原稿公開 2017 年 3 月 28 日
軽微な修正 2017 年 4 月 4 日

物理学者のための圏論入門

Introduction to Category Theory for Physicists

谷村 省吾
名古屋大学大学院情報科学研究科[1]

1 はじめに

この講演で私は，圏論（けんろん）にまったく馴染みのない方に圏論の基本的な考え方と基本的な語彙（ごい）をお伝えしたいと思います[2]．タイトルに「物理学者のための」と冠しましたが，本講演が直接的に物理学のためになるかどうかはわかりません．圏論に馴染みがないだろうと思われる方の代表として物理学者を引き合いに出しただけだとも言えます．

圏論は，おそらく集合論よりも，物理学者のものの見方・考え方にフィットするのではないか，物理学者が暗黙のうちに使っている物理観・方法論みたいなものを圏論は明示的に言語化する能力を持っているのではないかと私は考えています．もっと言うと，何も物理学に話を限定する必要はなく，科学全般に共通するものの見方を圏論は提供できるのではないかと思います．

実際の講演では，圏論の考え方と，圏・関手・自然変換・普遍射の定義と例を駆け足で説明しました．それではもの足りない・頼りないので，一通りの文章を書き残しておきたいと思い，このノートを書きます．このノートを読む人に，圏論を勉強したい・圏論を使ってみたいと思っていただけるような内容をお伝えしたいと思います．また，圏論を勉強するのに適当な文献を多少紹介したいと思います．講演で用いた手書きのノートもいちおう添えておきます．手書きノートの内容のすべてがこの清書ノートに書かれているわけではありません．

2 三種の矢

正確な定義を述べるのは後回しにして，圏論のキーワードをざっと説明しましょう．圏論の道具を一言で言い表すと，「**圏論は 3 種の矢からなる**」と言えると思います．3 種の矢は「$\to$」,「$\rightsquigarrow$」,「$\dot\to$」と書かれます．

1 つ目は，**射**（しゃ）(arrow, morphism) と呼ばれる矢「$\to$」です．射は対象から対象への矢印であり，$f : a \to b$ あるいは $a \xrightarrow{f} b$ のように書かれます．ここに現れた a や b は**対象** (object) と呼ばれます．$f : a \to b$ としては,「集合 a から集合 b への写像 f」みたいなものをイメージしてもらってもよいのですが，圏論においては a, b は必ずしも集合である必要はないし，f は写像とは限りません．

[1]2017 年 4 月以降，情報学研究科に改組改称．
[2]2017 年 2 月 11, 12 日に名古屋大学で開催された研究会「量子と古典の物理と幾何」で 2 月 12 日に講演．

対象 a から b への射は一つとは限りません．$a \xrightarrow{f_1} b$, $a \xrightarrow{f_2} b$, $a \xrightarrow{f_3} b$, $\cdots$, といった調子で，射がたくさんあるかもしれません．射自体にアイデンティティがあり，$a \xrightarrow{f_1} b$ と $a \xrightarrow{f_2} b$ は同じ射だとか，異なる射だとか言うことができます．

また，対象 a と c を任意に選んだとき，a から c への射があるとは限りません．a から b への射があっても，b から a への射はないかもしれません．また，$a \xrightarrow{f_1} a$, $a \xrightarrow{f_2} a$ のように a から a 自体への射が複数個あるかもしれません．

ともかく，たくさんの（一つでもよいのですが）対象同士をつなげる矢印のネットワークが，後ほど説明する条件を満たしていれば，そのネットワークを**圏** (category) と呼ぶのです．**対象たちが無関係にばらばらにあるのではなく，射の有機的なネットワークでつながっている**，というのが圏の大事な性質です．ひとまとまりの圏は $\mathscr{C}$ のような花文字で記すことにします．圏は一つとは限らず，$\mathscr{C}, \mathscr{D}, \cdots$ と，複数の圏を無理なく考えることができます．そうすると，圏と圏の関係はどうなっているのか知りたくなるのが人情です．

2 つ目の矢は，**関手**（かんしゅ）(functor) と呼ばれる矢「$\rightsquigarrow$」です．射は対象から対象への矢でしたが，関手は圏から圏への矢です．圏 $\mathscr{C}$ から圏 $\mathscr{D}$ への関手を $F : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ と書き表します．なお，関手を表すのに「$\rightsquigarrow$」のような波線状の矢印を書くのは，私の趣味です．関手も普通の矢印であっさりと「$F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$」と書いている本が多いです．あと，関手には，共変（きょうへん）関手と反変（はんぺん）関手という 2 種類があります．また，$\mathscr{C}$ と $\mathscr{D}$ は必ず異なる圏である必要はなく，$F : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{C}$ のように同一の圏を結ぶ関手もあり得ます．

3 つ目の矢は，**自然変換** (natural transformation) と呼ばれる矢「$\dot{\to}$」です．自然変換は関手から関手への矢です．もう少し詳しく言うと，圏 $\mathscr{C}$ から圏 $\mathscr{D}$ への 2 つの共変関手 $F, \tilde{F}$（$F : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ と $\tilde{F} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ が関手）があったとき，F から $\tilde{F}$ への自然変換 $T : F \dot{\to} \tilde{F}$ が述べられます．数学の用語に「自然」という言葉が入っているのは不思議な感じがするかもしれませんが，ちゃんと定義を読んで，具体例を知ると，自然変換は，たしかに人為的ではない，小細工のない，自然な感じがします．

以上のように，対象から対象への射 $f : a \to b$ があって圏をなし，圏から圏への関手 $F : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ があり，関手から関手への自然変換 $T : F \dot{\to} \tilde{F}$ がある，というぐあいに 3 段階の階層があります．これら 3 種の矢を使いこなしつつ圏論の話は進んでいきます．

なぜ 3 種なのか？ 3 種の矢で何でもできるという保証があるのか？と問われたこともありますが，明確な答えを私は持っていません．あえて答えるなら，経験上，3 種の矢でたいていの用に足りることがわかっている，としか言いようがないと思います．マックレーンという数学者は圏論の創始者の一人ですが，聞くところによると，マックレーンはもともと自然変換という概念を定義しようと考えたようで，自然変換を定めるために関手という概念が必要になり，関手を規定するために射・対象という概念を定めたそうです．

関手 $F : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ は圏から圏への矢ですので，視点を一段上げて,「圏を対象とみなし，関手を射とみなす」ことも可能です．さらに，自然変換 $T : F \dot{\to} \tilde{F}$ があるのだったら,「関手を対象とみなし，自然変換を射とみなす」ことも可能です．3 種類くらい矢の概念を用意しておくと，こういった視点の上げ下げを混乱なく記述できるのです．矢の種類が 1 種類しかないと,「矢から矢への矢」を述べようとすると混乱します．それよりは,「関手から関手へ

の自然変換」というふうに言葉を使い分けると紛れがないでしょう．かといって，4 種類も 5 種類も階層ごとに異なる種類の矢を用意すると人間の方がついていけなくなります．3 種類くらいがいい加減なのでしょう．

3　普遍性

三種の矢（射・関手・自然変換）が圏論の基本概念でした．関手と自然変換は，圏と圏の間の関係，すなわち，圏の外向きの関係を表すものです．圏と圏の間を **inter-category（圏間）**, 圏の内部を **intra-category（圏内）**と呼ぶならば，関手と自然変換は inter-category についての話でした．

では，圏の内部については何も語るべきことはないのかというと，そんなことはなく，一つの圏の中には，いろいろな対象を結ぶ射があり，射が織り成すネットワークに豊富な構造を見い出すことができます．詳しくは説明しませんが，圏の内部の特徴ある構造を言い表す言葉として，始対象・終対象・積・余積・引き戻し・押し出し・極限・余極限といった諸概念があります．しかも，これらすべては**普遍性** (universality) というキーワードで統括されます．普遍性という概念は一つの圏の中で特別な役割を担う対象や射を浮き上がらせます．特別なのですが，普遍という言葉が使われます．圏論での「普遍性」という言葉のニュアンスはちょっとわかりにくいかもしれません．

数学用語としてではなく，日常語としての「普遍性」は,「あまねく，どこにでもある，どのような事柄に対してでも通用する」という意味で使われると思います.「普遍」の対義語は「偏狭」とか「特殊」でしょうか.

圏論用語としての普遍性は,「**すべての事態に通用し，しかもその通用のしかたが一通りしかない**」というような性質を指します．ちょっと説明しにくいのですが，例えば，ある集団の中で，何か試合を，例えば柔道をするとして，お互いにいろいろな技を掛けるのですが，ある人は，どの人に対しても必勝技を持っている，必勝技は相手によって異なるかもしれないけども，とにかくこの人は各相手に対して唯一の必勝技を持っている，という状況があれば，この必勝者が普遍性を持っていることになります．

ある圏の一部分あるいは全体の，すべての各対象に対して唯一のやり方で働き掛ける対象や射があれば，それは普遍性を持つと言われるのです．ある意味，その圏の部分あるいは全体を，十把一絡（じっぱひとから）げに束ねるというか，すべての対象の面倒を見るような働きを普遍性と言うのです．圏の内部構造から，普遍性を担う対象や射が決まるのです．

以上，圏論の基本語彙として，対象・射・圏・関手・自然変換・普遍性の概要を説明しました．正確な定義は後ほど述べます．

4　圏論の考え方

群論や線形代数が数学の各分野であるように，圏論も数学の一分野です．純粋な圏論は，定義と定理と証明の体系であって，基本的なスタイルは他の数学理論と変わりありません．違いがあるとすれば，圏論の主張はすべて矢印の図式で述べられる，圏論における証明や

計算は矢印の図式をなぞっていけば実行できるといった「矢印図式主義」が圏論の特徴だと言えるでしょう．とくに圏論が他の数学分野よりも偉いとか格好いいとか言うことはありません．

しかし，圏論は，何と言ったらよいか，思想とか世界観のようなものと結び付けられることがしばしばあります．私自身は，圏論の背景思想が気に入って圏論に興味を持ちました．では，圏論にどういう思想・思い入れがあるのでしょうか．

圏論の特徴は，圏論の対極を考えることによって照らし出されます．**圏論の対極には集合論があります．**素朴な集合の概念は,「元があり，元が集まって集合をなす」ことに基礎をおいています．例えば，自然数全体の集合 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$ とか平面上の三角形の集合とかを考えることは，難しくありません．集合はいろいろな元の集まりである，という意味で，集合には内部があります．**集合論では集合の次に写像を考えます．**写像 $f : X \to Y$ とは，集合 X の各元 x に対して集合 Y の一つの元 $y = f(x)$ を対応させることです．しつこく言いますが，写像 $f : X \to Y$ は，集合 X の内部にある元を集合 Y の内部にある元と対応させます.「元が集まった集合」なしには写像という概念は成り立ちません．

それに対して，**圏論ではいきなり射 $f : a \to b$ というものを考えます．**a や b は集合のように内部を持っているかどうかすらわかりません．**いまのところ a, b の内部には立ち入らず，さしあたって対象と呼んでいるだけです．圏論では，元や集合の存在に先立って，射の存在を認めるのです．**どうしても集合がほしかったら，$a \xrightarrow{f_1} b$, $a \xrightarrow{f_2} b$, $a \xrightarrow{f_3} b$, $\cdots$, のように射をたくさん集めて集合を作ることすらします．

圏論における矢は必ずしも写像ではないという教訓の例としては，射よりも関手の方を挙げた方がよいかもしれません．関手 F は，対象 a に対象 Fa を対応させるのですが，たとえ a と Fa が集合だったとしても，F は集合 a から集合 Fa への写像 $a \to Fa$ ではないのです．写像では表せない概念を関手は簡潔に表現できるのです．世の中に現れる関係・対応は写像ばかりとは限らず，関手という概念の方が適切である場合があるとも言えます．

また，対象 a の性質を圏論的に知りたかったら，a に向かう射 $b_i \xrightarrow{g_i} a$ や，a から出る射 $a \xrightarrow{h_i} c_i$ をいろいろ集めて，これらの射の連動関係・絡み具合を調べることによって対象 a の特徴を探ろうとします．いわば，a という対象にいろいろな刺激を外から与えて，そこから出て来る応答を見ることによって，a という対象を知ろうとしているのです．

$$\begin{tikzcd}
b_1 \arrow[dr, "g_1"] & & c_1 \\
b_2 \arrow[r, "g_2"] & a \arrow[ur, "h_1"] \arrow[r, "h_2"] \arrow[dr, "h_3"] & c_2 \\
b_3 \arrow[ur, "g_3"] & & c_3
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

