数　学　科

n個のものをr組にける方法の数について

高　須　照　夫

私の今までの教員生活の間に，主として高校数学に関する覚え書きを日記代りに時々書きこんでいたノートが，いつの間にかたくさんたまりました。今から見ると，わかりきったことやつまらないことをありがたがって書いたもんだと思える部分もありますが，昔の方がまじめできちょうめんだったなあと思う部分もあります。

それらのノートの第1号の最初の方に
「自然数の分割―熊谷雅夫―」
という見出しで，細かい字でていねいに書いてある数ページがあります。これは私が刈谷高校の夜間課程につとめていた頃，まだ学生だった熊谷君が学校へあそびにきて，夜学の生徒達に彼の研究の結果をわかりやすく話してくれた時の記録だと思います。

その熊谷雅夫君がこの夏突然なくなられました。彼とは，彼が病気で一年休学するまでは同級でしたが，休学したあともずっと親しくしていただき，岡谷市のお宅へもおじゃまをし，一緒に霧ケ峯や塩尻峠へ行ったりしました。刈谷高校へ来てくれたのもその前後のことです。彼はいろいろなことをたくさん知っていました。そして，それをまわりの人に強引に教えてくれる人でした。「人に教えるとそれだけ自分もよく整理できるからね。」と笑っていたこともありましたが，私も被害を受けて多くのことを教えてもらうことができました。自然数の分割もその一つです。

今回はそのことに関連のある表題のことについて熊谷君をしのびながら書くことにします。途中彼の研究の一部を借用させていただきますが，実はその借用の部分をのぞいては，それこそあたりまえのことかまたははんざつな式で実用にならないことなのです。なお，大分以前に前任校の国府高校で，研究会のときその一部を発表したことがありますが，まずいやり方であったことに気付きましたので，その修正もかねさせていただきます。

1.　問題の分類

n個のものを r 組に分ける場合の数をかぞえるのに，
(i)　ものに区別をつけるかどうか。
(ii)　組に区別をつけるかどうか。
(iii)　どの組にもものが入るようにするかどうか。
にしたがって，8種の問題ができる。すなわち，

① n個の同種のものをr組に分け，どの組にもものが入るようにする。
①′ n個の同種のものをr組に分け，ものが入らない組があってもよいことにする。
② n個の同種のものを区別のあるr組にわけ，どの組にもものが入るようにする。
②′ n個の同種のものを区別のあるr組にわけ，ものが入らない組があってもよいことにする。
③ n個の異なるものをr組に分け，どの組にもものが入るようにする。
④ n個の異なるものを区別のあるr組に分け，どの組にもものが入るようにする。
④′ n個の異なるものを区別のあるr組に分け，ものが入らない組があってもよいことにする。

である。

これらの問題のおのおのの場合の数を求める一般的な方法があるならば公式化してみたいと思う。その前に問題の意味の把握と，一般的な方法については知っていない生徒に考えさせる場合のために，具体的な例についての例解をやってみる。

2.　例　　解

$n=7,\ r=3$ としてみる。

〔1〕　ものにも組にも区別をつけないことにすると，7つのものを3組に分ければ，

(0, 0, 7)　(0, 1, 6)　(0, 2, 5)　(0, 3, 4)
(1, 1, 5)　(1, 2, 4)　(1, 3, 3)　(2, 2, 3)

とすることができるので，①の答は下の段の4通り
①′の答は全部の8通りである。

〔2〕〔1〕の各場合について，組に区別をつけると，順に

3,　$3!=6$,　$3!=6$,　$3!=6$

3,　$3!=6$,　3,　3

通りずつになるので，

② の答は $3+6+3+3=$ 15通り

②′ の答は $3+6+6+6+15=$ 36通り となる。ここで ②′ は ${}_3H_7={}_9C_7=36$, ② は ${}_3H_{7-3}={}_3H_4={}_6C_4=15$ として直接求めることもできる。

