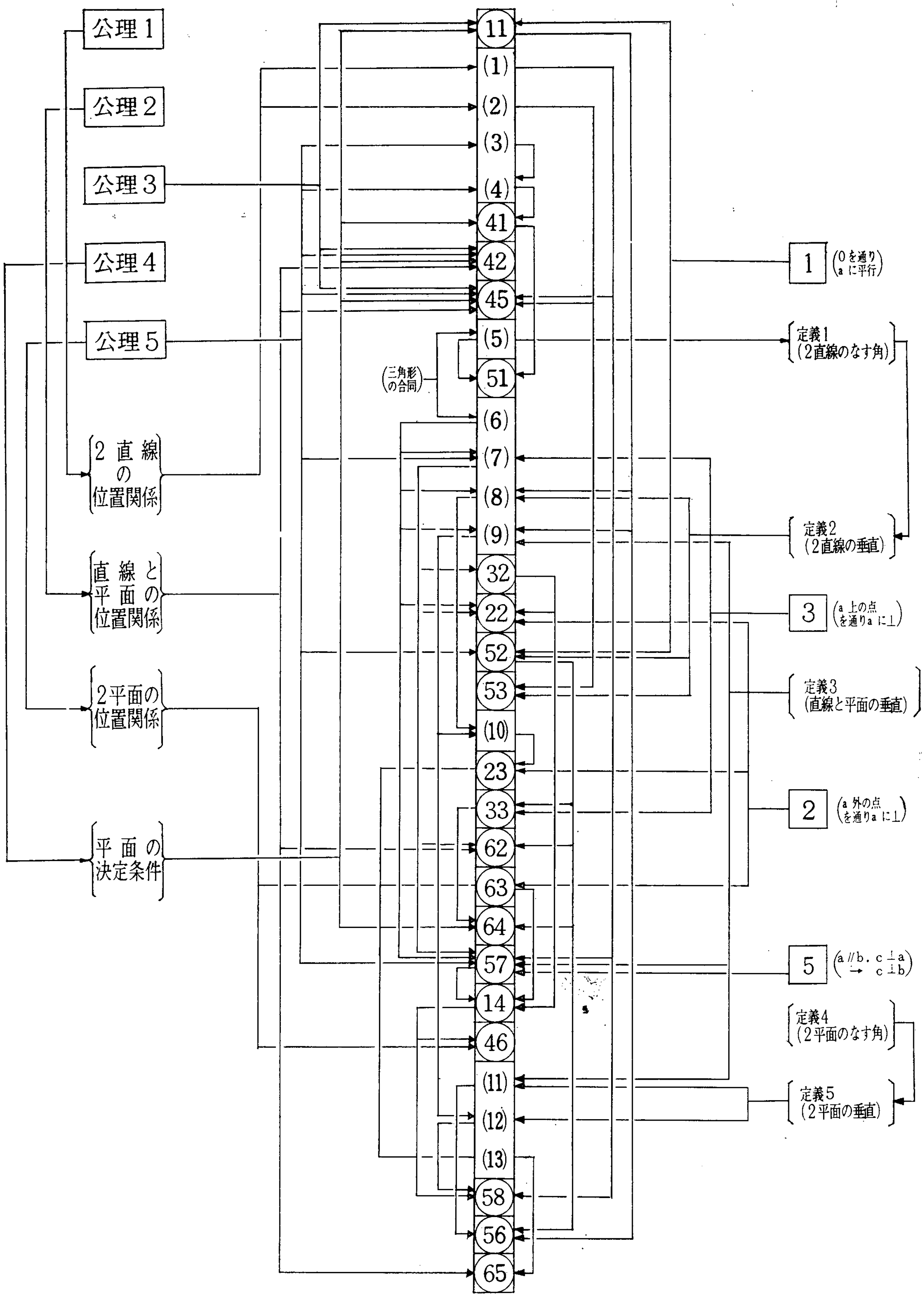
(56)　$a // \beta$，$a \perp \gamma$ ならば　$\gamma \perp \beta$

〈証〉 β 上に a と平行な直線 a' をひくことができる。（⑪）すると(52)により $a' \perp \gamma$，すると⑾により $\beta \perp \gamma$。

(65)　$a \perp \gamma$，$\beta \perp \gamma$　ならば　$a // \beta$ または a が β にふくまれる。

〈証〉 a と β が交わらないことを示せばよい（{2}）a と β が共有点をもてば⒀により a は β にふくまれてしまう。すなわち a と β は交わることはない。

以上で20個の正しい命題の証明ができた。そのために教科書にのっている主な内容は大体もりこまれたようである。もっと整理できそうではあるが，次頁に全体の系統図を示してみた。



公理1
公理2
公理3
公理4
公理5
2直線の位置関係
直線と平面の位置関係
2平面の位置関係
平面の決定条件
(三角形の合同)
11
(1)
(2)
(3)
(4)
41
42
45
(5)
51
(6)
(7)
(8)
(9)
32
22
52
53
(10)
23
33
62
63
64
57
14
46
(11)
(12)
(13)
58
56
65
1 (0を通り a に平行)
定義1 (2直線のなす角)
定義2 (2直線の垂直)
3 (a 上の点を通りa に⊥)
定義3 (直線と平面の垂直)
2 (a 外の点を通りa に⊥)
5 (a//b. c⊥a → c⊥b)
定義4 (2平面のなす角)
定義5 (2平面の垂直)