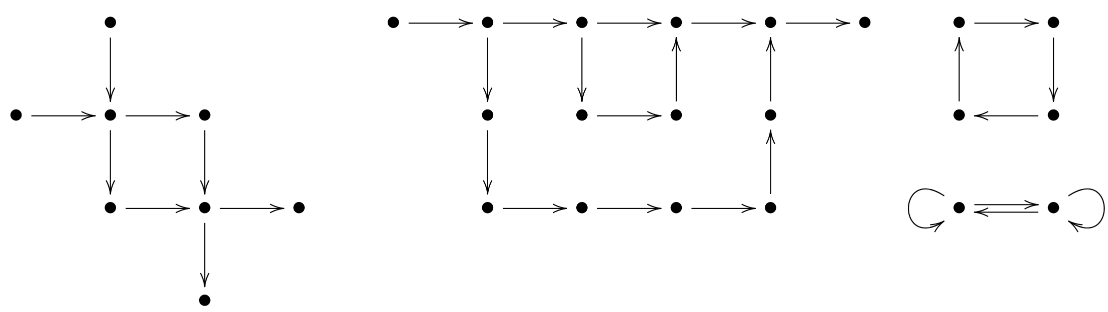
物理学や化学では，未知の物質に光や音や熱や他の粒子をぶつけるなどの刺激を与えて，そこから出て来る光や破片などを見て，その物質の性質や正体をつきとめようとします．このような方法は，物理と化学に限った話ではなく，生物学や心理学でも似たような方法が使われるでしょう．ある人の性格を知りたいと思ったら，平穏時の人を見ているよりも，頼み

ごとをされたときの反応を見るとか，不愉快なことを言われたときの反応を見るとか，さまざまな外部刺激に対する応答を見た方が「その人らしさ」がよくわかるでしょう．

標語的に言うと,「**集合論は集合が先で写像が後，圏論は射が先で集合が後**」なのです．圏論では，射のネットワークを通して，特定の射や特定の対象の性質を浮かび上がらせるのです．射のネットワークから孤立した対象の性質は圏論ではわかりません．でも考えてみれば，他者から隔絶された一個の個体の性質というものは，そもそも論ずることに意味がないでしょう．圏論は，個と個の関係性を重視する，重視するというか，**関係性があって初めて個性が定まる**という考え方をするのです．

また，**集合論における集合や写像の概念は静的な概念です．** 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ や実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は，はじめからデンとそこにあるものとして扱われます．写像 $f: X \to Y$ の概念も，直積集合 $X \times Y$ の部分集合（グラフ）として規定され，全貌が定まっているものとして扱われます．集合論における写像は「一方の集合の元に他方の集合の元を常時対応させる」という静的なイメージを与えられているとも言えます．それはそれで便利なものの見方なのですが，時間発展的・動的なイメージが欠落しています．

それに対して，**圏論の矢はダイナミックな概念です．** 射は $a_1 \xrightarrow{f_1} a_2 \xrightarrow{f_2} a_3 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} a_n$ のように連鎖になることもあるし，ループになることもあります．圏の射は合流することもあれば枝分かれすることもあります．行き止まりになる対象があるかもしれないし，湧き出し口になる対象があるかもしれません．一方通行の射しかないかもしれないし，逆行する射があるかもしれません．圏の射は，複雑で多様なネットワークを織りなすことができます．



(4.2)

集合と写像を使ってこのような図式を描くことがまったくできないわけではないのですが，対象は集合でなくてもかまわないという融通無碍（ゆうずうむげ）さが圏論のよさになっています．

また，$a \xrightarrow{f} b$ という射は「a から b への変化」とも考えられるし,「a から b への通信・連絡」とも考えられるし,「a から b へのプレゼント」かもしれないし,「a は b の祖先である」という親族関係かもしれないし,「a は b に食べられる」という被食捕食関係かもしれないし,「a は b よりも小さい」という大小関係かもしれないし,「a は b である」という文かもしれないし,「a ならば b である」という論理関係かもしれません．**圏論においては，射の正体・解釈は固定されていないのです．圏のネットワークのありようが射に意味を与えるのです．** それに対して，集合論の写像は一定の定義があり，多義的な解釈をする余地がありません．

圏論の射は集合論の写像よりはるかに融通の利く概念です．**対象と射の意味づけ・解釈が，他者との関係性・文脈・コミュニケーション・ネットワークを通して行われる**というあたりが，**複雑な世界を記述する豊かな表現力が圏論に備わっている**と考えられる理由です．

5　圏論のご利益

圏論が役に立つことがあるのか？と問われると，なかなか答えに窮しますが，数学の中で役に立つことと，数学外の分野で役に立つこととを分けて考えるのがよいと思います．

圏論が数学の中で役に立つ側面としては，さまざまな数学分野に繰り返し現れるパターンを横断的に特徴付けるという圏論の役割があります．例えば，群には部分群・正規部分群・商群，環には部分環・イデアル・商環，ベクトル空間には部分空間・商空間といった，よく似た構造があり，群論・環論・線形代数のどの理論でも準同型定理と呼ばれるそっくりの定理が成り立ちます．準同型定理はどの理論でもほぼ同様のルーチンワークで証明できます．また，いま挙げたどの理論にも直積と呼ばれる構造があって，直積の一意性は同様のルーチンワークで証明できます．**圏論は，こういったさまざまな理論に見られる相似構造を抽出して，まとめて面倒を見ることができます．**

また，圏論を使うと，異なる数学理論の間の関係を一段高い視点から見ることができます．例えば，位相空間論と群論は別の理論ですが，ホモトピーは位相空間の圏から群の圏への関手だと言えます．位相空間の一つ一つの点が群の一つ一つの元と対応しているわけではないので，ホモトピーは位相空間から群への写像ではありません．けれども，ホモトピーは関手だという視点に立つと，位相空間の世界と群の世界とが連動していることがよくわかるのです．**元のレベルで one-to-one 対応はしていないけれども，元を束ねた空間とか群のレベルで many-to-many 対応している様子を関手はうまく捉えるのです．**「木を見て森を見ず」という言葉がありますが，圏論は，まさにその逆の「木を気にせず森を見る」ような視点を提供してくれるのです．

ホモロジーは位相空間の圏から加群の圏への関手だと言えます．位相空間の境界という概念を関手を通して加群の方に写すと，ホモロジー代数という構造が見えてきますが，これは加群だけを見ていたのでは見抜けないような構造だと言えます．**ホモロジー関手も，点レベルにまで分解された one-to-one 対応では見抜けない，structure-to-structure 対応とでもいうべき関係を見させてくれるのです．**

また，二つの一見異なる数学分野の概念が互いに変換可能であることを主張する**双対性** (duality) という高次の概念がしばしば見い出されますが，そのような概念は圏論の**随伴** (adjunction) という概念を使うと適切に捉えられます．

このように，数ある数学理論の共通構造を横断的に見い出したり，異なる数学理論の連動する性質を的確に言い表したりするのに圏論は役に立ちます．そういった意味で，圏論は大風呂敷を広げるようなところがあります．それが圏論の魅力でもあるし，何にでも通用するような当たり前のことばかり言って何も固有の主張がないように見えて，「圏論は general nonsense だ」,「abstract nonsense だ」と揶揄（やゆ）されるところでもあります．たしかに，圏論だけを勉強することは論理的には可能ですが，いろいろな数学分野を知っていないと圏論のありがたみがわからないし，圏論以外の数学を知らないと面白い圏や関手の例を作ることすらできないと言えます．

圏論自体の固有の定義・定理もあることはあります．**米田（よねだ）の補題**と呼ばれる定理は，圏論の中で最も有名な命題だと言えます．ただ，やはり圏論は general すぎて，微分積分学や線

形代数のような具体性の強い数学理論と比べると，圏論独自の定理は少ないと言えば少ないでしょう．その意味では，圏論自体を研究対象とする人は少ないと思います．圏にもう少し肉付けをしたカルテシアン閉圏やトポスやホップ代数などの方が研究の対象になると思います．

数理論理学の一分野である**トポス** (topos) は圏論の発展版のような理論です．おおざっぱに言えば，圏のモノ射 $f : a \to b$ を「a ならば b である」という論理関係であるかのように解釈できる体系がトポスです．そのためにトポスにおいては真理値の概念を拡張します．古典論理においては，真理値は,「真か偽」,「Yes か No」,「1 か 0」の 2 択しかありませんが,トポスでは真理値概念をかなり柔軟に拡張し，Yes か No の 2 択ではなく，ある種のグレーゾーンを設けます．圏論の言葉を使うと，こういった拡張を系統的に行えるのです．古典論理の拡張版として量子論理がありますが，真理値概念を拡張することによって量子力学を適切に記述しようという試みがあり，量子トポスあるいはトポス量子論という理論が提案されています．トポス量子論こそ量子重力理論を語る言葉になり得ると考えている人もいます．

群の表現論も圏の概念を使うと大幅に整理できます．一つの群は一つの圏，群の表現は群の圏から線形空間の圏への関手，表現から表現への繋絡(けいらく)作用素 (intertwiner) は自然変換になっています．

数学以外の分野で圏論が役に立つことはあるでしょうか？　これは，ぼちぼち役に立ちつつあると言えるでしょう．プログラミング言語・代数的場の量子論・位相的場の理論・複雑ネットワークの理論などで役に立っているようです．物理系の変化と言えば，熱力学は「90 ℃の水と 10 ℃の水を混ぜたら 50 ℃の水になる」というような状態変化のパターンを扱うので，熱力学系の記述に圏論は使えるかもしれません．

「せっかく新しい数学理論を勉強したので何かに使いたい」と考えることは邪道だと思う人はいるでしょう．たしかに,「目的なしに手段を得て，使い道を後から考える」というアプローチで研究するのはあまりよい結果に行き着かない気もします．しかし，圏論で視野を広げたおかげで目に入ってくる光景もたしかにあると思います．私自身は，数学に出て来る諸概念を整理するだけでも圏論のありがたみを感じていますし，圏やトポスの概念を用いて量子論を再定式化しようという試みが近年盛んで，この方面も理解したいと思っています．

6　圏の定義

以上で長い前置きは終わりにして，ここからは圏の数学的定義を解説します．圏は並外れて特別なものではなく，群や位相空間の定義があるように圏の定義があります．また，群の公理を満たす具体的な群がたくさんあるように，圏の公理を満たす具体的な圏がたくさんあります．圏の公理（定義）は，そのような一般的な定義になっています．

圏(けん)(category) とは，**対象** (object) と**射**(しゃ)(arrow, morphism) の集まりで，以下の条件を満たすものです：

(1) おのおのの射には**始域** (domain) と呼ばれる対象と**終域** (codomain) と呼ばれる対象が定まっています．始域が a で終域が b である射 f を $f : a \to b$ あるいは $a \xrightarrow{f} b$ と書きます．ただし，a から b への射は一つとは限りません．また，射の始域と終域が同じ対象でもかまい

ません.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] & b \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} c \arrow[loop left, "g_1"] \arrow[loop right, "g_2"] \end{tikzcd} \tag{6.1}$$

(2) 射 $a \xrightarrow{f} b$ と $b \xrightarrow{g} c$ のように f の終域と g の始域が一致しているとき f, g は**合成可能** (composable) であると言います．このとき，f, g の**合成射** (composite) $a \xrightarrow{g \circ f} c$ が一意的に定まります．合成可能な射の連鎖が $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ という形になることから，合成射は fg と書く方が素直だと思われますが，集合論の合成写像の書き方にならって，$g \circ f$ あるいはたんに gf と書くことにします.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & b \arrow[d, "g"] \\ & c \end{tikzcd} \tag{6.2}$$

(3) 3 連の合成可能な射 $a \xrightarrow{f} b$，$b \xrightarrow{g} c$，$c \xrightarrow{h} d$ があると，**結合律** (associativity) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ が成り立ちます.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] \arrow[drr, dotted] & b \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h \circ g"] & \\ & c \arrow[r, "h"'] & d \end{tikzcd} \tag{6.3}$$

(4) 各対象 b ごとに**恒等射** (identity arrow) $b \xrightarrow{1_b} b$ と呼ばれる射があり，任意の射 $a \xrightarrow{f} b$ と $b \xrightarrow{g} c$ に対して $1_b \circ f = f$ と $g \circ 1_b = g$ が成り立ちます.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & b \arrow[d, "1_b"] \\ & b \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} b \arrow[d, "1_b"] \arrow[dr, "g"] & \\ b \arrow[r, "g"'] & c \end{tikzcd} \tag{6.4}$$

圏を $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ のような文字で表します．圏 $\mathscr{C}$ の対象全体の集まりを $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ と書きます．圏 $\mathscr{C}$ における a を始域，b を終域とする射全体の集まりを $\mathscr{C}(a, b)$ あるいは $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(a, b)$ と書き，（これが集合になっていれば）a から b への**ホム集合** (hom-set) と呼びます.

