〔一〕 教育工学に関する研究

高須照夫　三橋一夫　岡　謙二
加藤佳孝　冨田　昇　柳田嘉久
鈴木　孝　矢木　修

I 電算機を利用することのできる数学の教材をさがす

高須照夫

学校における電算械利用の目的を大きくわけると3つの場合が考えられる。その1つは，入試，考査その他の統計的処理の能率化，第2は電算機そのものの扱い方の指導，第3は教材に関連した補助的な計算であろう。ここでは第3の場合についての思いつきを少し書いてみようと思う。

中学，高校の数学の教材の中で，電算機を活用し得る部分の代表的なものは，統計における各種数値の算出，微分法の応用における，方程式の解の近似値を求めるニュートンの方法，積分法の応用としての面積，体積を求めるための台形公式やシンプソンの公式などである。これらのプログラムは各種テキストに多くのっているので，ここではとりあげない。そのほかにも，2次方程式の解を出すことや，各種数列の一般項や和を求めることなども考えられるが，これらはは数値を具体例について求めることよりも，式の変形により公式を求めることに意味があり，これらに関するプログラムはむしろ第2の目的すなわち電算機の扱い方の指導に適したものであると考えられる。ここでは上記以外の教材で，特に電算機が教材を理解させるのに有効に働くと考えられる2，3のものをとりあげることにする.

1. 円に内接，外接する正多角形の周から円周率を計算すること。

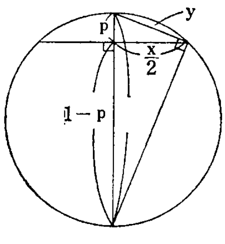
小学校では円の周の直径に対する比の値を，丸いものを紙の上にころがす実験により理解させる。中学校では直径1の円に内，外接する正n角形の周をいくつかのnについて表示することにより円周率の意味とその近似値を理解させる。ここではその表を作成するための段階をふんでみることにする。

直径が1の円に内接する正n角形の一辺の長さをxとすると，正$2n$角形の一辺の長さは

$$y=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}$$

である。これは中学生にはむづかしいが，つぎのように説明できる。

右の図で



$$\left(\frac{x}{2}\right)^2=p(1-p) \quad \cdots\cdots (1)$$

$$y^2=p\cdot 1 \quad \cdots\cdots (2)$$

(2) を (1) に代入して

$$\frac{x^2}{4}=y^2(1-y^2)$$

$$4y^4-4y^2+x^2=0 \quad \cdots (3)$$

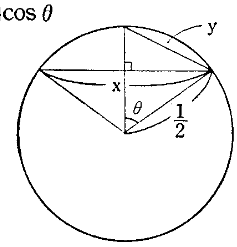
$$y^2=\frac{2-\sqrt{4-4x^2}}{4}=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2} \quad \left(y^2<\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad y=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}$$

