

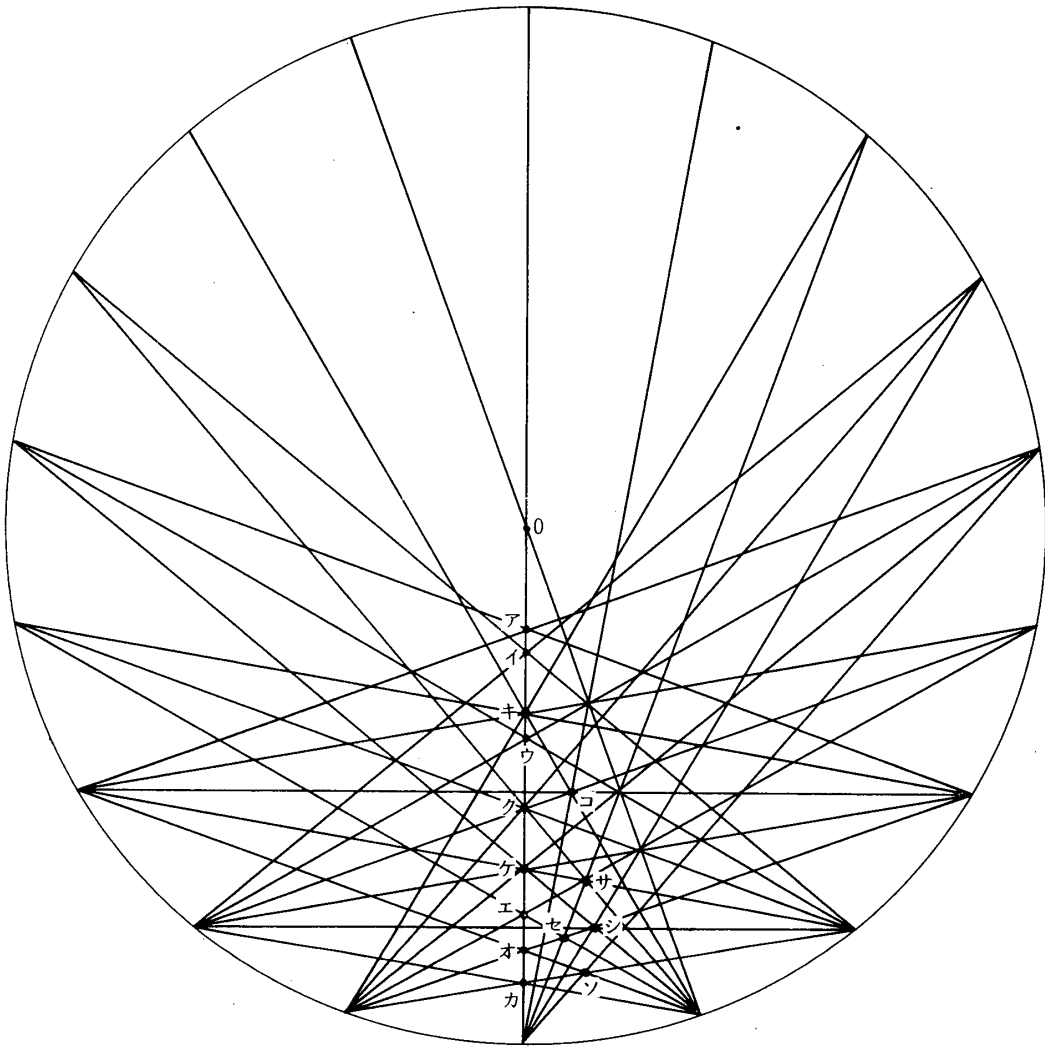
数 学 科

辺と対角線のなす角がすべて 10° の整数倍である 四角形について

富 田 昇 杉 山 光 男 高 須 照 夫

標題の四角形をすべてさがし出し、それらの間の関連性をしらべてみました。ここにはその結果だけを書くことにします、そのきっかけ、方法、経過、今後の研究方針等については「愛数」(昭和50年)に掲載しました。