圏の一部の対象と射の集まりを**図式** (diagram) と言います．図式の中の有限個の射を順序づけた組 $(f_1, \cdots, f_n)$ において，f_i, f_{i+1} $(i = 1, \cdots, n-1)$ が順に合成可能ならば，$(f_1, \cdots, f_n)$ を**長さ n の道** (path) と言います．このとき，道順に沿った合成射 $f_n \circ \cdots \circ f_1$ が定まります．2 つの道 $(f_1, \cdots, f_n), (g_1, \cdots, g_m)$ について，f_1 と g_1 の始域が一致し，f_n と g_m の終域が一致していたからといって，一般には，合成射 $f_n \circ \cdots \circ f_1$ と $g_m \circ \cdots \circ g_1$ とが同じ射になるとは限りません．もしも，図式内の任意の 2 つの道 $(f_1, \cdots, f_n), (g_1, \cdots, g_m)$（$n \geq 2$ または $m \geq 2$ とする）の，f_1 と g_1 の始域が一致し f_n と g_m の終域が一致すると $f_n \circ \cdots \circ f_1 = g_m \circ \cdots \circ g_1$ となるならば，この図式は**可換** (commutative) であると言います．例えば，いままでに登場した (6.2), (6.3), (6.4) は可換図式になっています．下の図式が可換図式だとしたら，どの

合成射とどの（合成）射が等しいか，考えてみてください：

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d, shift right, "f_1"'] \arrow[d, shift left, "g_1"] & \\
\bullet \arrow[loop left, "f_2"] \arrow[r, shift left, "g_2"] \arrow[r, shift right, "f_3"'] & \bullet
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[d, "f_1"] \arrow[dr] & \\
\bullet & \bullet \arrow[l, "f_2"] \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f_1"] \arrow[d] & \bullet \arrow[r, "f_2"] \arrow[d] & \bullet \arrow[d, "f_3"] \arrow[dl] & \bullet \arrow[l] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r, "f_4"] & \bullet \arrow[u]
\end{tikzcd}
\tag{6.5}
$$

上の図式では，対象に関心がなかったので，対象を黒玉 $\bullet$ で表しました．可換図式に丸い矢印を書き込む流儀もあります：

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_3"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & a_2 \arrow[d, "f_2"] \\
a_3 \arrow[r, "f_4"'] & a_4
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g_1"] \arrow[dr, "g_3"'] & \bullet \arrow[d, "g_2"] \\
& \bullet
\end{tikzcd}
\tag{6.6}
$$

(6.6) の左側の図式が可換図式であるとは，$f_2 \circ f_1 = f_4 \circ f_3$ が成り立つことです．右の図式が可換図式であるとは，$g_2 \circ g_1 = g_3$ のことです．実際のところ，圏論で有用な図式はほとんどすべて可換図式であり，いちいち丸い矢印を書くのは煩わしくなります．可換図式に丸矢印を書かないのが私の流儀です．もしも

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "h_2"'] & a \arrow[d, "h_2"] \\
a \arrow[r, "h_1"'] & a
\end{tikzcd}
\tag{6.7}
$$

が可換図式であれば $h_2 \circ h_1 = h_2 \circ h_1$ が成立します．このように合成される射の順番を入れ換えることができるから「可換」と言うのだ，ということは説明を要しないでしょう．しかし，(6.6) の左図式において合成射 $f_2 \circ f_1$ は作れますが，$a_1 \neq a_4$ であれば $f_1 \circ f_2$ という合成射は作れません．でも,「可換」という言葉を拡大解釈して，$f_2 \circ f_1 = f_4 \circ f_3$ でありさえすれば (6.6) を可換図式と言うのです．もしも (6.7) が非可換だったら，それは

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "h_2"'] \arrow[dr, shift left, "h_2 h_1"] \arrow[dr, shift right, "h_1 h_2"'] & a \arrow[d, "h_2"] \\
a \arrow[r, "h_1"'] & a
\end{tikzcd}
\tag{6.8}
$$

のように書くべきで，こう書けば $h_2 \circ h_1 \neq h_2 \circ h_1$ であることを意識できるでしょう．

圏の例をいくつか挙げます．集合の圏 $\mathbf{Set}$ というものがあります．この圏では，任意の集合が対象であり，集合から集合への写像が射であり，合成写像が合成射です．また，各集合の恒等写像が恒等射です．

実数体上の有限次元ベクトル空間の圏 $\mathbf{Vct}$ というものもあります．この圏では，有限次元ベクトル空間 $U, V, W, \cdots$ 等が対象であり，それらを結ぶ線形作用素 $U \xrightarrow{B} V$, $V \xrightarrow{A} W$ 等が射です．合成写像 $U \xrightarrow{AB} W$ が合成射です．このように，**一つの圏は,「対象がどれだけあって，射が何で，合成射がいかにして定められるか」を述べることによって規定されます．**

一般の圏においては，対象は集合であることを要請されませんし，射は写像とは限りません．例えば，自然数を対象とし，自然数 a, b について大小（順序）関係 $a \leq b$ を射 $a \to b$ と

定めることができます．そうすると，大小関係の序列

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to \cdots \tag{6.9}$$

ができます．煩雑になるので書きませんでしたが，本当は $1\to 1$, $2\to 2$ や $1\to 3$, $1\to 4$, $2\to 4$ といった矢印も書き込むべきです．ここでは，任意の a と b を結ぶ射は，あったとしても一本しかないので，いちいち $a \xrightarrow{f} b$ の f のような名前を射に付ける必要はありません．$a \leq b$, $b \leq c$ のとき $a \leq c$ だから，$a\to b$, $b\to c$ のとき $a\to c$ となって射の合成が定められ，(6.9) は圏を成します．この圏においては射 $a\to b$ は「a より後に b が来る」という関係を表しています．a は一つの数であって集合ではないし，$a\to b$ という矢印は集合 a から集合 b への写像ではありません．この圏は自然数の大小関係のネットワークです．

自然数を対象とする圏は，大小関係の圏 (6.9) とは限りません.「自然数 b が a で割り切れる」ことを射 $a\to b$ と定めても圏ができます：

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[r] \arrow[dr] & 8 \arrow[r] \arrow[dr] & 16 \\
 & 2 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[ddr] & 6 \arrow[r] \arrow[dr] & 12 \arrow[r] \arrow[dr] & 24 \\
1 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & 3 \arrow[ur] \arrow[r] & 9 \arrow[r] \arrow[dr] & 18 \arrow[r] & 36 \\
 & 5 \arrow[r] \arrow[dr] & 10 & 27 & \\
 & 7 & 25 & &
\end{tikzcd} \tag{6.10}$$

本当は無数の自然数があるので，この圏は無限に拡がっているのですが，省略して一部のみを書きました．大小関係の圏 (6.9) と約数の圏 (6.10) は，だいぶ異なった様相を呈しているでしょう．(6.10) を眺めていると，1 から出た射を最初に受けるのは素数だとか，2 本の射の合流点は最小公倍数であるとか，2 つの対象の上流側の分岐点は最大公約数であるとかいった構造も浮かび上がってくることでしょう．

圏は**有向グラフ** (directed graph) に毛の生えたようなものです．有向グラフとは，点を辺で結んだ図であり，各辺の始点と終点の区別があるものです．ただ，グラフでは辺の始点と終点は異なる点であることを要請する場合があります．圏では $a \xrightarrow{1_a} a$ のように始点と終点とが一致する射が必ずあります．また，グラフでは a と b を結ぶ辺と，b と c を結ぶ辺があったとしても，a と c を結ぶ辺があるとは限りませんが，圏では a から b への射と，b から c への射があったら，必ず a から c への合成射ができなくてはいけません．合成射が作れて，結合律を満たしていて，どの対象にも恒等射がある，というのが圏をただの有向グラフから区別する条件です．また，グラフは，点や辺の数が有限個か可算無限個のものを考えることが多いですが，圏では，対象や射の数は無限個（非可算無限個）でも全然かまいません．

射 $a \xrightarrow{f} b$ に対して射 $b \xrightarrow{f'} a$ で $f' \circ f = 1_a$ かつ $f \circ f' = 1_b$ を満たすものがあれば，f は**可**

逆 (invertible) あるいは**同型射** (isomorphism) だと言います.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_a"'] & b \arrow[dl, "f'"] \\ a & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & b \arrow[dl, "f'"'] \arrow[d, "1_b"] \\ a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd} \tag{6.11}$$

この f' を f の**逆射** (inverse) と言い，$f' = f^{-1}$ と書きます．また，対象 a, b を結ぶ同型射が存在するとき，a と b は**同型** (isomorphic) だと言い，$a \cong b$ と書きます.

どのような圏でも，各対象の恒等射は一意的である（対象 a に対して恒等射の条件を満たす 2 つの射 1_a, $1'_a$ があったとしたら $1_a = 1'_a$ である）ことが証明できます．また，射 f の逆射は一意的である（射 f に対して逆射の条件を満たす 2 つの射 f', f'' があったとしたら $f' = f''$ である）ことも証明できます．これらは圏論や群論の基本的な演習問題です.

7 関手

圏は，対象同士を射で結んだ，一つの閉じた世界ですが，圏同士の関係にも注目したいことがあります．とくに，**ある圏と別の圏との連動に注目したい**場合や，**抽象的な対象からなる圏を具体的な対象からなる圏に写し取りたい**場合は，関手という道具を用います.

関手は以下のようなものです．2 つの圏 $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ があったとき，$\mathscr{C}$ の対象 a, b に $\mathscr{D}$ の対象 $F(a), F(b)$ を対応させ，$\mathscr{C}$ の射 $a \xrightarrow{f} b$ に $\mathscr{D}$ の射 $F(a) \xrightarrow{F(f)} F(b)$ を対応させる F が条件

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f), \tag{7.1}$$

$$F(1_a) = 1_{F(a)} \tag{7.2}$$

を満たすならば，F を $\mathscr{C}$ から $\mathscr{D}$ への**共変関手**（きょうへんかんしゅ）(covariant functor) あるいはたんに**関手** (functor) といい，$F : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ と書きます．$F(a)$ を Fa と書き，$F(f)$ を Ff と書くこともあります.

$$\mathscr{C} \quad \begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & b \arrow[d, "g"] \\ & c \end{tikzcd} \quad \begin{matrix} \overset{F}{\rightsquigarrow} \\ \\ \overset{F}{\rightsquigarrow} \end{matrix} \quad \begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "Ff"] \arrow[dr, "F(g\circ f)=Fg\circ Ff"'] & Fb \arrow[d, "Fg"] \\ & Fc \end{tikzcd} \quad \mathscr{D} \tag{7.3}$$

関手を使って言いたいことは，圏 $\mathscr{C}$ の対象 a が圏 $\mathscr{D}$ の対象 Fa に対応しているだけでなく，$\mathscr{C}$ の射 $a \xrightarrow{f} b$ が $\mathscr{D}$ の射 $F(a) \xrightarrow{F(f)} F(b)$ と連動しているということです．さらに，$\mathscr{C}$ の中で合成射を作ってから関手 F で写すのと，関手 F で $\mathscr{D}$ に写してから合成射を作るのが等しく $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$ となるあたり，関手 F は圏 $\mathscr{C}$ の構造を圏 $\mathscr{D}$ に写し取っていると言えます.

なお，対象 a は集合とは限りません．もし a と Fa が集合だったとしても $a \rightsquigarrow Fa$ という対応は写像とは限りません.

共変関手と対比されるものとして反変（はんぺん）関手という概念があります．圏 $\mathscr{C}$ の対象 a, b に圏 $\mathscr{D}$ の対象 $G(a), G(b)$ を対応させ，$\mathscr{C}$ の射 $a \xrightarrow{f} b$ に $\mathscr{D}$ の射 $G(b) \xrightarrow{G(f)} G(a)$ を対応させる G

が条件

$$G(g \circ f) = G(f) \circ G(g), \tag{7.4}$$

$$G(1_a) = 1_{G(a)} \tag{7.5}$$

を満たすならば，G を $\mathscr{C}$ から $\mathscr{D}$ への**反変関手**(はんぺん) (contravariant functor) と言います．反変関手に対しても $G : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ という記法を用います．射 $a \xrightarrow{f} b$ に対して $Ga \xleftarrow{Gf} Gb$ の矢の向きが反転しており，合成 $g \circ f$ の順序も $Gf \circ Gg$ に入れ替わっていることを「反変」と称しています．

$$\mathscr{C} \quad \begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & b \arrow[d, "g"] \\ & c \end{tikzcd} \quad \begin{matrix} \overset{G}{\rightsquigarrow} \\ \\ \overset{G}{\rightsquigarrow} \end{matrix} \quad \begin{tikzcd} Ga & Gb \arrow[l, "Gf"'] \\ & Gc \arrow[u, "Gg"'] \arrow[ul, "G(g\circ f)=Gf\circ Gg"] \end{tikzcd} \quad \mathscr{D} \tag{7.6}$$

共変関手の例を挙げます．任意の集合 X の部分集合全体の集合を $\mathscr{P}(X)$ と書き，X の**ベキ集合** (power set) と呼びます．集合 X から集合 Y への写像 $f : X \to Y$ があると，X の部分集合 A の行先として Y の部分集合

$$f(A) := \{f(a) \,|\, a \in A\} \tag{7.7}$$

が定まりますが，これを f による A の**像** (image) と言います．そうすると，X のベキ集合から Y のベキ集合への写像

$$\mathscr{P}(f) : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y), \qquad A \mapsto f(A) \tag{7.8}$$

