別紙４

報告番号	※　　　　　第　　　　　号

主　論　文　の　要　旨

論 文 題 目　Categorical Properties and Classifications of Several Subcategories of Module Categories

（加群圏の種々の部分圏の圏論的性質と分類について）

氏　　　名　榎本　悠久

論　文　内　容　の　要　旨

多元環の表現論は、与えられた体上有限次元多元環Λに対して、有限生成Λ加群のなす圏 modΛを調べることを主な目標とする。環の表現論の重要なテーマの一つに、加群圏 modΛそのものだけでなく、modΛの特定の条件を満たす部分圏に注目するものがある。例えばねじれ自由類という加群圏の部分圏（＝拡大と部分加群を取る操作で閉じた部分圏）は、古くから基本的な対象かつ、近年は団代数など他分野との深い関わりも発見され、注目されている。

ねじれ自由類など表現論的に重要な部分圏は拡大を取る操作で閉じ、よって Quillen が導入した完全圏という付加構造を持つ。ここで完全圏とは、どれを「短完全列」と呼ぶかが指定された加法圏のことである。本論文はこれに着目し、大きく分けて次の 2 つのテーマを研究したものである。

- 与えられた加群圏の部分圏の、完全圏不変量の理論と計算（2, 3, 4 章）
- 完全圏としての立場から、新たな加群圏のクラスの部分圏の分類（5, 6 章）

以下、個別の章の内容について概説する。

第 1 章では、本論文の背景や完全圏についての概説を与える。

第 2 章の目的は、与えられた加群圏の部分圏 E について、その Grothendieck 群 $K_0(E)$の性質と、E が「直既約対象が同型を除き有限個しかない」こととの関連を調べることである。Auslander と Butler の古典的な結果により、E＝modΛの場合、直既約対象の有限性は「Grothendieck 群の関係式が AR 列と呼ばれる特別な短完全列により生成される」ことと同値なことが知られており、第 2 章ではこの結果を拡張する。具体的には、関手圏の手法を用いて、E がある自然な条件を満たせば Auslander-Butler 型定理が成り立つことが主結果である。

第 3 章の目的は、加群の組成列の一意性に関する Jordan-Hölder の定理の類似を完全圏において考察することである。学部で習うとおり modΛでは Jordan-Hölder の定理が成り立つ（以下 JH 性を満たすと呼ぶ）が、一般に modΛの部分圏においては JH 性は成立しない。そこでこの章では完全圏の

JH 性の基礎理論を構築し、完全圏不変量を用いた特徴づけを与える。完全圏においては単純加群の類似物である単純対象が定義され、それを用いて自然に組成列や JH 性といった概念が定義できる。本章では、完全圏 E の Grothendieck モノイド M(E) と呼ばれる新たな不変量を導入し、JH 性は M(E) が自由モノイドであることで特徴づけられることが示される。さらにある自然な仮定のもとでは、この条件が「E の単純対象の数が直既約射影対象の数と等しい」という数値的条件と同値なことも判明する。

第 4 章では、第 3 章において導入された単純対象や JH 性の理論に動機づけられ、Dynkin 箙の前射影的多元環Πと呼ばれる基本的なクラスの多元環について、その加群圏のねじれ自由類の単純対象や JH 性の判定を与える。前射影的多元環は、古典的な箙表現をある意味拡張したような環であり、次元ベクトルを取る操作で、対応する Dynkin 型ルート系と非常に密接に関わっている。Buan-Iyama-Reiten-Scott によりルート系の Weyl 群の元 w から modΠのねじれ自由類 F(w)が定まり、Mizuno によりこの対応は全単射なことが示されている。ここで本章では、F(w)が「w の転倒集合」という Lie 理論で基本的な正ルートの集まりをある意味で圏化していることを明らかにし、さらにこれを利用して F(w)の単純対象が「w の Bruhat 転倒」と呼ばれる自然なルート系的対象により分類されることが示される。これを利用し、F(w)の JH 性を純組合せ論的に特徴づけることに成功した。

第 5 章は、これまでの章で着目してきた「単純対象」をより掘り下げ、長さ有限アーベル圏のある広いクラスの部分圏を、単純対象を利用して分類することを目的とする。具体的には、アーベル圏 A のねじれ自由類や広大部分圏（拡大で閉じたアーベル部分圏）を含む広いクラスである左 Schur 部分圏と呼ばれる部分圏のクラスを導入し、単純対象を取る操作で A の単煉瓦（monobrick）と呼ばれる対象と一対一に対応することを明らかにする。ここで煉瓦とは自己準同型環が斜体であるような A の対象、単煉瓦とは煉瓦の集合であって煉瓦同士の射がゼロ射か単射しかないものを指す。Ringel により、単純対象を取る操作で広大部分圏が半煉瓦と呼ばれる特別な単煉瓦（煉瓦の集合であり射がゼロ射しかないもの）と対応することが知られているが、本章の対応はこれを拡張するものである。応用として、A のねじれ自由類が、共終閉という条件を満たす単煉瓦により分類されることが示される。この単煉瓦を用いて、広大部分圏とねじれ自由類という基本的なクラスの部分圏の間の既存のいくつかの結果の明瞭な別証明を、純順序集合的な容易な議論により与える。

第 6 章では、第 5 章で導入された左 Schur 部分圏（の双対）の典型例である、ICE 閉部分圏（＝像・余核・拡大で閉じた部分圏）を、重要な例である Dynkin 箙の表現圏の場合に考察することを目的とする。Dynkin 箙の表現圏の ICE 閉部分圏が、射影対象を取る操作で rigid 加群と呼ばれるクラスの加群により分類されることが示される。さらに各 Dynkin 型に対して、ICE 閉部分圏の個数を数え上げる明示的公式を与え、A 型では Schröder 数と呼ばれる組合せ論的数と一致することも示される。