または，三角関数を用いれば右の図から

$$x=2\times\frac{1}{2}\sin\theta=\sin\theta \quad \cdots\cdots (4)$$

$$y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\cos\theta$$



これより

$$\cos\theta=1-2y^2 \quad \cdots\cdots (5)$$

(4) と (5) より

$$x^2+(1-2y^2)^2=1$$

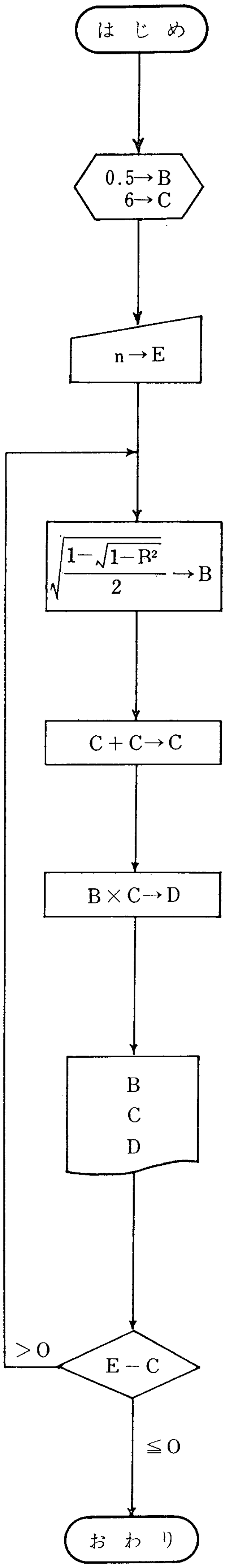
これより (3) の式がでる。

このことを用いて次のようなフローチャートができる。

右側のプログラムならびにそれに続く数量は Olivetti P 602 によるものである。

（nが3万をこえると誤差がつもって真の値を通りこしてしまうので，これ以上算出してみても無意味である。）

（また，これは正六角形から出発した例である。）




```
A ↑
R −
d S
B ↑
A ↑
d ×
C ↑
  S
E ↑
／W
B ↓
B ×
A ↑
d ↓
  ↕
  −
A √
A ↑
d ↓
  ↕
  −
A ↑
d ↑
  ÷
A √
B ↕
C ↓
C +
C ↕
B ↓
C ×
D ↕
B ◇
C ◇
D ◇
r ◇
E ↓
C −
A S
  W
  V
```

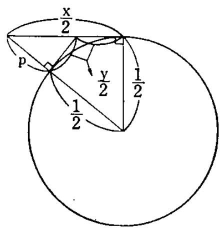
```
               100000   S
     0.25881904510251   B◇
    12.00000000000000   C◇
     3.10582854123012   D◇

     0.13052619222002   B◇
    24.00000000000000   C◇
     3.13262861328048   D◇

     0.06540312923010   B◇
    48.00000000000000   C◇
     3.13935020304480   D◇

     0.03271908282165   B◇
    96.00000000000000   C◇
     3.14103195087840   D◇

     0.01636173162626   B◇
   192.00000000000000   C◇
     3.14145247224192   D◇

     0.00818113960338   B◇
   384.00000000000000   C◇
     3.14155760769792   D◇

     0.00409060402507   B◇
   768.00000000000000   C◇
     3.14158389125376   D◇

     0.00204530629002   B◇
  1536.00000000000000   C◇
     3.14159046147072   D◇

     0.00102265368038   B◇
  3072.00000000000000   C◇
     3.14159210612736   D◇

     0.00051132690130   B◇
  6144.00000000000000   C◇
     3.14159248158720   D◇

     0.00025566345065   B◇
 12288.00000000000000   C◇
     3.14159248158720   D◇

     0.00012783172532   C◇
 24576.00000000000000   C◇
     3.14159248146432   D◇
```

つぎに直径1の円に外接する正 n 角形の一辺の長さを x とすると，正 $2n$ 角形の一辺の長さは

$$y=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$$

である．

これは右の図から



$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(p+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{4}=p^2+p\cdots\cdots(1)$$