が定まります．結果的に，集合の圏 **Set** の対象 X に対して対象 $\mathscr{P}(X)$ が定まり，射 $X \xrightarrow{f} Y$ に対して射 $\mathscr{P}(X) \xrightarrow{\mathscr{P}(f)} \mathscr{P}(Y)$ が定まったことになります．さらに，写像 $g : Y \to Z$ があれば，$\mathscr{P}(Y) \xrightarrow{\mathscr{P}(g)} \mathscr{P}(Z)$ ができて，$\mathscr{P}(g) \circ \mathscr{P}(f) = \mathscr{P}(g \circ f)$ が成り立つことが確認できます．また，恒等写像 $1_X : X \to X$ に対して $\mathscr{P}(1_X) : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ がベキ集合の恒等写像になっていることは容易に確認できます．したがって，この対応づけ $\mathscr{P} : \mathbf{Set} \rightsquigarrow \mathbf{Set}$ は共変関手になっています．

例えば，

$$X = \{a, b, c\} \tag{7.9}$$

という集合の部分集合の全体の集合は

$$\mathscr{P}(X) = \{\{\,\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} \tag{7.10}$$

です．$\{\,\}$ は元が一つもない集合，空集合です．集合 Y が

$$Y = \{u, v, w, x, y, z\} \tag{7.11}$$

だったとして，写像 $f : X \to Y$ が

$$f(a) = u, \quad f(b) = x, \quad f(c) = x \tag{7.12}$$

という写像だったら，ベキ集合の写像 $\mathscr{P}(f):\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(Y)$ は，例えば，

$$\mathscr{P}(f)(\{a\})=\{u\},\qquad \mathscr{P}(f)(\{a,b\})=\{u,x\},\qquad \mathscr{P}(f)(\{b,c\})=\{x\} \tag{7.13}$$

を出力します．いま考えた関手 $\mathscr{P}$ は，集合 X に集合 $\mathscr{P}(X)$ を対応させてはいますが，X の個々の元に $\mathscr{P}(X)$ の元を対応させてはいません．ですので，$\mathscr{P}$ は $X\to\mathscr{P}(X)$ という写像ではありません．

反変関手の例を挙げます．写像 $f:X\to Y$ があると，今度は，Y の部分集合 S に対して X の部分集合

$$f^{-1}(S):=\{x\in X\mid f(x)\in S\} \tag{7.14}$$

が定まりますが，これを f による S の**逆像** (inverse image) と言います．逆写像 $f^{-1}:Y\to X$ がなくても逆像 $f^{-1}(S)$ は定義できることに注意してください．また，$\mathscr{P}(X)$ を $\bar{\mathscr{P}}(X)$ と書くことにします（同じものなのですが）．こうして，Y のベキ集合から X のベキ集合への写像

$$\bar{\mathscr{P}}(f):\bar{\mathscr{P}}(Y)\to\bar{\mathscr{P}}(X),\qquad S\mapsto f^{-1}(S) \tag{7.15}$$

が定まります．これは (7.8) の $\mathscr{P}(f)$ とは別物です．また，写像 $g:Y\to Z$ があったとき，任意の $T\subset Z$ に対して $(g\circ f)^{-1}(T)=f^{-1}(g^{-1}(T))$ が成り立つことが確認できます．また，恒等写像 $1_X:X\to X$ に対して $\bar{\mathscr{P}}(1_X):\bar{\mathscr{P}}(X)\to\bar{\mathscr{P}}(X)$ がベキ集合の恒等写像になっています．結果的に，集合の圏 **Set** の対象 X に対して対象 $\bar{\mathscr{P}}(X)$ が定まり，射 $X\xrightarrow{f}Y$ に対して射 $\bar{\mathscr{P}}(Y)\xrightarrow{\bar{\mathscr{P}}(f)}\bar{\mathscr{P}}(X)$ が定まって，$\bar{\mathscr{P}}:\mathbf{Set}\rightsquigarrow\mathbf{Set}$ は反変関手になっています．

逆像の概念の理解を確認するために，(7.12) に挙げた写像 f に対して

$$f^{-1}(\{u\}),\qquad f^{-1}(\{x\}),\qquad f^{-1}(\{u,v\}),\qquad f^{-1}(\{v,w\}) \tag{7.16}$$

がどんな集合になるか考えてみてください．

どんな圏に対しても恒等関手は共変関手です（当たり前）．また，どんな圏に対しても定められる反変関手として，**反対圏（逆圏）**(opposite category) を作る関手があります．これは，対象 a を $\bar{a}:=a$（何も変えていない）と書き，射 $a\xrightarrow{f}b$ を $\bar{a}\xleftarrow{\bar{f}}\bar{b}$ と書くことにするという関手です．あえて矢の向きを逆向きに書いただけで，本当は何にも変えていません．ただ，こうすると，いやおうなしに $\overline{g\circ f}=\bar{f}\circ\bar{g}$ が成立します．それで反変関手になっています．ただ，反対圏は，これだけ見せられても何のためにそんなものを作ったのかわからないしろものだろうと思います．

8　自然変換

圏から圏への対応が関手でしたが，視点をもう一段高くすると，関手から関手への自然変換という概念が視野に入ってきます．

圏 $\mathscr{C}$ から圏 $\mathscr{D}$ への 2 つの共変関手 $F:\mathscr{C}\rightsquigarrow\mathscr{D}$ および $\tilde{F}:\mathscr{C}\rightsquigarrow\mathscr{D}$ があるとき，F から $\tilde{F}$ への自然変換 T が以下のように定められます．自然変換 $T:F\dot{\to}\tilde{F}$ は，$\mathscr{C}$ の各対象 a に $\mathscr{D}$

の射 $Fa \xrightarrow{T_a} \tilde{F}a$ を対応させます．$\mathscr{C}$ の任意の射 $a \xrightarrow{f} b$ は関手 F によって $\mathscr{D}$ の射 $Fa \xrightarrow{Ff} Fb$ に写され，関手 $\tilde{F}$ によって $\tilde{F}a \xrightarrow{\tilde{F}f} \tilde{F}b$ に写されます．このとき，

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{C} & & & Fa \arrow[r, "Ff"] \arrow[dd, "T_a"] & Fb \arrow[dd, "T_b"] & \mathscr{D} \\
a \arrow[r, "f"] & b & {} \arrow[ur, rightsquigarrow, "F"] \arrow[dr, rightsquigarrow, "\tilde{F}"'] & & & \\
& & & \tilde{F}a \arrow[r, "\tilde{F}f"] & \tilde{F}b &
\end{tikzcd}
\tag{8.1}
$$

が可換図式になっていれば，つまり $T_b \circ Ff = \tilde{F}f \circ T_a$ が成り立つならば，T を F から $\tilde{F}$ への**自然変換** (natural transformation) と呼び，$T : F \mathrel{\dot{\to}} \tilde{F}$ と書きます．

自然変換 T は $\mathscr{C}$ の対象 a に，$\mathscr{D}$ の対象を対応させるのではなく，$\mathscr{D}$ の射 $Fa \xrightarrow{T_a} \tilde{F}a$ を対応させている点には注意してください．**関手が対象に対象を** $(a \rightsquigarrow Fa)$**，射に射を対応させる** $(f \rightsquigarrow Ff)$ **のに対して，自然変換は対象に射を対応させます** $(a \mathrel{\dot{\to}} T_a)$**．**

自然変換がなぜ「自然」と形容されるのかは説明しにくいですが，自然変換は，任意の射 $a \xrightarrow{f} b$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "T_a"'] & Fb \arrow[d, "T_b"] \\
\tilde{F}a \arrow[r, "\tilde{F}f"] & \tilde{F}b
\end{tikzcd}
\tag{8.2}
$$

を可換図式にするものです．ただたんに可換図式を作るだけだったら，f ごとに T_a, T_b をうまく選んで可換にしてやれないこともなさそうですが，そういうセコいやり方ではなく，いったん T_a, T_b を選んだらそれらを変更することなく，いかなる f に対してでも (8.2) は可換図式になっていなくてはならないのです．f に関わりなく T_a, T_b は選ばれて，それでいて，(8.2) を可換ならしめるよう，すべての f を一網打尽に T_a, T_b は面倒見ているのです．この一網打尽さ・一斉さみたいな性質を「自然」と形容しているのです．逆に，相手によってやり方を変えるのは「人為的だ」「わざとらしい」「小細工だ」「不自然だ」と形容すれば，自然変換を「自然」と呼ぶ気持ちがいくらか伝わると思います．

いま共変関手の間の自然変換を定義しましたが，反変関手の間の自然変換の定義も似たようなものです．圏 $\mathscr{C}$ から圏 $\mathscr{D}$ への 2 つの反変関手 $G : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ および $\tilde{G} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ があるとき，G から $\tilde{G}$ への自然変換 S は，$\mathscr{C}$ の各対象 a に $\mathscr{D}$ の射 $Ga \xrightarrow{S_a} \tilde{G}a$ を対応させます．$\mathscr{C}$ の任意の射 $a \xrightarrow{f} b$ は関手 G によって $\mathscr{D}$ の射 $Gb \xrightarrow{Gf} Ga$ に写され，関手 $\tilde{G}$ によって $\tilde{G}b \xrightarrow{\tilde{G}f} \tilde{G}a$ に写されます．このとき，

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{C} & & & Ga \arrow[dd, "S_a"] & Gb \arrow[l, "Gf"'] \arrow[dd, "S_b"] & \mathscr{D} \\
a \arrow[r, "f"] & b & {} \arrow[ur, rightsquigarrow, "G"] \arrow[dr, rightsquigarrow, "\tilde{G}"'] & & & \\
& & & \tilde{G}a & \tilde{G}b \arrow[l, "\tilde{G}f"'] &
\end{tikzcd}
\tag{8.3}
$$

が可換図式になっていれば，つまり $S_a \circ Gf = \tilde{G}f \circ S_b$ が成り立つならば，S を G から $\tilde{G}$ への自然変換と呼び，$S : G \overset{\cdot}{\to} \tilde{G}$ と書きます．

共変関手の代表例としては，抽象的ベクトル空間に基底を定めて数ベクトル空間に写す同型写像が挙げられます．基底の選択はいろいろありますから，抽象的ベクトル空間に基底を定めて数ベクトル空間に写す関手もたくさんあります．このとき，基底変換が自然変換になっています．

反変関手の例としては，ベクトル空間の双対空間を定める対応が挙げられます．また，ベクトル空間が内積空間ならば，共役作用素を定めることも反変関手になります．この場合，双対空間と元の空間との同型対応が定まりますが，これが自然変換になっています．

9　普遍射

以上で，圏・関手・自然変換の定義を述べました．関手と自然変換は，圏と圏の関係，圏の外向きの関係を表すものでしたが，次に，圏の内部構造をうまく浮かび上がらせる道具である普遍射という概念を説明して，この講演を終わりたいと思います．普遍射の定義はけっこう複雑です．落ち着いて読んでください．

圏 $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ と関手 $F : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ と，$\mathscr{D}$ の対象 a が与えられたとき，$\mathscr{C}$ の対象 r と $\mathscr{D}$ の射 $a \xrightarrow{u} Fr$ があって，$\mathscr{C}$ の任意の対象 s と $\mathscr{D}$ の任意の射 $a \xrightarrow{f} Fs$ に対して，$(F\phi_f) \circ u = f$ を満たす $\mathscr{C}$ の射 $r \xrightarrow{\phi_f} s$ が一意的に存在するのであれば，$a \xrightarrow{u} Fr$ を a から F への**普遍射** (universal arrow) と呼びます．

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{C} & & & & a \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "f"] & & \mathscr{D} \\
r \arrow[r, dotted, "\phi_f"'] & s & {} \arrow[r, squiggly, "F"] & {} & Fr \arrow[r, dotted, "F\phi_f"'] & Fs &
\end{tikzcd}
\tag{9.1}
$$

上の図式で $r \xrightarrow{\phi_f} s$ や $Fr \xrightarrow{F\phi_f} Fs$ の矢印を点線で書いたのは，これが，s や f など図式に現れる他の要素が決まった後で自動的に唯一に決まる射であることを示しています．これは圏論でよく使われる流儀です．例えば，整数を 3 倍する写像を $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 3} \mathbb{Z}$ と書いて，

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[d, "\times 3"'] \arrow[dr, "\times 15"] & \\
\mathbb{Z} \arrow[r, dotted] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}
\tag{9.2}
$$

が可換図式だとすると，点線のところにあてはまる射は $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 5} \mathbb{Z}$ しかありません．同様に，

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[d, dotted] \arrow[dr, "\times 24"] & \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "\times 4"'] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}
\tag{9.3}
$$

を可換図式ならしめるように点線にあてはまる射を求めよという問題を立てることもできます.「点線の矢」は後付けで答えが決まる部分です（答えは $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 6} \mathbb{Z}$ ですね）．この種の，

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "f"] & \\
b \arrow[r, dotted] & c
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, dotted] \arrow[dr, "f"] & \\
b \arrow[r, "v"'] & c
\end{tikzcd}
\tag{9.4}
$$

を可換図式にするように点線矢にあてはまる射 $b \xrightarrow{g} c$ や $a \xrightarrow{h} b$ を求めることを**射 f の分解**と言います（結果的には $f = g \circ u$ や $f = v \circ h$ が成立する）．圏では合成可能な射の合成はできますが，射の分解がいつでもできるとは限りませんし，点線にあてはまる答えが一つとも限りません（整数の掛け算だったら分解は一意的ですが，例えば，行列の掛け算の分解は一意的とは限りません）．そこで，圏論の主張は「これこれの可換図式の点線矢にあてはまる射が一意的に存在する」という形で語られることが多いのです.