〔3〕〔1〕の各場合について，ものに区別をつけると，前から順に

${}_7C_7=1$,　${}_7C_6=7$,　${}_7C_5=21$,　${}_7C_4=35$

${}_7C_5=21$,　${}_7C_4\cdot{}_3C_1=106$,　$\frac{1}{2!}{}_7C_3\cdot{}_4C_3=70$,

$\frac{1}{2!}{}_7C_3\cdot{}_4C_2=105$

通りずつになるので，

③ の答は $21+105+70+105=301$ 通り

③′ の答は $1+7+21+35+301=365$ 通り

となる。

〔4〕〔3〕の各場合について，さらに組にも区別をつけると，

④ の答は ③ の 301 通りから 3! 通りずつがでるので

$301\times3!=1806$ 通り

④′ の答は (0, 0, 7) の場合のみ 3 通り，その他の場合には 3! 通りずつに分かれるので

$3+364\times3!=2187$ 通り

一方 ④′ は ${}_3\Pi_7=3^7=2187$ としても求められる。

一般に ②′ は ${}_rH_n$, ② は ${}_rH_{n-r}$, ④′ は ${}_r\Pi_n$ の公式が用いられることはよく知られているので，その他の場合の一般化をつぎに考えてみることにする。

3.　一般的解法

〔1〕 n 個の同種のものを r 組に分けることは，自然数 n を r 個の自然数の和に分けること，すなわち熊谷君の「自然数の分割」である。自然数の中に 0 をふくむかふくまないかで ①′ 及び ① の場合に分類できる。熊谷君はもちろんこの両方についてやっている。その一部を紹介させていただくことにする。

自然数 n を r 個の自然数（0 をふくまず）の和に分ける方法の数を ${}_nD_r$ と書くことにする。

§1.

〔1〕${}_nD_1$, ${}_nD_{n-1}$, ${}_nD_n$ の値

${}_nD_1=1$　∵）(n) のみ

${}_nD_{n-1}=1$　∵）(1, 1, 1, …, 1, 2) のみ

${}_nD_n=1$　∵）(1, 1, …, 1, 1, 1) のみ

〔2〕${}_nD_{n-2}$ ($n\geqq4$) の値

${}_nD_{n-2}=2$　∵）(1, 1, 1, …, 1, 1, 3) と (1, 1, 1, …, 1, 2, 2) の 2 つ

〔3〕${}_nD_2$ の値

(i)　$n=2m$ (m：整数) のとき

たとえば $n=10$ とすると

(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5)

の 5 通り。　一般に ${}_{2m}D_2=m$

(ii)　$n=2m+1$ (m：整数) のとき

たとえば $n=11$ とすると

(1, 10), (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6)

の 5 通り。　一般に ${}_{2m+1}D_2=m$

となることがわかる。すなわち

$${}_nD_2=\left[\frac{n}{2}\right]$$

§2.　一般の ${}_nD_r$ の求め方

10 を 4 個の自然数の和に分けると，

(1, 1, 1, 7), (1, 1, 2, 6), (1, 1, 3, 5),

(1, 1, 4, 4), (1, 2, 2, 5), (1, 2, 3, 4),

(1, 3, 3, 3), (2, 2, 2, 4)　(2, 2, 3, 3)

だけあるが，各組の各要素から 1 をひくと，

(0, 0, 0, 6), (0, 0, 1, 5), (0, 0, 2, 4),

(0, 0, 3, 3), (0, 1, 1, 4), (0, 1, 2, 3),

(0, 2, 2, 2), (1, 1, 1, 3), (1, 1, 2, 2)

となる。このうち，

0 が 3 つあるものは ${}_6D_1$ 通り

0 が 2 つあるものは ${}_6D_2$ 通り

0 が 1 つあるものは ${}_6D_3$ 通り

0 がないものは ${}_6D_4$ 通りある。

したがって

$${}_{10}D_4={}_6D_1+{}_6D_2+{}_6D_3+{}_6D_4$$

となる。これは一般化できて

$${}_nD_r=\sum_{i=1}^{r}{}_{n-r}D_i \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

この式によれば

$${}_{n-1}D_{r-1}=\sum_{i=1}^{r-1}{}_{n-r}D_i$$

であるから

$${}_nD_r={}_{n-1}D_{r-1}+{}_{n-r}D_r$$

が得られ，これらを用いて ${}_nD_r$ についての次の表を作ることができる。(一部分)

r \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	1	2	2	3	3	4	4	5
3			1	1	2	3	4	5	7	8
4				1	1	2	3	5	6	9
5					1	1	2	3	5	7
6						1	1	2	3	5
7							1	1	2	3
8								1	1	2
9									1	1
10										1