$$p^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)^2$$

$$\therefore\quad p^2=\frac{x^2}{4}-\frac{xy}{2}\ \cdots\cdots\ (2)$$

(1), (2) より $p=\dfrac{xy}{2}$

(1) へ代入して

$$\frac{x^2}{4}=\frac{x^2y^2}{4}+\frac{xy}{2}$$

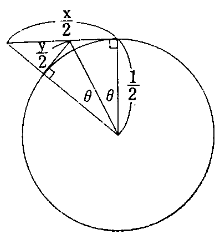
これより

$$xy^2+2y-x=0\ \cdots\cdots\ (3)$$

$$\therefore\quad y=\frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x}$$

として求まる。

または右の図より，



$$x=2\cdot\frac{1}{2}\tan 2\theta$$

$$=\tan 2\theta$$

$$y=2\cdot\frac{1}{2}\tan\theta$$

$$=\tan\theta$$

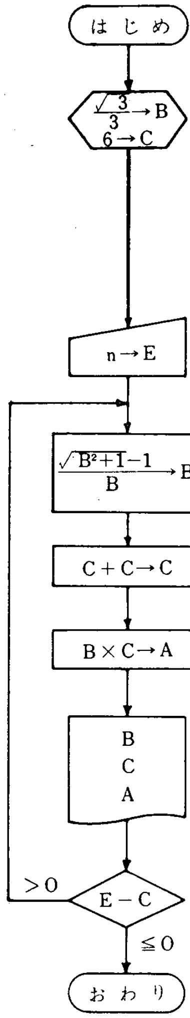
より

$$x=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2y}{1-y^2}$$

これから　$x(1-y^2)=2y$

として (3) の式をみちびくこともできる。

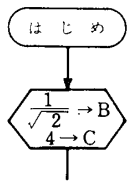
これをもとにして次に示すようなフローチャートとプログラムを作ってみた。



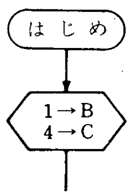

```
A ↑
d ↕
B ↑
  √
B ÷
B ↕
A ↑
d ×
C ↑
  S
E ↑
／W
B ↓
B ×
A ↑
d ↓
  +
A √
  −
B ÷
B ↕
C ↓
C +
C ↕
B ↓
C ×
B ◇
C ◇
A ◇
r ◇
E ↓
C −
A S
  W
  V
```

〈註〉

こちらも正6角形から出発したが、正方形から出発するときはそれぞれつぎのようにすればよい。




```
A ↑
d ↑
B ↑
  √
B ÷
B ↕
A ↑
d +
C ↑
```




```
A ↑
d ↓
B ↑
A ↑
d +
C ↑
```

```
            100000    S
  0.26794919243110   B◇
 12.000000000000000  C◇
  3.21539030917320   A◇

  0.13165249758735   B◇
 24.000000000000000  C◇
  3.15965994209640   A◇

  0.06554346281516   B◇
 48.000000000000000  C◇
  3.14608621512768   A◇

  0.03273661041286   B◇
 96.000000000000000  C◇
  3.14271459963456   A◇

  0.01636392213500   B◇
192.000000000000000  C◇
  3.14187304992000   A◇

  0.00818141340355   B◇
384.000000000000000  C◇
  3.14166274696320   A◇

  0.00409063824906   B◇
768.000000000000000  C◇
  3.14161017527808   A◇

  0.00204531056539   B◇
1536.000000000000000 C◇
  3.14159702843904   A◇

  0.00102265420977   B◇
3072.000000000000000 C◇
  3.14159373241344   A◇

  0.00051132696174   B◇
6144.000000000000000 C◇
  3.14159285293056   A◇

  0.00025566345955   B◇
12288.000000000000000 C◇
  3.14159259095040   A◇
```

2. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ の値を計算し $n\to\infty$ のとき一定の値に近づくことを示す.

対数関数，指数関数の導関数を求めるとき，どちらから入るにしても上の数列の極限を求めることが必要になる。

対数関数の場合ならば

$$\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

ここで $\dfrac{x}{h}=n$ とおくと

$$\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

で $h\to0$ のとき $n\to\infty$ である。

指数関数の場合ならば,

$$\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\frac{a^x(a^h-1)}{h}$$

ここで $h\to0$ のとき $\dfrac{a^h-1}{h}\to1$ となるような a すなわち

$h\to0$ のとき　　$(1+h)^{\frac{1}{h}}\to a$

となるような a の値を求める必要が生ずるわけで

$\dfrac{1}{h}=n$ とおけば

$$\left(1+h\right)^{\frac{1}{h}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

となり $h\to0$ のとき $n\to\infty$ である.