点線矢の説明が長くなってしまいましたが，普遍射の定義で言いたかったことは，図式 (9.1) における任意の射 $a \xrightarrow{f} Fs$ が $a \xrightarrow{u} Fr$ を通して一意的に分解できるということです. いったん $a \xrightarrow{u} Fr$ ができてしまえば，後はどんな射 $a \xrightarrow{f} Fs$ でも分解できて，しかもそれを分解する射 $Fr \xrightarrow{F\phi_f} Fs$ が $\mathscr{C}$ の世界で $r \xrightarrow{\phi_f} s$ という射として一意的に決まって（f に依存するので ϕ_f と書いています）関手 F によって $\mathscr{D}$ の世界に降って来る，というところが，普遍射の特徴です．関手 F によって $\{Fs \mid s \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}\}$ という $\mathscr{D}$ の対象の部分的な集まりができます．この場合，関手 F は，要は，$\mathscr{D}$ という世界の一部分を指定するためだけにあります. 対象 a は，ただいま F によって指定された部分世界の外にいるのですが，a がこの部分世界と関わりを持つときの総合窓口の役割を普遍射 $a \xrightarrow{u} Fr$ は持ちます.

図式 (9.1) を解釈しましょう.「$\mathscr{C}$ の対象 r や s は社長・部長・課長・係長・ヒラ社員などの肩書きである」,「$\mathscr{C}$ の射は命令・伝達を表している」,「$\mathscr{D}$ の対象は人々であり，射は依頼・注文などの連絡である」,「対象 Fs は F 社の社員である」,「対象 Fs は s という肩書きを持っている」という読み方で (9.1) を解釈します．$\mathscr{D}$ の世界の住人である a に対しては $Fq = a$ となるような $\mathscr{C}$ の対象 q はなかったとします．つまり，a さんは F 社の社員ではなく，肩書きも与えられていません．しかし，a さんは F 社と取引をする立場であり，さまざまな社員 Fs さんに依頼の連絡をすることがあります．それが $a \xrightarrow{f} Fs$ という射です．じつは，F 社の中には Fr さんという特別な人と a さんから Fr さんへの特別な連絡経路 $a \xrightarrow{u} Fr$ があって，a さんが $a \xrightarrow{f} Fs$ と言う代わりに，Fr さんが $Fr \xrightarrow{F\phi_f} Fs$ と言ってくれればよいのです. そのような社内連絡経路 $r \xrightarrow{\phi_f} s$ があるというのです．ともかく a さんは $a \xrightarrow{u} Fr$ を通して「ϕ_f をよろしく頼む」と一言（ひとこと）言えば，事足りるのです．つまり，Fr さんは F 社内における a さんの代理人のようなものであり，a さんは F 社の人ではないけれども，r という肩書きが a さんの立場に最も近いと言えます．射 $a \xrightarrow{u} Fr$ というホットラインがあり，a さんの F 社に対するいかなる働きかけも，この u を通せば過不足なく達成できる，こういった意味で u を普遍射と呼ぶのです．**対象 r は a と同じ圏にはないけれど，ただいまの文脈において r は a に一番近い対象です．対象 Fr が a の代理であり，射 u が代理人への連絡経路だ**という感覚が大切です.

射 u のことを「対象 a から関手 F への普遍射」と呼びます．英語でも “u is a universal arrow from a to F” と言います．いままでの定義では「対象から対象への射」しかなかったので,「対象から関手への普遍射」では言葉づかいがちぐはぐであるように感じられるでしょうけれど，以上のように解釈すれば,「a さんから F 社への連絡経路」というものがあってもおかしくはないと思えるのではないでしょうか.

「対象 a から関手 F への普遍射」があるなら,「関手 F から対象 a への普遍射」もあります. 定義だけ述べます．関手 $F : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ と，$\mathscr{D}$ の対象 a が与えられたとき，$\mathscr{C}$ の対象 r と $\mathscr{D}$ の射 $Fr \xrightarrow{v} a$ があって，$\mathscr{C}$ の任意の対象 s と $\mathscr{D}$ の任意の射 $Fs \xrightarrow{f} a$ に対して，$v \circ (F\psi_f) = f$ を満たす $\mathscr{C}$ の射 $s \xrightarrow{\psi_f} r$ が一意的に存在するのであれば，$Fr \xrightarrow{v} a$ を $\boldsymbol{F}$ **から** $\boldsymbol{a}$ **への普遍射**と呼びます.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} & s \arrow[r, dotted, "\psi_f"] & r & {} \arrow[r, squiggly, "F"] & {} & Fs \arrow[r, "F\psi_f"] \arrow[dr, "f"'] & Fr \arrow[d, "v"] & \mathscr{D} \\
& & & & & & a &
\end{tikzcd} \tag{9.5}$$

F から a への普遍射の解釈のしかたは皆さん各自考えてください.

射 $a \xrightarrow{f} b$ があれば「a は上位，b は下位」と解釈するなら，(9.1) においては，a から F への普遍射 u は，a よりも下にあるさまざまな対象 $\{Fs \mid s \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}\}$ のうち一番上に位置する Fr を指します．(9.5) においては，F から a への普遍射 v は，a よりも上にあるさまざまな対象 $\{Fs \mid s \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}\}$ のうち一番下に位置する Fr から a に向けて発します．この，**「…よりも下にいる連中の中で一番上に位置する対象」とか「…よりも上にいる連中の中で一番下に位置する対象」といったものは,「…」を下と上からはさんで「…」の特徴を浮かび上がらせます．**こんなふうに，圏内のネットワーク構造を通して「…」に該当する対象の特性を抽出するのが圏論のテクニックです.

始対象と終対象の定義も述べておきます．圏 $\mathscr{C}$ の，ある対象 a_0 があって，いかなる対象 b に対しても，射 $a_0 \to b$ が一つだけ存在するならば，対象 a_0 を $\mathscr{C}$ の**始対象** (initial object) と言います．また，ある対象 a_1 があって，いかなる対象 c についても射 $c \to a_1$ が一つだけ存在するならば，対象 a_1 を**終対象** (terminal object) と言います.「すべての…に対して必ず…があり，しかもその…はただ一つしかない」という形式が普遍性の形式になっています.

$$\begin{tikzcd}
& b_1 & c_1 \arrow[dr] & \\
a_0 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & b_2 & c_2 \arrow[r] & a_1 \\
& b_3 & c_3 \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \tag{9.6}$$

始対象・終対象そのものは普遍射ではありませんが，普遍射と始対象・終対象という概念を知っておけば，圏論の諸概念はほとんど語り尽くせると思います．普遍射を使って捉えられる圏論の概念としては，**積・余積・イコライザ・コイコライザ・引き戻し・押し出し・極限・余極限**などがあります．これらはみな，ある圏の始対象または終対象として捉えられます.

これで私の講演を終わります．もちろんこの講演ノートだけでは，圏論の解説としてはまったく不十分ですが，圏論の本を恐れずに読めるくらいの準備は提供できたのでないかと私は期待します.

謝辞：古結明男（こけつあきお）氏は，学部生時代からの同級生で，圏論だけでなく，私に広範な数学を教えてくれた方です．圏論に関する私の基本的な知識は古結氏から伝授されたものです.「21世紀の数学は圏論の矢印図式で書かれるようになると思う」というのが当時大学院生だった古結氏の予言です．小嶋（おじま）泉氏は，場の量子論の数理的研究で有名な方で，ミクロ・マクロ双対性の提唱者でありますが，小嶋氏とミクロ・マクロ双対性をめぐる議論をさせていただいたことがきっかけで私の圏論に対する関心は再燃しました．深川宏樹（ひろき）氏は，彼自身が大学院生だったときに「圏論大好き」仲間として私に話しかけてくれました．以来，研究会も一緒に開催する同志になっています．古賀実氏をはじめとする名古屋大学の大学院生たちと圏論・トポスのゼミを１年以上催しました．学生諸君との議論を通して，これらの分野の内容理解を深めることができました．森田真生（まさお）氏は，公的な機関に所属しない独立研究者として活躍している数学者です．森田氏による圏論・トポスについての連続講義を戸田山和久氏がアレンジしてくださったおかげで私は森田氏の講義を聴く機会に恵まれました．塩谷賢氏とは，さまざまな場面でいろいろなテーマについて議論していますが，とくに圏論における普遍性の重要さは，塩谷氏から指摘していただいて，私も認識を新たにしたことです．また，研究会において忌憚なき質問・コメントをくださった皆さんに感謝しています．そうしてくださった方たち一人ひとりの名前を挙げ切れず申し訳ないですが，質問・コメントをいただくたびに，私自身，新たな気づきと理解を得ております.

以下に参考文献リストを掲げます．おおよそ，易しい文献から難しい文献の順に並べます.

参考文献

[1] 檜山（ひやま）正幸，ブログ『檜山正幸のキマイラ飼育記』.『はじめての圏論 その第１歩：しりとりの圏』に一連の解説記事の目次が提示されています．文体に特徴があって面白いです.『2017年 圏論に関する参考文献の案内（無料オンライン版含む）』も見てみるとよいでしょう.

[2] 谷村省吾,『理工系のための トポロジー・圏論・微分幾何』，臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ 52（2006）．手前味噌で恐縮ですが，日本語で圏論について書かれた本としては最もとっつきやすい本にするつもりで書きました．第５章が圏論の解説にあてられています．現在，紙版は売り切れて，電子版が販売されています.

[3] 谷村省吾,『幾何学から物理学へ—物理を圏論・微分幾何の言葉で語ろう』，数理科学 2016年８月号から３月に２回のペースで連載．タイトル・サブタイトルどおり，圏論と微分幾何を物理に応用することを目指して書かれている連載記事です.

[4] 森田真生,『哲学者のための圏論入門』, 応用哲学会サマースクール 2013「哲学者のための圏論入門」のために書かれた講義用配布資料．圏論の初歩からトポスまで，それらの意味論を大切にして解説されています．私の今回の講演ノートより丁寧に書かれており，しかも先の話まで進んでいます．PDF ファイルがインターネットに公開されています．

[5] 圏論の歩き方委員会（編著）,『圏論の歩き方』, 日本評論社 (2015). 数学セミナーに連載された記事を単行本化したものです.（たぶん）12 人の参加者による，リレー形式，ときには対談形式で，多様な視点から圏論へのアプローチを紹介するガイドブックのような書物です．こういう本を形にすること自体，非常に面白い試みだと思うのですが，圏論の教科書として通読するのには向いていないかもしれません．

[6] Bob Coecke, "Introducing categories to the practicing physicist", arXiv: 0808.1032. 量子情報科学の研究者向けに行われた講義のノート．PDF ファイルがネットに公開されています．

[7] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, "Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories", 2nd ed., Cambridge Univ. Press (1997). ページをめくって見ると，絵本？子供向けか？と思うほど図式の多い本です．圏論の概念を活き活きとした形で学びたい人に向いていると思います．

[8] Tom Leinster, "Basic Category Theory", Cambridge Univ. Press (2014). 日本語訳：T. レンスター（土岡俊介 訳，齋藤恭司 監修）『ベーシック圏論—普遍性からの速習コース』，丸善出版 (2017). たしかにベーシックと言える内容です．普遍性の視点が貫かれています．演習問題がたくさん載っており，日本語訳版には解答も付けられています．

[9] Steve Awodey, "Category Theory", 2nd ed., Oxford Univ. Press (2010). 日本語訳：S. アウディ（前原和寿 訳）『圏論—原著第 2 版』，共立出版．これも易しい本だと思います．

[10] 竹内外史,『層・圏・トポス—現代的集合像を求めて』, 日本評論社 (1978). 論理の拡張版であるトポスへの入門書です．記述が雑なところもありますが，新しい論理・新しい集合像を創ろうという試みの勇気が素敵だと思います．最近復刊されました．

[11] 谷村省吾,『量子論とトポス』, 第 6 回 QUATUO 研究会講演資料（2017 年 1 月 9 日講演）．トポスの入口の解説．手書きノートです．トポス量子論に関する文献リストと見なしていただいた方がよいです．

[12] Saunders MacLane, "Categories for the Working Mathematician", 2nd ed. Springer (1978). 日本語訳：S. マックレーン（三好博之，高木理 訳）『圏論の基礎』，丸善出版 (2015). 圏論の定番教科書です．丁寧に書かれていますが，高度な内容も含んでいます．

[13] J. L. Bell, “Toposes and Local Set Theories: An Introduction”, Dover (2008). トポスの入門書ですが，第 1 章が非常によくまとまった圏論の解説になっています.

[14] Xy-pic（LaTeX のマクロ，ネットに公開されている）. 圏論で多用される矢印図式は，手で書くのは簡単ですが，パソコンで清書するのは骨が折れます. Xy-pic は LaTeX で圏論図式を書くのを支援するマクロです. 数式環境の中で行列を書くのと似たような要領で図式を書けます. 同種のマクロはいろいろ作られていますが，私は Xy-pic を愛用しています.

