

## 論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

氏 名 榎本 悠久

論 文 題 目

Categorical Properties and Classifications of Several Subcategories  
of Module Categories

(加群圏の種々の部分圏の圏論的性質と分類について)

論文審査担当者

主 査 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士  
金 銅 誠 之

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (理学)  
伊 山 修

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (数理科学)  
中 岡 宏 行

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学)  
高 橋 亮

## 論文審査の結果の要旨

本学位申請論文は多元環の表現論において重要な加群圏の種々の部分圏の研究を主テーマにしたもので、5編の副論文を基礎にしている。体上有限次元多元環を  $\Lambda$  とするとき、有限生成  $\Lambda$ -加群のなすアーベル圏  $\text{mod } \Lambda$  は多元環の表現論において重要な研究対象であるが、榎本氏は  $\text{mod } \Lambda$  だけではなく拡大で閉じた部分圏を主な研究対象にしている。そのような部分圏は Quillen によって導入された完全圏の構造を持つ。本論文の主題は、一般の完全圏の性質の研究と、 $\text{mod } \Lambda$  の拡大で閉じた部分圏の中で良い性質を持つものの分類、の2つに大まかに分けられる。

まず第1章において論文の目的と後の各章の主結果が簡潔かつ明確にまとめられており、さらに各章毎の序文においてより詳細が述べられている。

第2章では M. Auslander の予想に関する結果がまとめられている。圏  $\text{mod } \Lambda$  の Grothendieck 群を定義するとき用いられる短完全系列のなす群が Auslander-Reiten 系列と呼ばれる特別な短完全系列で生成されることと  $\text{mod } \Lambda$  が有限型（すなわち直既約対象が有限個）であることの同値性が Auslander 等によって得られているが、Auslander はこれがより一般の圏でも成り立つであろうと予想している。榎本氏は Krull-Schmidt 完全圏に対してこの2条件を関手圏の手法で考察し、その応用としていくつかのケースの同値性を与えている。

第3章では加群の組成列に関する Jordan-Hölder の定理の完全圏での類似（以下、これを JH 性と略す）を考察している。完全圏  $\mathcal{E}$  の Grothendieck 群の類似である Grothendieck monoid を考えることで、 $\mathcal{E}$  が JH 性を満たすことに対して Grothendieck monoid が自由であるという簡潔な必要十分条件を見出している。このとき  $\mathcal{E}$  の単純対象が Grothendieck monoid の基底を与えている。Grothendieck monoid は A. Berenstein, J. Greenstein によって導入されたが、あまり多くの研究はなされていなかった。榎本氏はその基礎的性質を調べることから始め JH 性への適用を行っており、本章は完全圏における JH 性に関する基礎理論を構築することに相当する内容であり、特に完全圏の単純対象の重要性を示している。さらに榎本氏は、与えられた完全圏の単純対象の分類問題を提唱し、 $A_n$  型 quiver の path algebra に対して調べた。これは次章で一般の Dynkin 型に拡張される。

第4章は Dynkin 型ルート系と Dynkin 型 quiver の前射影的多元環  $\Pi$  の部分圏との関係が主題である。P. Gabriel は表現の次元ベクトルを対応させることで quiver の直既約な表現全体とルート系の正ルート全体の間で全単射を発見した。Quiver の表現を統制するものとして現れる  $\Pi$  は多元環の表現論の中でも最も重要な研究対象の一つである。有限生成  $\Pi$  加群の圏  $\text{mod } \Pi$  の部分圏で Weyl 群  $W$  の元  $w$  に付随した部分圏  $\mathcal{F}(w)$  が Buan-Iyama-Reiten-Scott によって導入されており、さらに水野は対応  $w \rightarrow \mathcal{F}(w)$  が  $W$  と  $\text{mod } \Pi$  の中のねじれ自由類の集合の間で全単射を与えることで Weyl 群の圏化を与えた。以上の背景のもとで、榎本氏は以下の研究を行った。まず水野の対応のもと、 $\mathcal{F}(w)$  の単純対象全体と Bruhat inversion と呼ばれるある性質を満たすルートの集合の間で全単射を見出し、この対応を応用することにより quiver の path algebra に対しても同様の全単射を与えた。さらにこの応用として  $\mathcal{F}(w)$  が JH 性を満たすための必要十分条件を  $w$  の組み合わせ論の言葉で与えた。

上述の榎本氏の研究においては、JH 性にも現れる単純対象が重要であった。第5章はこの単純対象をアーベル圏の（ねじれ自由類を含む）部分圏の分類に用いることを主題としている。このような部分圏の分類の試みとしては Adachi-Iyama-Reiten による  $\tau$ -tilting を用いる方法があるが、榎本氏はこれとは異なるアプローチを与えている。Brick, semibrick という概念が知られているが、榎本氏はそれらの類似として monobrick および左 Schur 部分圏（Schur の補題の類似が成り立つ）という概念を独自に導入し、単純対象が brick の一種であることに着目することで、monobrick の集合と左 Schur 部分圏との間の全単射を構成し、これを用いて様々な部分圏の分類を与えている。

## 論文審査の結果の要旨

第6章では左 Schur 部分圏の例である ICE (Image, Cokernel, Extension)-閉部分圏の概念を導入し, rigid  $A$ -加群の同型類の集合と ICE-閉部分圏の集合の間の全単射を与え, その応用として Dynkin 型 quiver の場合に, ICE-部分圏の個数が Dynkin 図形にのみ依存し, さらに  $A_n$  型の場合に組み合わせ論に現れる Schröder 数に一致することを示している. この全単射は Ingalls-Thomas によるねじれ類に関する先行結果の拡張を与えていることを注意しておく.

以上が本論文の内容であるが, 新しい概念の導入や新たな角度からの研究などどれも独自性が高いものであり, 各章が一つの学位論文として成立するだけの質・量とも十分な内容を含んでいる. 2020年7月27日に行われた学位審査セミナーにおいては, 申請者は非専門家にも理解できるよう準備された講演を行い, また十分な学識も備えていることも確認された. 以上によって学位審査委員会は, 申請者には博士(数理学)の学位が授与される資格があるものと判断する.