理論的には x が実数で

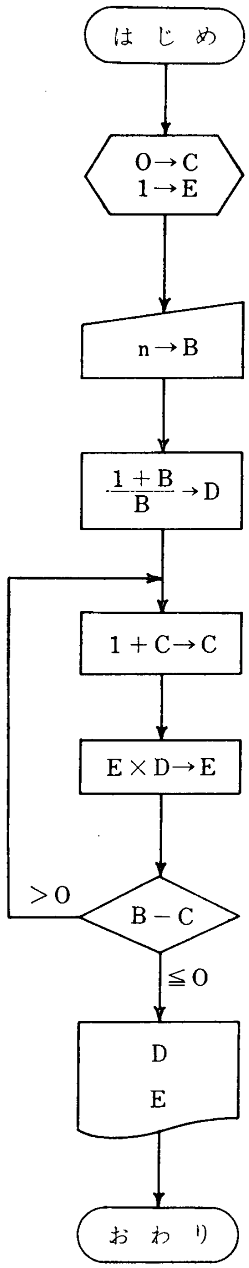
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

とするところであるが，実験的には不可能である。いずれにしても自然数 n に対して

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

が1でも ∞ でもないある値に近づくことを体験的に知っておく必要があろう。e そのものの近似値を別の方法でより精度を高く求めることもできるわけであるが，ここでは上のような主旨であるので $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ を多くの n の値について計算してみることにする.

まずつぎのようなフローチャートとプログラムからやってみた。



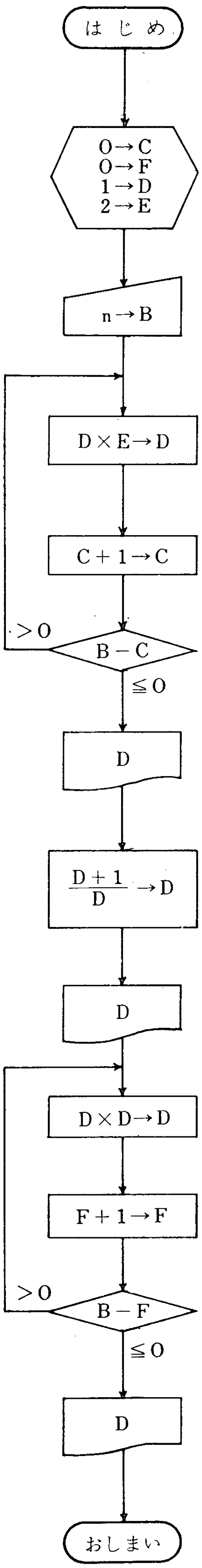

```
C ×
A ↑
d ↓
E ↑
  S
B ↑
B ↓
E ＋
B ÷
D ↕
／W
C ↓
A ↑
d ↓
  ＋
C ↕
E ↓
D ×
E ↕
B ↓
C －
A S
  W
D ◇
E ◇
r ◇
  V
```

```
      1      S
2.00000     D◇
2.00000     E◇

      2      S
1.50000     D◇
2.25000     E◇

      3      S
1.33333     D◇
2.37037     E◇

      4      S
1.25000     D◇
2.44140     E◇

      5      S
1.20000     D◇
2.48832     E◇

     10      S
1.10000     D◇
2.59374     E◇

     20      S
1.05000     D◇
2.65329     E◇

     30      S
1.03333     D◇
2.67431     E◇

     40      S
1.02500     D◇
2.68506     E◇

     50      S
1.02000     D◇
2.69158     E◇

    100      S
1.01000     D◇
2.70481     E◇

   1000      S
1.00100     D◇
2.71692     E◇
```

しかし，この方法でやると $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ を1回ずつ掛けているので，非常に多くの時間がかかる。Olivetti P602 でやると $n=30$ で約20秒，$n=100$ で約1分，$n=1000$ とすると約10分を要し2.71までしかでてこない。（HITAC 10でやると $n=1000$ を入れると殆んど即時にタイプしてくれるが，こちらはそれ以前の操作に手数と時間を要し，機械を教室にもちこめない不便さがある。）そこでつぎのような工夫をしてみた。それは $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ を2乗したものをさらに2乗，またそれを2乗……して行くわけである。すなわち