圏じゃないものの例
・1000円で行ける駅から駅への射　村主さんが挙げてくれた例

物理学者のための圏論入門、谷村省吾

集合論 set theory ⟷ 圏論 category theory

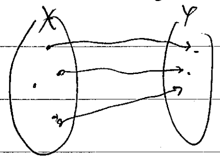
元が集まって集合をなす　　集合より旅も写像の概念の方が優先・基本的

元と元の対応として写像が定まる　　$X \xrightarrow{f} Y$ という矢を考える

$x \in X$　　X, Y は集合とは限らない

$f: X \to Y$　　f は写像でなくてもよい。

$x \mapsto f(x)$　　集合が主か？ 写像が主か？



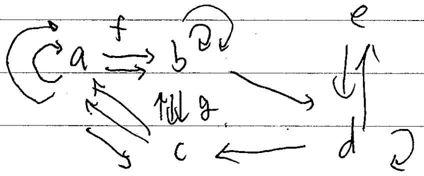
圏論の基本概念　3種の矢

- 射(arrow, morphism) ⟶ 対象から対象への射 $a \xrightarrow{f} b$
- 関手(functor) ⇝ 圏から圏への関手 $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$
- 自然変換(natural Transformation) $\xrightarrow{\bullet}$ 関手から関手への自 $F \xrightarrow{\tau} \tilde{F}$

Def 圏 (category)

1) 圏には 対象(object) $a, b, c, \cdots$ がある　といい。　と書く、

2) 〃 射(arrow) $a \xrightarrow{f} b$ がある. a を f の始域(domain) $\mathrm{dom}\, f = a$ といい, b を f の終域(codomain) $\mathrm{cod}\, f = b$ と書く. $a \xrightarrow{f} b$ と書いたり $f: a \to b$ と書く.



圏は有向グラフ

3) 射 $a \xrightarrow{f} b$, $b \xrightarrow{g} c$　$\mathrm{cod} f = \mathrm{dom}\, g$ となっているとき, f, g は合成可能(composable)という.
このとき射 $a \xrightarrow{g\circ f} c$ が定まる.
合成(composite)

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ & {\scriptstyle g\circ f}\searrow & \downarrow g \\ & & c \end{array}$$

$g \circ f$ ができても $f \circ g$ が ~~f∘g の順た合~~ できるとは限らない

4) 結合律(associativity)

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ & \searrow & \downarrow g & \searrow \\ & & c & \xrightarrow{h} & d \end{array}$$

のとき $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$

5) 恒等射(identity)　各対象 a に恒等射と呼ばれる arrow $id_a = 1_a : a \to a$ があり

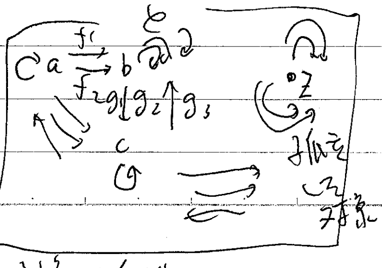
$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ {\scriptstyle 1_a = id_a}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle f} & \\ a & & \end{array}$$

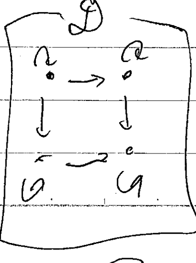
$f \circ 1_a = f$

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ & {\scriptstyle f}\searrow & \downarrow 1_b \\ & & b \end{array}$$

$1_b \circ f = f$.　$\mathcal{C}(a, b)$ とも $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,b)$ ホムセット(hom-set)　$Ob(\mathcal{C})$

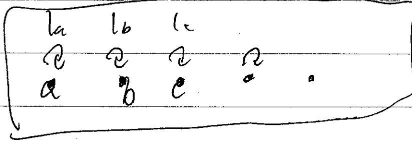
以上の条件を満たす対象と射の集まりを圏という. 圏を $\mathcal{C}$ や $\mathcal{D}$ などの記号で表す。　$Arr(\mathcal{C})$



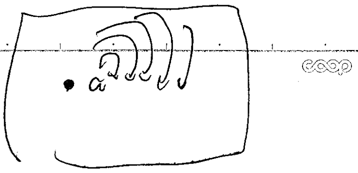


極端な圏

・離散圏(射が恒等射のみ)



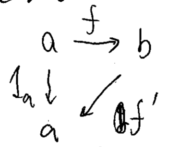
・モノイド(対象が一つ)



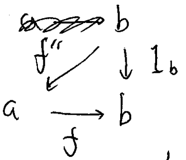
対象と射で
対象を繋いだネットワークが圏

2 **Def** 逆射は可逆とは限らない。

射 $a \xrightarrow{f} b$ に対して



$f'\cdot f = 1_a$ となるような $b \xrightarrow{f'} a$ があれば f' を f の left inverse 左逆射という。



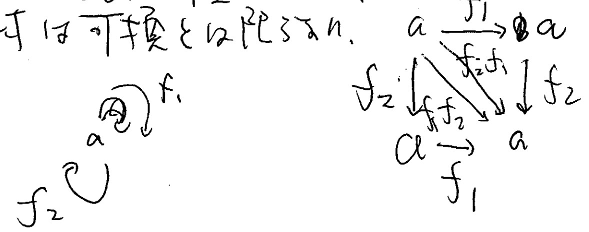
$f\circ f'' = 1_b$ となるような $b \longrightarrow a$ の f'' があれば f'' を f の right inverse 右逆射という。

Theorem f の左・右両方の逆射があれば $f' = f''$. ∵ $f' = f'\cdot 1_b = f'(f\cdot f'') = (f'\cdot f)\cdot f'' = 1_a\cdot f'' = f''$

Def $a \xrightarrow{f} b$ は可逆(invertible) :⟺ left, right inverse が存在。同型射(isomorphism)

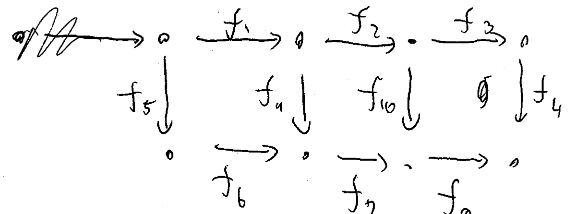
a と b は同型(isomorphic)　このとき $f' = f'' = f^{-1}$ と書き逆射(inverse arrow)と呼ぶ。

逆射は可換とは限らない。



$f_2 f_1 = f_1 f_2$ とは限らない。

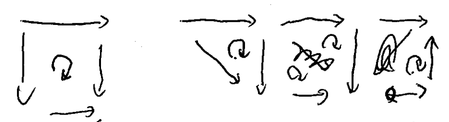
より一般に



道すじごとに合成射は異なるかもしれない。

Def 圏の一部分の対象と射の集まりを図式(diagram)という。ただし各射の始域と終域をもつ。

Def 図式Dが可換である, 可換図式である(commutative diagram) :⟺ 合成射が道すじによらない



Examples 圏の例

Set { 対象：集合 / 射：写像 / 合成射：合成写像

$Vct_{\mathbb{C}}$ { 対象：vectorspace/$\mathbb{C}$ / 射：linear map / 合成：合成写像

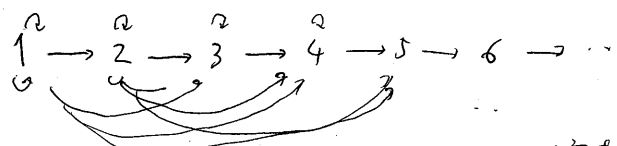
しりとり圏
対象：あ, い, う, え, お…
射：文字列
合成：文字列の合成

Grp { 対象：群 / 射：準同型写像 / 合成

Top { 対象：位相空間 / 射：連続写像

これらの圏では対象は集合, 射は写像、合成射は合成写像。

$\mathbb{N}$ { 対象：自然数 / 射, $a \le b$ のとき $a \to b$ と定める. / 合成 $a \le b$ かつ $b \le c$ のとき $a \le c$ なので



$a \to b$, $b \to c$ さえあれば $a \to c$ が定まる。

順序構造
任意の a について $a \le a$ (反射律 reflective law)
$a \le b$ かつ $b \le c$ ならば $a \le c$ (推移律 transitive) → 前順序集合 preordered set
$a \le b$ かつ $b \le a$ ならば $a = b$ → 部分順序 partialy ordered set
任意の a, b について $a \le b$ または $b \le a$ が成立。 → 全順序集合 Totally ordered set

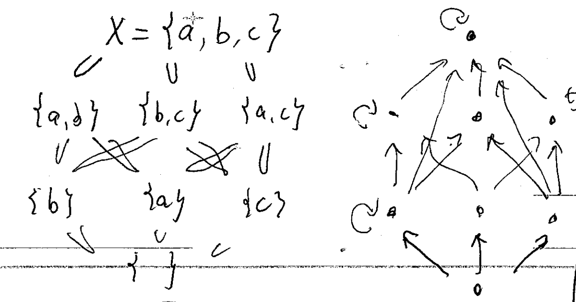
preorderedset は $a \le b$ を射 $a \to b$ と定めると圏になる
poset

X : 集合

$\mathcal{P}(X)$: X の部分集合全体

- 対象 X の部分集合
- 射 包含関係
- 合成

$X = \{a, b, c\}$



No. 3

点線の矢

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\times 3"] \arrow[dr, "\times 15"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\times 5"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, dashed] \arrow[dr, "\times 8"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\times 4"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, dashed] \arrow[dr, "\times 12"'] & \cdot \arrow[d, "\times 6"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, dashed] \arrow[dr, "\times 8"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\times 6"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

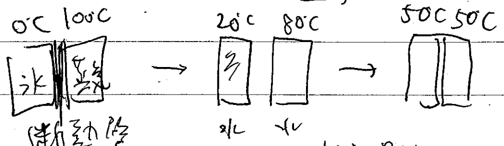
Ex. 圏としての群　$A \subset B$ のとき $A \to B$ と定める

"対象が1つだけで すべての射が可逆な圏"

Ex 熱力学的系の状態空間　状態a $\Rightarrow$ 状態b $\rightleftarrows$ c $\Rightarrow$

断熱変化 準静変化 など

- 対象 : 系の平衡状態
- 射 : 状態変化(操作) 物理的に可能な
- 合成 : 操作の合成



量子力学系　Hilbert space $\mathcal{H}_1 \xrightarrow{\text{等長埋め込み}} \mathcal{H}_2$

unitary transformations

$\mathcal{H}_1$ 上の density matrix 全体

$S(\mathcal{H}_1) \ni \rho \xrightarrow{\text{channel}} S(\mathcal{H}_2)$

unitary $\rho \mapsto U\rho U^\dagger$

CP map $\rho \mapsto \mathrm{Tr}_{\sigma}\, U \rho\otimes\sigma U^\dagger$

Def 関手 (functor)

2つの圏 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ があるとき、関手 $F : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ とは、

$\mathcal{C}$ の対象 $a, b, c, \ldots$ に $\mathcal{D}$ の対象 $F(a), F(b), F(c), \ldots$ を対応させ、

$\mathcal{C}$ の射 $a \xrightarrow{f} b$ に $\mathcal{D}$ の射 $F(a) \xrightarrow{F(f)} F(b)$ を対応させ、

$f : a \to b$　　　$F(f) : F(a) \to F(b)$

条件1

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\cdot f"'] & b \arrow[d, "g"] \\ & c \end{tikzcd} \ \mathcal{C} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "Ff"] \arrow[dr] & Fb \arrow[d, "Fg"] \\ & Fc \end{tikzcd} \ \mathcal{D}$$

$F(g\cdot f) = Fg \cdot Ff$

条件2

$a \circlearrowright 1_a$　　　$F(1_a) = 1_{Fa}$　$Fa \circlearrowright$

を満たすとき

F を共変関手 (covariant functor) という。

関手 $G : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ が

$\mathcal{C}$ の対象 a, b, c に $\mathcal{D}$ の対象 $G(a), G(b), G(c), \ldots$ を対応させ、

$\mathcal{C}$ の射 $a \xrightarrow{f} b$ に $\mathcal{D}$ の射 $G(b) \xrightarrow{G(f)} G(a)$ を対応させ

条件1'

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\cdot f"'] & b \arrow[d, "g"] \\ & c \end{tikzcd} \ \mathcal{C} \qquad \begin{tikzcd} Ga & Gb \arrow[l, "Gf"'] \\ & Gc \arrow[u, "Gg"'] \arrow[ul] \end{tikzcd} \ \mathcal{D}$$

$G(g\cdot f) = Gf \cdot Gg$

を満たすとき G を反変関手 (contravariant functor) という。

関手の例　ひらがなしりとり圏 $\rightsquigarrow$ カタカナしりとり圏

Example

$\mathcal{P} : \mathbf{Set} \rightsquigarrow \mathbf{Set}$　共変関手

$X \longmapsto \mathcal{P}(X) = X$ の部分集合全体

$(X \xrightarrow{f} Y) \longmapsto (\mathcal{P}(X) \xrightarrow{\mathcal{P}(f)} \mathcal{P}(Y))$