§3.　自然数nをr個の0または自然数の和に分ける方法の数を${}_n\mathrm{D}_r'$とすると

$${}_n\mathrm{D}_r'=\sum_{i=1}^{r}{}_n\mathrm{D}_i$$

これは，公式(1)によれば${}_{n+r}\mathrm{D}_r$に等しい。すなわち

$${}_n\mathrm{D}_r'={}_{n+r}\mathrm{D}_r$$

である。

（以下略）

〔2〕n個の同種のものを区別のあるr組に分ける場合の数は

どの組にも，ものが入るようにすれば　(②)

$${}_r\mathrm{H}_{n-r}={}_{n-1}\mathrm{C}_{n-r}$$

ものが入らない組があってもよいことにすれば　(②′)

$${}_r\mathrm{H}_n={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$$

として求まる。

〔3〕　n個の異なるものをr組に分ける場合（③, ③′）については〔4〕のあとでのべる。

〔4〕n個の異なるものを区別のあるr組に分ける場合の数については，まず，

ものが入らない組があってもよいことにすれば（④′）

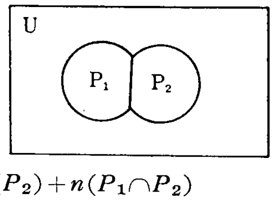
$${}_r\Pi_n=r^n$$

として求めればよい。さて，

どの組にもものが入るようにする場合④についてはつぎのような考え方をしてみた。求める方法の数を，ここでは${}_n\mathrm{T}_r$と書くことにすると，

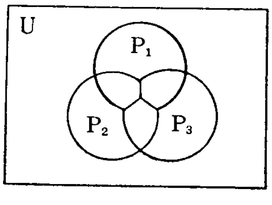
(1)　明らかに${}_n\mathrm{T}_1=1$

(2)　A_1, A_2の2組に分ける場合，ものが入らない組があってもよいことにしたときの2^n通りの分け方の集合を全体集合Uとし，A_1にはものが入らない（以下空（から）になるということにする）ような分け方の集合をP_1, A_2が空になるような分け方の集合をP_2とすると，A_1, A_2がともに空になるような分け方はないので$P_1\cap P_2=\phi$である。故に



$${}_n\mathrm{T}_2=n(U)-n(P_1)-n(P_2)+n(P_1\cap P_2)$$
$$=2^n-1-1+0=2^n-2$$

(3)　A_1, A_2, A_3の3組に分ける場合，ものが入らない組があってもよいことにしたときの3^n通りの分け方の集合を全体集合Uとし，A_1, A_2, A_3が空になるような分け方の集合をそれぞれP_1, P_2, P_3とすれば，$P_1\cap P_2\cap P_3=\phi$であるから



$${}_n\mathrm{T}_3=n(U)-n(P_1)-n(P_2)-n(P_3)$$
$$+n(P_1\cap P_2)+n(P_2\cap P_3)+n(P_n\cap P_1)$$
$$-n(P_1\cap P_2\cap P_3)$$
$$=3^n-3\cdot 2^n+3\cdot 1^n-0=3^n-3\cdot 2^n+3$$

さて，ここでこのことをさらに拡張するために準備をする。上でも用いたように集合の元の個数について

$$n(P_1\cup P_2)=n(P_1)+n(P_2)-n(P_1\cap P_2)\quad\cdots(\mathrm{I})$$

$$n(P_1\cup P_2\cup P_3)=n(P_1)+n(P_2)+n(P_3)$$
$$-n(P_1\cap P_2)-n(P_2\cap P_3)-n(P_3\cap P_1)$$
$$+n(P_1\cap P_2\cap P_3)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{II})$$

が成り立つことはベン図で説明できるが，この2式を用いてさらに，

$$n(P_1\cup P_2\cup P_3\cup P_4)=n((P_1\cup P_2\cup P_3)\cup P_4)$$
$$=n(P_1\cup P_2\cup P_3)+n(P_4)-n((P_1\cup P_2\cup P_3)\cap P_4)$$

ここで$(P_1\cup P_2\cup P_3)\cap P_4$

$=(P_1\cap P_4)\cup(P_2\cap P_4)\cup(P_3\cap P_4)$であるから

$(P_1\cap P_4)\cap(P_2\cap P_4)=P_1\cap P_2\cap P_4$なども考慮して変形すると結局

$$n(P_1\cup P_2\cup P_3\cup P_4)=n(P_1)+n(P_2)+n(P_3)$$
$$+n(P_4)-n(P_1\cap P_2)-n(P_1\cap P_3)-n(P_1\cap P_4)$$
$$-n(P_2\cap P_3)-n(P_2\cap P_4)-n(P_3\cap P_4)$$
$$+n(P_1\cap P_2\cap P_3)+n(P_1\cap P_2\cap P_4)$$
$$+n(P_1\cap P_3\cap P_4)+n(P_2\cap P_3\cap P_4)$$
$$-n(P_1\cap P_2\cap P_3\cap P_4)\quad\cdots\cdots\cdots(\mathrm{III})$$