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N \qquad N=2^n$$

の形の計算をさせるわけである。そのフローチャートとプログラムは次の通りである。




```
C ⋇
F ⋇
A ↑
d ↓
D ↑
  ↓
  +
E ↕
  S
B ↑
／W
D ↓
E ×
D ↕
C ↓
A ↑
d ↓
  +
C ↕
B ↓
C −
A S
  W
D ◇
D ↓
A ↑
d ↓
  +
D ÷
D ↕
D ◇
／Y
D ↓
D ×
D ↕
F ↓
A ↑
d ↓
  +
F ↕
B ↓
F −
A S
  Y
D ◇
  V
```

```
              1     S
   2.0000000000    D◇
   1.5000000000    D◇
   2.2500000000    D◇

              2     S
   4.0000000000    D◇
   1.2500000000    D◇
   2.4414062500    D◇

              3     S
   8.0000000000    D◇
   1.1250000000    D◇
   2.5657845139    D◇

              4     S
  16.0000000000    D◇
   1.0625000000    D◇
   2.6379284973    D◇

              5     S
  32.0000000000    D◇
   1.0312500000    D◇
   2.6769901293    D◇

              6     S
  64.0000000000    D◇
   1.0156250000    D◇
   2.6973449525    D◇

              7     S
 128.0000000000    D◇
   1.0078125000    D◇
   2.7077390196    D◇

              8     S
 256.0000000000    D◇
   1.0039062500    D◇
   2.7129916242    D◇

              9     S
 512.0000000000    D◇
   1.0019531250    D◇
   2.7156320001    D◇
```

```
              10       S
1024.0000000000      D◇
   1.0009765625      D◇
   2.7169557294      D◇

              11       S
2048.0000000000      D◇
   1.0004882812      D◇
   2.7176184822      D◇

              12       S
4096.0000000000      D◇
   1.0002441406      D◇
   2.7179500811      D◇

              13       S
8192.0000000000      D◇
   1.0001220703      D◇
   2.7181159362      D◇

              14       S
16384.0000000000     D◇
    1.0000610351     D◇
    2.7181988776     D◇

              15       S
32768.0000000000     D◇
    1.0000305175     D◇
    2.7182403511     D◇

              16       S
65536.0000000000     D◇
    1.0000152587     D◇
    2.7182610889     D◇

              17       S
131072.0000000000    D◇
     1.0000076293    D◇
     2.7182714565    D◇

              18       S
262144.0000000000    D◇
     1.0000038146    D◇
     2.7182766368    D◇

              19       S
524288.0000000000    D◇
     1.0000019073    D◇
     2.7182792234    D◇

              20       S
1048576.0000000000   D◇
      1.0000009536   D◇
      2.7182804921   D◇

              21       S
2097152.0000000000   D◇
      1.0000004768   D◇
      2.7182810906   D◇

              22       S
4194304.0000000000   D◇
      1.0000002384   D◇
      2.7182813185   D◇

              23       S
8388608.0000000000   D◇
      1.0000001192   D◇
      2.7182813185   D◇
```

こちらの方法でやると，所要時間は短縮され，$n=7$，したがって $N=128$ として約10秒，$n=10$，したがって $N=1024$ としても約13秒，そして $n=20$，したがって $N=1048576$ としても約20秒ででき，e の近似値も 2,71828 まで正しく求めることができる。

3. 近似値の乗除，ならびに平方根の精度を知るための計算

いまひとつの有効な利用法として，近似値を用いて計算をした場合，でてきた数値をどこまでとればよいかを問題にするとき，これを一般的に理論づけるには中学1年生にとってはむづかしく，また実さい面ではたとえば掛け算の場合，最上位の数字が8や9のように大きいときと，1や2のように小さいときでは大分ちがう。このような事実は，わざわざ文字を用いて誤差の理論をもちだすより，具体的ないくつかの実例により学ぶことの方がかえって科学的である。その意味でのプログラムを作り，いくつかの実例をならべてみたのであるが，意外と紙面を要し，今回は書ききれないので省略し，またの機会にまわすことにする。