$\mathcal{P}(X) \ni A \longmapsto f[A] := \{ f(x) \mid x \in A \} \subset Y$　f による A の像 (image)

$A \subset X$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

$\mathcal{P}(g \circ f) = \mathcal{P}(g) \cdot \mathcal{P}(f)$　　$\mathcal{P}(1_X) = 1_{\mathcal{P}(X)}$

4] $\overline{P}$: $\mathbf{Set} \rightsquigarrow \mathbf{Set}$　反変関手

$X \longmapsto \overline{P}(X) = P(X) =$ Xの部分集合全体

$(X \xrightarrow{f} Y) \longmapsto (\overline{P}(Y) \xrightarrow{\overline{P}(f)} P(X))$

$S \longmapsto f^{-1}[S] := \{x \in X \mid f(x) \in S\}$　fによるSの逆像 (inverse image)

$S \subset Y$　fが全単射である必要はない。

$f^{-1}(g^{-1}(T)) = f^{-1}[g^{-1}[T]]$

の ‖

$(g \circ f)^{-1}[T]$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \supset g^{-1}(T) \arrow[d, "g"] \\ & Z \supset T \end{tikzcd}$$

$$\overline{P}(g \circ f) = \overline{P}(f) \circ \overline{P}(g)$$

$*$: $\mathbf{FdVct}_{\mathbb{C}} \rightsquigarrow \mathbf{FVct}_{\mathbb{C}}$　双対対応は反変関手

$V \rightsquigarrow V^*$　双対空間

$(V \xrightarrow{A} W) \longmapsto (W^* \xrightarrow{A^*} V^*)$　Aによるコベクトルの引き戻し.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "B"] \arrow[dr, "A\cdot B"'] & V \arrow[d, "A"] \\ & W \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U^* & V^* \arrow[l, "B^*"'] \\ & W^* \arrow[u, "A^*"'] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

$(AB)^* = B^* \cdot A^*$

π_n : $\mathbf{Top}_* \rightsquigarrow \mathbf{Grp}$　共変関手

位相空間　$X \rightsquigarrow \pi_n(X)$　位相空間Xのn次ホモトピー群

連続写像 $(X \xrightarrow{f} Y) \rightsquigarrow (\pi_n(X) \xrightarrow{\pi_n(f)} \pi_n(Y))$　群準同型写像.

[α]: 道αのホモトピー同値類

[Path](X)　すべての射が可逆な圏になる

!!

(亜群 groupoid)

とくに一点 $p \in X$ を固定して $\alpha(0) = \alpha(1) = p$ なる道に限定 loop

$\pi_1(X)$ ホモトピー群

1次ホモトピー群(基本群)の構造.

X: 位相空間

Path(X)
- 対象　Xの点
- 射　点a $\xrightarrow{\text{道}\alpha}$ 点b　　$\alpha: [0,1] \to X$ 連続, $\alpha(0)=a$, $\alpha(1)=b$.　$t \mapsto \alpha(t)$
- 合成

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha\beta"'] & b \arrow[d, "\beta"] \\ & c \end{tikzcd}$$

$\alpha\beta$　$[0,1] \to X$

$$t \mapsto (\alpha\beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$\alpha^{-1}(t) := \alpha(1-t)$　　定点道 一定道 $e_a(t) := a$

~~Path(X)はすべての射が可逆な射(=:亜群 groupoid~~

このままだと $(\alpha\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot(\beta\gamma)$ が成り立たない.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left=60, "\alpha"{name=A}] \arrow[r, "\alpha'"{name=B}] \arrow[r, bend right=60, "\alpha''"'{name=C}] & b \arrow[from=A, to=B, Rightarrow, "F"] \arrow[from=B, to=C, Rightarrow, "F'"] \end{tikzcd}$$

Fがαとα'のホモトープ :⟺ $F: [0,1]\times[0,1] \to X$

$\alpha \overset{F}{\simeq} \alpha'$　　$(s, t) \longmapsto F(s,t)$

$\alpha \sim \alpha'$:⟺ αとα'の間のホモトープが存在

$F(0,t) = \alpha(t)$

$F(1,t) = \alpha'(t)$

$F(s,0) = a$

$F(s,1) = b$

性質
1. $\alpha \sim \alpha$
3. $\alpha \sim \alpha'$ かつ $\alpha' \sim \alpha''$ $\Rightarrow \alpha \sim \alpha''$
2. $\alpha \sim \alpha' \Rightarrow \alpha' \sim \alpha$
4. $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma \sim \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$
5. $\alpha\cdot\alpha^{-1} \sim e_{\alpha(0)}$

$\alpha^{-1}\alpha \sim e_{\alpha(1)}$

<u>Def</u> 自然変換 (natural transformation)

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$: 圏　　$\mathcal{C} \underset{F'}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{D}$　2つの関手　　$\tau : F \overset{\circ}{\longrightarrow} F'$ が自然変換であるとは、

$\mathcal{C}$の対象 a を指定するごとに $\mathcal{D}$の射 $\tau_a : Fa \longrightarrow F'a$ があり、

$\mathcal{C}$の任意の対象 a, b, $\mathcal{C}$の任意の射 $a \xrightarrow{f} b$ に対して、

$$\mathcal{C}: \quad a \xrightarrow{f} b \qquad \overset{F}{\underset{F'}{\rightrightarrows}} \;\downarrow\tau \qquad \mathcal{D}: \begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\tau_a"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Fb \arrow[d, "\tau_b"] \\ F'a \arrow[r, "F'f"'] & F'b \end{tikzcd}$$

これが可換になる。

<u>Example 1</u>　V : ($\mathbb{C}$上の) n次元ベクトル空間

Vの基底を $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ を選ぶと、任意の $v \in V$

$v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + \cdots + v^n e_n$ で 成分の数ベクトル $\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ が定まる。

これを $\Theta_V : V \longrightarrow \mathbb{C}^n$ と書く。これは線形同型写像

$v \longmapsto \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$

W: m次元ベクトル空間、基底 $\{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$ を選ぶと 任意の $w \in W$

$w = w^1 f_1 + w^2 f_2 + \cdots + w^m f_m$

$\Theta_W : W \longrightarrow \mathbb{C}^m$

$w \longmapsto \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^m \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\Theta_V"'] & W \arrow[d, "\Theta_W"] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "\Theta(A)"'] & \mathbb{C}^m \end{tikzcd}$$

線形写像 $V \xrightarrow{A} W$ に対して、表現行列 $\mathbb{C}^n \xrightarrow{\Theta(A)} \mathbb{C}^m$ が $\Theta(A) = \Theta_W \cdot A \cdot \Theta_V^{-1}$ で定まる。

ある基底による数ベクトル表示
行列表示

$$\mathrm{Vct}_{\mathbb{C}}: \quad V \xrightarrow{A} W \qquad \overset{\Theta}{\underset{\Theta'}{\rightrightarrows}} \;\downarrow T \quad \mathbb{C} \qquad \mathrm{Vct}_{\mathbb{C}}: \begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[r, "\Theta(A)"] \arrow[d, "T_V"'] & \mathbb{C}^m \arrow[d, "T_W"] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "\Theta'(A)"'] & \mathbb{C}^n \end{tikzcd}$$

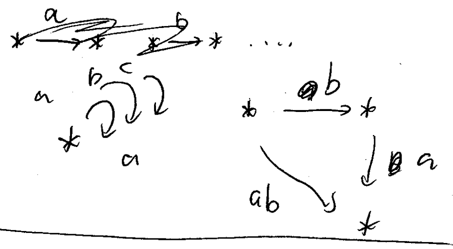
基底変換

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C}^n \arrow[dd, "T_V"] \\ V \arrow[ur, "\Theta_V"] \arrow[dr, "\Theta'_V"'] & \\ & \mathbb{C}^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathbb{C}^m \arrow[dd, "T_W"] \\ W \arrow[ur, "\Theta_W"] \arrow[dr, "\Theta'_W"'] & \\ & \mathbb{C}^m \end{tikzcd}$$

6

Example 3 自然変換のもう一つの例

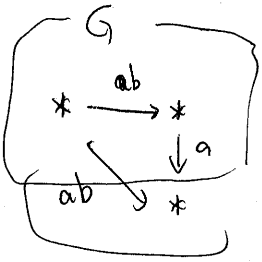
群Gを一つの圏とみなす. $\begin{cases} \text{対象：一つ } * \\ \text{射：群の元 } a, b, c, \dots \\ \text{合成：群の積演算} \end{cases}$



群Gの表現 (ρ, V)　V: vector sp

$\rho : G \to GL(V)$

別の表現 (ρ', V')　$\rho' : G \to GL(V')$



$\rho \rightsquigarrow$　$\bullet \downarrow T$　$\rightsquigarrow \rho'$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\rho(b)"] \arrow[d, "T"] \arrow[rd, bend left, "\rho(ab)=\rho(a)\cdot\rho(b)"] & V \arrow[d, "\rho(a)"] \arrow[dd, bend left, "T"] \\
 & V \\
V' \arrow[r, "\rho'(b)"] \arrow[rd, bend right, "\rho'(ab)=\rho'(a)\rho'(b)"'] & V' \arrow[d, "\rho'(a)"] \\
 & V'
\end{tikzcd}$$

Example 2

~~体環~~
~~Field~~
体の圏 ~~Field~~

$K \xrightarrow{f} K'$

$\overset{GL}{\rightsquigarrow}$　$\bullet \downarrow \det$　$\rightsquigarrow$

群の圏 Grp
(群 f)

$$\begin{tikzcd}
GL_n(K) \arrow[r] \arrow[d, "\det_K"'] & GL_n(K') \arrow[d, "\det_{K'}"] \\
K^\times \arrow[r, "f"'] & (K')^\times
\end{tikzcd}$$

このような T は
表現 ρ から ρ' への繋絡作用素と呼ばれる.
(intertwining operator
intertwiner

No. 7

Def モノとエピ

($a \rightarrowtail^{m} b$) $a \xrightarrow{m} b$ がモノ (monic) :⟺ (任意の x, k_1, k_2 $x \overset{k_1}{\underset{k_2}{\rightrightarrows}} a \xrightarrow{m} b$ で $m \cdot k_1 = m \cdot k_2$ ならば $k_1 = k_2$ (left cancelable))

($a \twoheadrightarrow b$) $a \xrightarrow{e} b$ がエピ (epic) :⟺ (任意の z, ~~...~~ k_1, k_2 $a \xrightarrow{e} b \overset{k_1}{\underset{k_2}{\rightrightarrows}} z$ $k_1 e = k_2 e$ ならば $k_1 = k_2$ (right cancelable))

圏の内部に見える構造

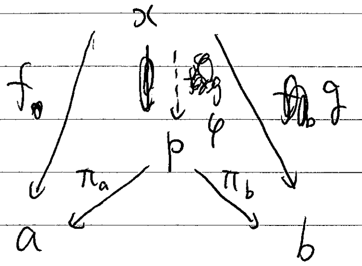
(**Set** においては
モノは単射, エピは全射と一致する.
また, モノかつエピなる ~~同型~~ 圏の意味で同型射である)

Def 直積 (direct product)

圏 $\mathcal{C}$ の対象 a, b について,

対象 p と射 $p \xrightarrow{\pi_a} a$, $p \xrightarrow{\pi_b} b$ があって,

任意の対象 x と任意の射 $x \xrightarrow{f} a$, $x \xrightarrow{g} b$ に対して,



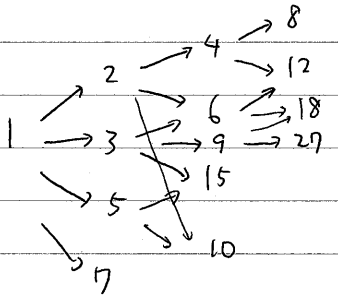
が可換図式になるような射 $x \xrightarrow{\varphi} p$ が一意的に存在する.

となっていれば この p を a と b の直積といい,

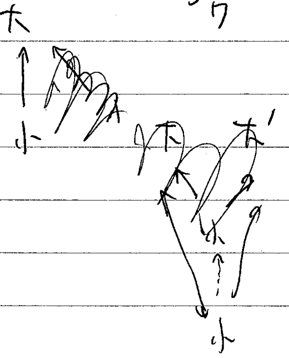
$p = a \times b$

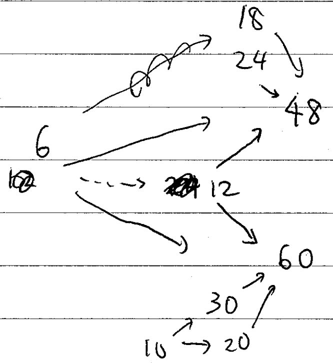
$\varphi = f \times g$ と書く.

Set, ~~...~~, $P(X)$ それぞれ直積は?