を示すこともできる。そしてさらに

$$n(\cup P_i)=\sum n(P_i)-\sum n(P_i\cap P_j)$$
$$+\sum n(P_i\cap P_j\cap P_k)-\sum n(P_i\cap P_j\cap P_k\cap P_l)$$
$$+\cdots\cdots\cdots$$

の形で一般化することもできる。

そこでもとにもどって，(III)式を用いれば(2) (3)同様に

$${}_n\mathrm{T}_4=n(\overline{P_1\cup P_2\cup P_3\cup P_4})$$
$$=n(U)-n(P_1\cup P_2\cup P_3\cup P_4)$$
$$=4^n-{}_4\mathrm{C}_1\cdot 3^n+{}_4\mathrm{C}_2\cdot 2^n-{}_4\mathrm{C}_3\cdot 1^n+0$$
$$=4^n-4\cdot 3^n+6\cdot 2^n-4$$

が求まる。そしてこれも一般化できて，

$${}_n\mathrm{T}_r=r^n-{}_r\mathrm{C}_1(r-1)^n+{}_r\mathrm{C}_2(r-2)^n-{}_r\mathrm{C}_3(r-3)^n+$$
$$\cdots+(-1)^k{}_r\mathrm{C}_k(r-k)^n+\cdots+(-1)^{r-1}{}_r\mathrm{C}_{r-1}\cdot 1^n$$
$$=\sum_{k=0}^{r-1}(-1)_r\mathrm{C}_k(r-k)_k$$

と書くことができる。

〔3〕n個の異なるものをr組（組に区別をつけずに）に分け，どの組にも少なくとも1つのものが入るようにする方法③の数を${}_n\mathrm{A}_r$とすると

$${}_n\mathrm{A}_r\times r!={}_n\mathrm{T}_r$$

であるから

$${}_n\mathrm{A}_r=\frac{{}_n\mathrm{T}_r}{r!}=\frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k{}_r\mathrm{C}_k(r-k)^n$$

$$=\frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k\frac{r!}{(r-k)!k!}(r-k)^n$$

$$=\frac{1}{(r-1)!}\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k\frac{(r-1)!}{(r-k-1)!k!}(r-k)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{(r-1)!}\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k{}_{r-1}C_k\cdot(r-k)^{n-1}$$

と書くことができる。たとえば

$${}_nA_4=\frac{1}{3!}\sum_{k=0}^{3}(-1)^k{}_3C_k(4-k)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{3!}(4^{n-1}-3\cdot3^{n-1}+3\cdot2^{n-1}-1)$$

などである。

最後に③′すなわちものを1つもふくまない組があってもよいことにした場合は，求める方法の数を ${}_nA_r'$ とすれば，

$${}_nA_r'={}_nA_1+{}_nA_2+{}_nA_3+\cdots+{}_nA_r$$
$$={}_nA'_{r-1}+{}_nA_r$$

である。

${}_nA_r$ および ${}_nA'_r$ の r についてのはじめの方を少し具体的に求めて書いておくと

$${}_nA_1=1,$$
$${}_nA_2=2^{n-1}-1$$

$${}_nA_3=\frac{3^{n-1}-2\cdot2^{n-1}+1}{2!}$$

$${}_nA_4=\frac{4^{n-1}-3\cdot3^{n-1}+3\cdot2^{n-1}-1}{3!}$$

$${}_nA_5=\frac{5^{n-1}-4\cdot4^{n-1}+6\cdot3^{n-1}-4\cdot2^{n-1}+1}{4!}$$

$${}_nA_6=\frac{6^{n-1}-5\cdot5^{n-1}+10\cdot4^{n-1}-10\cdot3^{n-1}+5\cdot2^{n-1}-1}{5!}$$

$${}_nA_7=\frac{7^{n-1}-6\cdot6^{n-1}+15\cdot5^{n-1}-20\cdot4^{n-1}}{6!}+\frac{15\cdot3^{n-1}-6\cdot2^{n-1}+1}{6!}$$

