

論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

氏 名 JIN Haibo

論 文 題 目

Simple-minded objects in triangulated categories and
Cohen-Macaulay differential graded modules

(三角圏における単純対象の類似物と Cohen-Macaulay DG 加群)

論文審査担当者

主 査 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (理学)
石 井 亮

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (理学)
伊 山 修

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士
中 西 知 樹

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (数理科学)
中 岡 宏 行

論文審査の結果の要旨

体上の有限次元代数 A の有界導来圏の中で、単純 A 加群の集合は3つの基本的性質 (Schur の補題、負次数の Ext 群の消滅、生成性) を満たす。一般の三角圏の対象の集合で、これらの性質を満たすものを simple-minded collection (以下 SMC) と呼ぶ。これは代数の表現論における基本的な対象であり、多くの研究がなされている。

一方、負の整数 $-d$ に対して、Serre 関手が $[-d]$ で与えられる三角圏 ($-d$ -Calabi-Yau 三角圏) における SMC の類似物である d -simple-minded system (以下 d -SMS) が、Coelho-Simões, Pauksztello らによって導入され、研究されている。これは SMC の条件である、負次数の Ext 群の消滅を、 -1 から $1-d$ 次の Ext 群の消滅に弱め、代わりに生成性の条件を強めることにより定義される。

本論文では、ある種の differential graded algebra (以下 DG 代数) の特異圏 (singularity category) や、簾の圏 (cluster category) などの三角圏に対し、 d -SMS と SMC に関する新しい結果が与えられている。論文は3部構成であり、1つの部が1つの公表論文に対応している。以下 arXiv で公開された順に主論文の内容を説明する。

● 第2部の内容

表現論における古典的な対象として、CM (=Cohen-Macaulay) 加群が挙げられる。Gorenstein 環 A 上の CM 加群の全体はフロベニウス圏を成し、その安定圏は A の特異圏と同値になる。申請者は論文の第2部で、Gorenstien DG 代数 A 上の DG 加群に対して、CM 性の概念を導入して、その表現論を研究した。まず CM DG 加群の圏 $CM A$ が、中岡-Palu の意味でフロベニウス extriangulated category を成し、その安定圏が A の特異圏と同値であることを示した。次に安定圏が Serre 関手を持つことを示し、特に $CM A$ における AR (=Auslander-Reiten) 列の存在を導いた。この結果は、代数の表現論における様々な手法や問題意識を $CM A$ の研究に適用することを可能とする。

特に申請者は、Riedtmann (1979) らによる有限表現型の自己入射代数の分類論の DG 類似を第2部で展開した。DG 代数 A に対し、 A と $\text{Hom}_k(A, k)[d-1]$ が重複度を除いて疑同型となるときに d 自己入射と呼び、その場合に単純 DG 加群の全体が安定圏の d -SMS を与えることを示した。これは SMC の形式的な類似物として研究されていた d -SMS が、表現論に自然に現れることを示す重要な結果である。さらにこれを、有限表現型の d 自己入射 DG 代数の AR 簾の分類に応用した。つまり、 $CM A$ の AR 簾の満たすべき必要条件を挙げ、標準的な周期を持つ場合には十分条件でもあることを示した。証明には、以下に述べる第1部の SMC 退化に関する結果が本質的に用いられている。

● 第1部の内容

三角圏の対象の集合で、生成性以外の SMC の2条件を満たすものを pre-simple-minded collection (以下、前 SMC) と呼ぶ。申請者は第1部で、三角圏 \mathcal{T} とその前 SMC \mathcal{R} に対し、Verdier 商 $\mathcal{U} = \mathcal{T}/\text{thick } \mathcal{R}$ を SMC 退化と呼び、その性質を調べた。まず、標準的な関手 $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{U}$ によって、 \mathcal{U} が \mathcal{T} の充満部分圏

$$\{X \in \mathcal{T} \mid \forall i > 0, \text{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{R}[i], X) = 0 = \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X[i], \mathcal{R})\}$$

と同値となることを示し、応用として、 \mathcal{T} の SMC で \mathcal{R} を含むものの全体と、 \mathcal{U} の SMC が一対一に対応することを示した。これは Coelho-Simões-Pauksztello (2020) による、 d -SMS 退化に関する結果の SMC 類似である。

申請者は第2部で、特定の性質を満たす DG 代数の特異圏は $-d$ -Calabi-Yau であり、さらに有界導来圏の SMC が特異圏の d -SMS を与えることを示している。第1部

論文審査の結果の要旨

ではこの事実を、三角圏 \mathcal{T} とその thick 部分圏 \mathcal{T}_p が特定の条件を満たすときに、特異圏 $\mathcal{T}_{sg} := \mathcal{T}/\mathcal{T}_p$ が $-d$ -Calabi-Yau となり、さらに \mathcal{T} の SMC が \mathcal{T}_{sg} の d -SMS を与える、という形に拡張した。さらに、申請者の SMC 退化が、Coelho-Simões-Pauksztello の d -SMS 退化と、特異圏をとる操作を介して一致することを示した。

- 第3部の内容（伊山との共同研究）

簇 Q の道代数 kQ の導来圏から、特定の自己同値によって軌道圏を取ることで、 $-d$ 団圏と呼ばれる $-d$ -Calabi-Yau 三角圏が定義される。申請者は Dynkin 簇 Q に対して、 kQ の導来圏から $-d$ 団圏への標準的な関手により、導来圏の基本領域に含まれる SMC と、 $-d$ 団圏の d -SMS が一対一に対応することを示した。さらに SMC と準傾対象の間の一対一対応を精密化し、Buan-Reiten-Thomas と Zhu の先行結果を応用することにより、 d -SMS と Fomin-Reading (2005) の一般団複体の最大単体のうち正であるものが一対一に対応することを示した。この結果の応用として、 d -SMS の総数が正 Fuss-Catalan 数で与えられることが従う。

以上の諸結果には、DG 代数の表現論の研究において新しい知見を与えるものであり、学位論文として十分な内容を持つものである。学位審査公開セミナーも、Jin 氏の結果が非専門家にもよく伝わるように工夫されたものであり、質問に対する応答も概ね的確なものであった。以上により本学位審査委員会は、申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する。