$a \to b$ (a は b を割り切る.
b は a の倍で割り切れる)



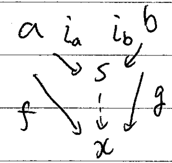


共通上流の中で
最も下流の分岐点

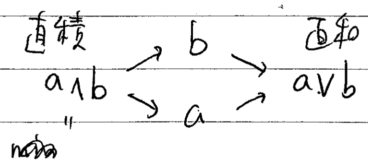
最も直前の分岐点

最も直後の合流点

Def 直和 (direct sum)



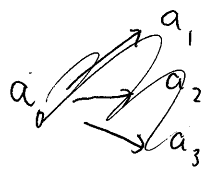
Pos $a \leq b$ のことを $a \to b$ で定めると,

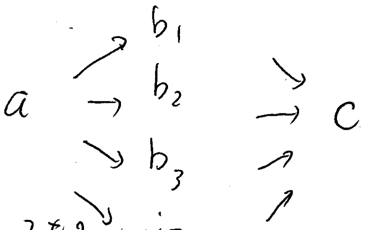


a

8] **Def** 始対象(initial object) :⟺ ~~すべての~~ 任意の対象に向かう射が必ず唯一存在する.

終対象(terminal object) :⟺ から ~~来る~~ やってくる射が 〃





a が initial

c が terminal

注 始対象はあるとは限らない. あっても1つとは限らない; しかし複数個あれば必ず同型

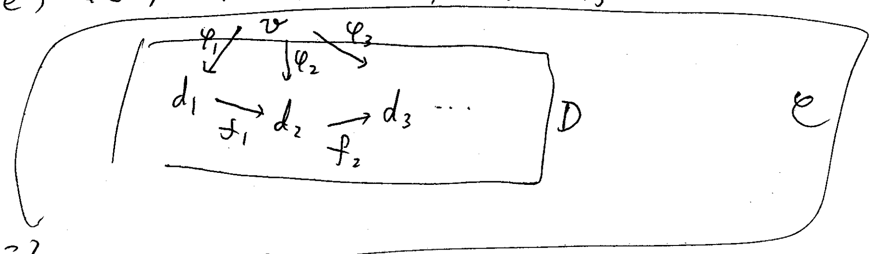
Def 錐と余錐(cone, cocone) Set, Grp, Vect の始と終を考えよ。

図式 D があるとき

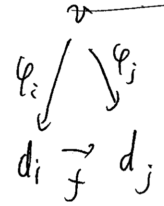
対象 v があって

D の対象 d_i ごとに

射 $v \xrightarrow{\varphi_i} d_i$ があって



D 内の射 $d_i \xrightarrow{f} d_j$ に対して

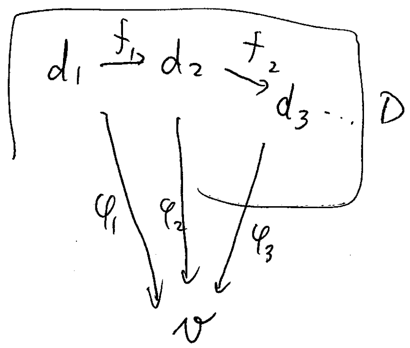


が可換つまり $f \cdot \varphi_i = \varphi_j$ となる.

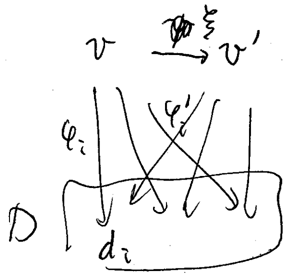
このとき $(v, \varphi_1, \varphi_2 \cdots)$ を D 上の cone という.

v を cone の頂点という. vertex

矢の向きを返せば D の下の cocone



Def cone から cone への arrow



各 D の object d_i

$\xi \cdot \varphi_i' = \varphi_i$

を満たすような $v \xrightarrow{\xi} v'$.

D の

Cone(D) という圏 { 対象 D上の cone, 射 cone arrow

同様に Cocone(D)

Def 極限と余極限 (limit, colimit)

図式 D 上対して ~~Cone~~ (

極限または射影的極限 (projective limit) $\varprojlim D$:= Cone(D) の terminal object, lim.

余極限 帰納的極限 (inductive limit) $\varinjlim D$:= Cocone(D) の initial object.

Pos

倍数の圏

Def 普遍射 (universal arrow)

関手 $F: \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ と $\mathcal{D}$ の対象 a が与えられたとき, $\mathcal{C}$ の対象 r と $\mathcal{D}$ の射 $a \xrightarrow{u} Fr$ があって 任意の $\mathcal{C}$ の対象 s と $\mathcal{D}$ の任意の射 $a \xrightarrow{f} Fs$ に対して $(F\psi_f)u = f$ なる射 $\psi_f : r \to s$ が一意的に存在する.

$a \xrightarrow{u} F$

$$\mathcal{C}: \begin{tikzcd} r \arrow[d, "\psi_f"'] \\ s \end{tikzcd} \overset{F}{\rightsquigarrow} \mathcal{D}: \begin{tikzcd} a \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & Fr \arrow[d, dashed, "F\psi_f"] \\ & Fs \end{tikzcd}$$

となっていれば r を $\mathcal{C} \overset{F}{\rightsquigarrow} \mathcal{D}$ における a の代理対象 (representative) といい,

$a \xrightarrow{u} Fr$ を a から F への普遍射 (universal arrow) という.

$$\mathcal{C}: \begin{tikzcd} r \arrow[r, dashed, "\psi_f"'] & s \end{tikzcd} \qquad \mathcal{D}: \begin{tikzcd} a \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Fr \arrow[r, dashed, "F\psi_f"'] & Fs \end{tikzcd}$$

$\mathcal{C}$: 社長 → 部長 → 課長 → 係長 → ヒラ $\overset{F}{\rightsquigarrow}$ $\mathcal{D}$: 塩谷 / 吉田 → 細谷 → 筒井 → 谷村 → 三嶋

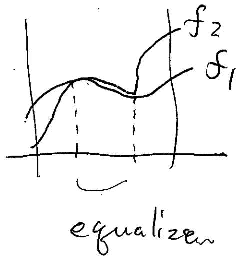
神々の圏: ゼウス → アテナ → ヘルメス → ポセイドン (アポロン) $\overset{F}{\rightsquigarrow}$ 人々の圏: 谷村 / 吉田 → 細谷 → …

神々の生まれかわり
現人神化関手

同様に $F \xrightarrow{v} a$ も定まる. F から a への universal arrow v

$$\mathcal{C}: \begin{tikzcd} s \arrow[r, dashed, "\psi_g"] & r \end{tikzcd} \rightsquigarrow \mathcal{D}: \begin{tikzcd} Fs \arrow[r, dashed, "F\psi_g"] \arrow[dr, "g"'] & Fr \arrow[d, "v"] \\ & a \end{tikzcd}$$

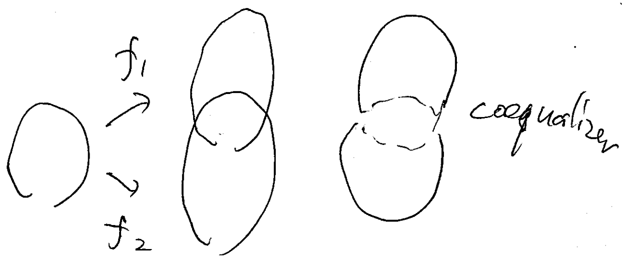
10 9ページより先にこちらをやるべき.



Def equalizer と coequalizer

図式 $a \overset{f_1}{\underset{f_2}{\rightrightarrows}} b$ の limit を equalizer

colimit を coequalizer という.



Def pullback と pushforward

図式
$$\begin{tikzcd}
\circ \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[dd, bend right] & & \\
& \bullet \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\
& a \arrow[r] & c
\end{tikzcd}$$
の limit を pullback

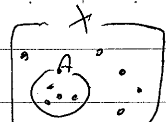
$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & b \arrow[d] \\
a \arrow[r] & c
\end{tikzcd}$$
と書く.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \arrow[dr, bend left] & \\
a \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & \bullet \arrow[dr, dashed] & \\
& & \circ
\end{tikzcd}$$
の colimit を push forward

トポスへの第一歩：Subobject と subobject classifier

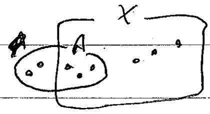
集合論に戻って考える。

Aが X の部分集合である $A \subset X$:⟺ 任意の元 $a \in A$ が $a \in X$



このとき包含写像 $i_A : A \longrightarrow X$ は単射

$a \longmapsto i_A(a) = a$



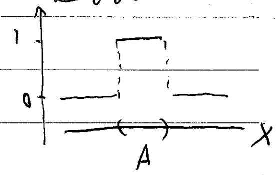
逆に、単射 $i : A \to X$ は X の部分集合を定めており、

$i(A)$ と A は集合として同型。

部分集合 $A \subset X$ があれば Aの特性関数（characteristic function）が定まる。

$$\chi_A : X \longrightarrow \{0,1\}$$

$$x \longmapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A \end{cases}$$



逆に関数 $\chi : X \longrightarrow \{0,1\}$ が与えられれば χを特性関数とする部分集合が定まる

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i_A"'] & 1 \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\chi_A"'] & \Omega = \{0,1\} \end{tikzcd}$$

さて、真理値

Def 真偽値と部分集合の一般化。

圏Cは terminal object 1 を持つとする。

Cの対象Ωが subobject classifier あるいは truth-value object であるとは、

i) monic $\top : 1 \rightarrowtail \Omega$ があり、

任意の monic $m : A \rightarrowtail X$ に対して

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "!"] \arrow[d, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ X \arrow[r, dashed, "\chi_m"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

が pullback になるような arrow $X \xrightarrow{\chi_m} \Omega$ が一意的に存在する。

~~このような (Ω, ⊤) を C の subobject classifier という。~~

ii) かつ 任意の射 $X \xrightarrow{u} \Omega$ に対して、

$$\begin{tikzcd} \mathrm{dom}\,\bar{u} \arrow[r, "!"] \arrow[d, "\bar{u}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ X \arrow[r, "u"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

となる monic $\bar{u}$ が存在する。

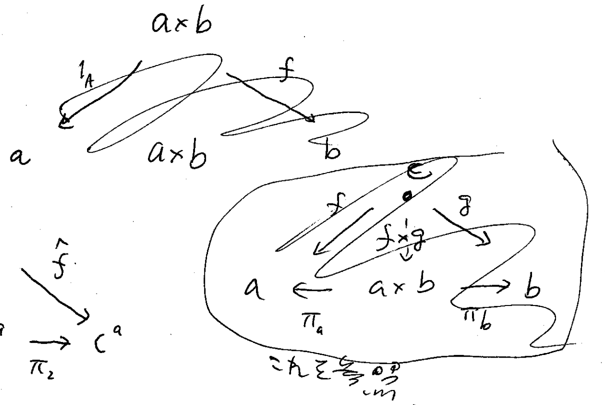
このような (Ω, ⊤)

$\boxed{12}$

第2歩

Def exponentiation

圏Cは任意の対象の積を持つとする。
対象 a, b, c と射 $f: a\times b \to c$ に対して



$$\begin{tikzcd} a\times b \arrow[d, "1_a\times\hat{f}"'] \arrow[dr, "f"] & \\ a\times c^a \arrow[r, "ev_{a,c}"'] & c \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & a\times b \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_1\times\hat{f}"] \arrow[dr, "\hat{f}"] & \\ a & a\times c^a \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & c^a \end{tikzcd}$$

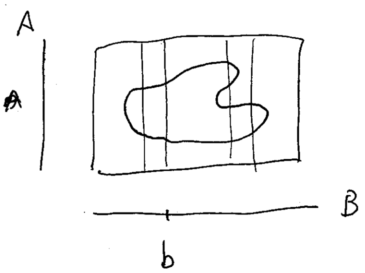
$$\frac{a\times b \xrightarrow{f} c}{b \xrightarrow{\hat{f}} c^a}$$

$$\frac{(x\text{は3で割り切れる})\text{かつ}(x\text{は4で割り切れる}) \Rightarrow (x\text{は12で割り切れる})}{(x\text{は4で割り切れる}) \Rightarrow \big((x\text{は3で割り切れる}) \to (x\text{は12で割り切れる})\big)}$$

$$\frac{a\wedge b \Rightarrow c}{b \Rightarrow (a\to c)}$$

c^a を expontiation, ev を evaluation arrow という。

集合論に戻って　直積集合 $A\times B$ の部分集合は、



$\chi: A\times B \to \{0,1\}$
$B \to (A\to\{0,1\})$
$b \mapsto \chi(-,b)$

$b\in B$ ごとに A の部分集合を定めることと同等.

$\chi: B \to \boxed{2^A}$

A の部分集合全体
のようなものがあるとよい

Def powerobject

$$\begin{tikzcd} a\times b \arrow[d, dashed, "1_a\times\hat{f}"'] \arrow[dr, "f"] & \\ a\times P\cancel{B}^a \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A\times B \arrow[d, "1_A\times\hat{f}"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A\times PA \arrow[r, "e_A"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

$A\times B$

Def topos

圏であり、任意の有限個の対象のproduct があり、
subobject classifier があり
power objects がある。

(0個の対象の積は terminal object)