などであるからこれを用いて，

$${}_nA_1'={}_nA_1=1$$
$${}_nA_2'=1+{}_nA_2=2^{n-1}$$

$${}_nA_3'=2^{n-1}+{}_nA_3=2^{n-1}+\frac{3^{n-1}-2\cdot2^{n-1}+1}{2!}$$

$$=\frac{3^{n-1}+1}{2!}$$

$${}_nA_4'=\frac{3^{n-1}+1}{2!}+\frac{4^{n-1}-3\cdot3^{n-1}+3\cdot2^{n-1}-1}{3!}$$

$$=\frac{4^{n-1}+3\cdot2^{n-1}+2}{3!}$$

$${}_nA_5'=\frac{4^{n-1}+3\cdot2^{n-1}+2}{3!}+\frac{5^{n-1}-4\cdot4^{n-1}+6\cdot3^{n-1}-4\cdot2^{n-1}+1}{4!}$$

$$=\frac{5^{n-1}+6\cdot3^{n-1}+8\cdot2^{n-1}+9}{4!}$$

$${}_nA_6'=\frac{6^{n-1}+10\cdot4^{n-1}+20\cdot3^{n-1}+45\cdot2^{n-1}+44}{5!}$$

$${}_nA_7'=\frac{7^{n-1}+15\cdot5^{n-1}+40\cdot4^{n-1}+135\cdot3^{n-1}+264\cdot2^{n-1}+265}{6!}$$

などがでてくるが，不規則な感じで一般形の予想はしにくい。

4. 公式のまとめと公式による例解

はじめにかかげた8種の問題の一般的解法に必要な公式をここでまとめると，

① ${}_nD_1={}_nD_{n-1}={}_nD_n=1,\quad {}_nD_2=\left[\frac{n}{2}\right]$

$${}_nD_r=\sum_{i=1}^{r}{}_{n-r}D_i={}_{n-1}D_{r-1}+{}_{n-r}D_r,\ \text{および表}$$

① ${}_nD_r'={}_{n+r}D_r$

② ${}_rH_{n-r}={}_{n-1}C_{n-r}$

②′ ${}_rH_n={}_{r+n-1}C_n$

③ ${}_nA_1=1$

$${}_nA_r=\frac{1}{(r-1)!}\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k{}_{r-1}C_k(r-k)^{n-1}\qquad(r\geqq2)$$

③′ ${}_nA'_1=1,$

$${}_nA'_r=\sum_{k=1}^{n}{}_nA_k={}_nA'_{r-1}+{}_nA_r\qquad(r\geqq2)$$

④ ${}_nT_1=1,$

$${}_nT_r=\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k{}_rC_k(r-k)^n\qquad(r\geqq2)$$

④′ ${}_r\Pi_n=r^n$

つぎにこれらの公式を用いて $n=8,\ r=4$ の場合の例解を書いて終りにする。

① ${}_8D_4={}_4D_1+{}_4D_2+{}_4D_3+{}_4D_4=1+\left[\frac{4}{2}\right]+1+1=5$

①′ ${}_8D_4'={}_{12}D_4={}_8D_1+{}_8D_2+{}_8D_3+{}_8D_4$

$$=1+\left[\frac{8}{2}\right]+{}_8D_3+5=10+{}_8D_3$$

$$=10+{}_5D_1+{}_5D_2+{}_5D_3=10+1+\left[\frac{5}{2}\right]+{}_5D_3$$

$$=13+2=15({}_5D_3=2)$$

② ${}_4H_{8-4}={}_4H_4={}_7C_4={}_7C_3=35$

②′ ${}_4H_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$

③ ${}_8A_4=\frac{1}{3!}\sum_{k=0}^{3}(-1)^k{}_3C_k(4-k)^7$

$$=\frac{1}{3!}(4^7-3\cdot3^7+3\cdot2^7-1)=1701$$

③′ $_8A'_4={}_8A_1+{}_8A_2+{}_8A_3+{}_8A_4$

$=1+{}_8A_2+{}_8A_3+1701$

$_8A_2=2^7-1=127,$

$_8A_3=\dfrac{1}{2!}(3^3-2\cdot2^7+1)=966$

$\therefore\ {}_8A'_4=1+127+966+1701=2795$

④ $_8T_4=\sum_{k=0}^{3}(-1)^k{}_4C_k(4-k)^8$

$=4^8-4\cdot3^8+6\cdot2^8-4=40824$

④′ $_4\Pi_8=4^8=65536$