

論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

氏 名 井上 秀樹

論 文 題 目

Scattering theory for half-line Schrödinger operators: analytic and topological results

(半直線上のシュレーディンガー作用素の散乱理論: その解析と位相不変量に関する諸結果)

論文審査担当者

主 査 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (理学)
杉 本 充

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 特任教授 Ph.D.
Serge Richard

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 Ph.D.
森 吉 仁 志

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学)
寺 澤 祐 高

論文審査の結果の要旨

量子力学的な散乱理論は1960年代以降に純粋に解析的な理論として発展を遂げてきたが、過去50年において革新的な出来事といえるものは、1980年頃の Mourre 理論の導入や、その数年後の多体問題における漸近完全性の証明など、ごく僅かにとどまっていた。また、多様体やグラフ上における散乱理論の構築など幾何的な対象との関連も取りざたされてはいたが、それらはいくまでも解析的な取り扱いの範疇を超えるものではなかった。しかしながら2000年代後半には、散乱理論は C^* -algebras との関わりという新しい展開を見せ始めており、この潮流は特にここ10年においてより顕著となってきている。これは、束縛状態の個数は散乱状態から定まる量を用いて表現されることを主張する古典的な Levinson の定理を、K-理論から導かれる指数定理により理解する（これを以下では位相的な Levinson の定理という）S. Richard 氏による独創的アプローチをその端緒としており、この考え方が適用できるモデルの対象を拡げつつ現在も精力的に研究が進められている。

井上氏の研究は、まさにこのような散乱理論と作用素環論との接点に位置するものである。井上氏の研究の背後にある主たる思想は、散乱理論における主要な対象である波動作用素は部分等長作用素であり、その事実から指数定理を導くことができるという考え方であり、言い換えれば、波動作用素をよく理解することが作用素環論（より一般には非可換幾何学）を散乱理論において用いる際の根幹をなすという信念に他ならない。

直観的には多くのモデルに対してこのような取り扱いが可能であるはずであると考えられているが、多くの臨界的な状況においては技術的困難がそれを阻んでおり、実際にそれが証明された例はまだまだ少ないのが実情である。井上氏の学位論文では、そのような状況の典型例として、逆2乗型周辺のポテンシャル $v(x)$ を有する半直線上のシュレディンガー作用素

$$-\frac{d^2}{dx^2} + v(x)$$

に対して位相的な Levinson の定理が論じられており、散乱理論において必要となる基本的概念の説明と K-理論の導入に引き続き、以下の3つの主要な研究成果が収められている：

井上氏の第1の成果は、ポテンシャル $v(x)$ ($x \geq 0$) が遠方で $-(2 + \epsilon)$ ($\epsilon > 0$) 次の減衰度を持つディリクレ境界値の場合についてである。この減衰度の仮定は、束縛状態の個数の有限性を保証するために最低限必要なものとして知られており、これより遅い減衰の場合には位相的な Levinson の定理という文脈に適合しないという意味で最弱のものである。井上氏はこの設定の下で、対応する波動作用素を厳密に書き下す公式を与えることに成功しており、それを用いて波動作用素に対する精密な評価式を導き、さらには位相的な Levinson の定理を始めて導出している。

井上氏の第2の成果は、複素数 m と原点での境界条件をパラメータとして定まるシュレディンガー作用素

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \left(m^2 - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{x^2}, \quad x > 0$$

に対するものであり、これは第1の成果におけるポテンシャルの仮定の極限的な状況に相当している。このモデルは、高次元の自由シュレディンガー作用素を球面調和分解したものに由来しており、井上氏自身によるものも含めていくつかの先行研究が知られているが、いくつかの例外的なパラメータの場合には、そのいずれにおいても考察されてはなかった。このような例外的な状況においては波動作用素は部分等長作

論文審査の結果の要旨

用素ではなく、さらには有界作用素ですらない場合もあり、スペクトルの特異性も現れてくるなどその解析は概して困難である。井上氏は、このような例外的な状況に対しても完全なる解答を提示しており、ある場合には位相的な Levinson の定理を確立し、それ以外の場合にはそのような主張は成立し得ないことを明らかにしている。

井上氏の第3の成果は、第1の成果における問題を、その近似としての離散的なモデルに置き換えて考察したものである。ここでもやはり、波動作用素を厳密に書き下す公式を与え、それをを用いることにより位相的な Levinson の定理を導出している。これまで散乱理論と指数定理との関係を論じたものはすべて連続的な設定においてであり、離散的な設定でのこの種の研究成果は井上氏によるものが最初である。

以上のように、井上氏の学位論文は量子力学的散乱理論における新しい知見を与えたものであり、学位論文として十分な内容を持つものである。またその内容は、既に3編の出版論文として公表されている。さらに、散乱理論およびK-理論の基本的概念の説明と両者の関連を説明した部分(第1章)は、それ自身がこの分野への優れた解説となっており、その意味でも意義のある学位論文であるといえよう。2020年8月24日に開催された学位審査セミナーも、井上氏の問題意識とその解決への基本的アプローチおよび主結果の意義などが非専門家にもよく伝わるように工夫されたものであり、井上氏の持つ函数解析、数理物理、指数定理、非可換幾何学に関する深い学識が窺えるものであった。

以上により、本学位審査委員会は、申請者には博士(数理学)の学位が授与される資格があるものと判断する。