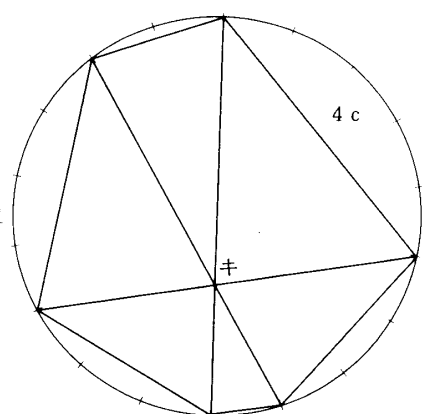
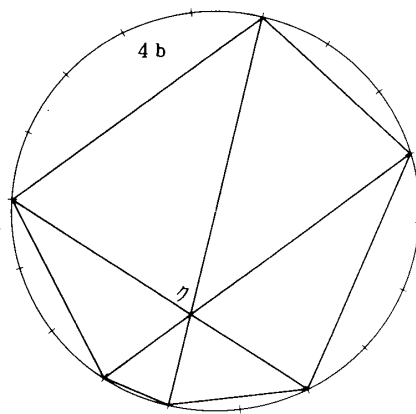
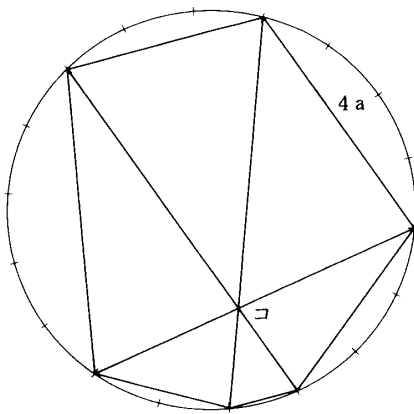
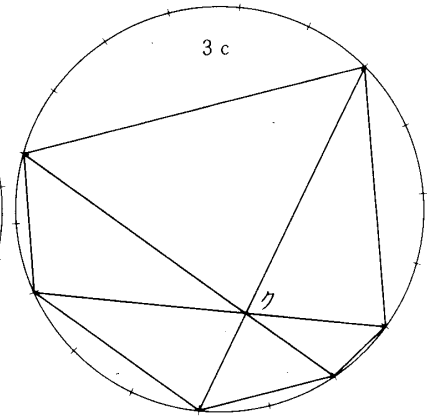
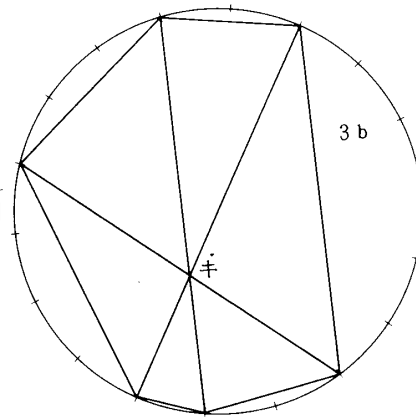
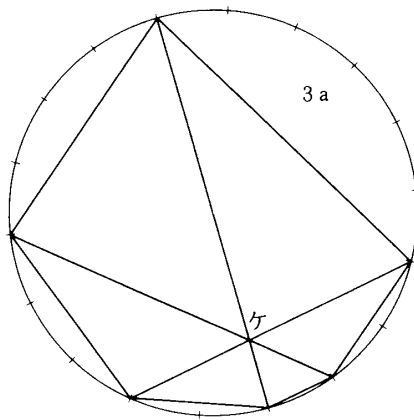
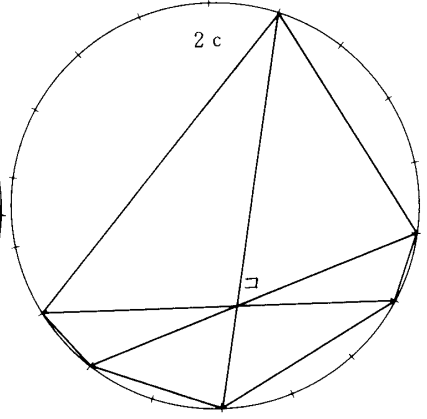
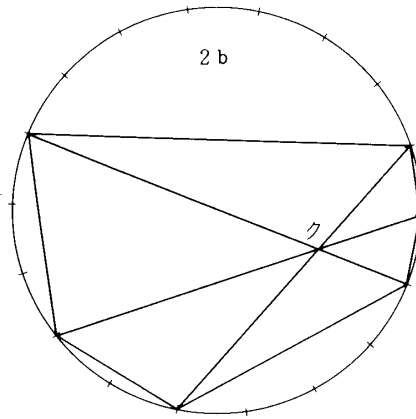
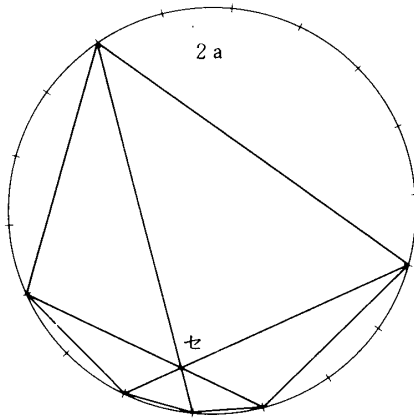
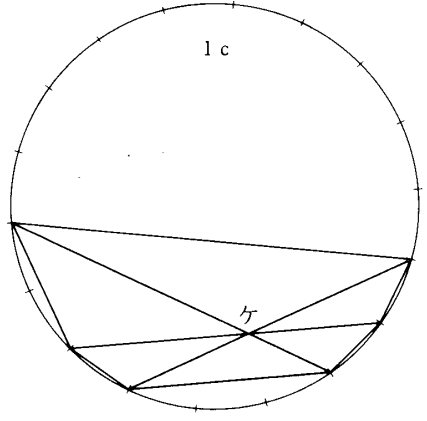
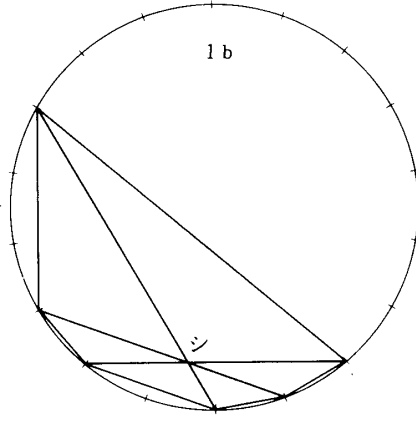
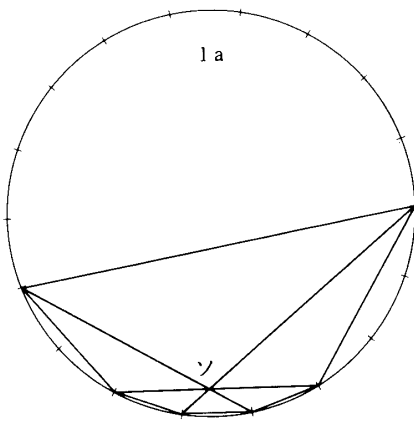
円周を18等分して、その2つの分点を結ぶ弦をひいてみると、3つ以上の弦が1点で交わるところが図1のようにアからソまで15個ある。(中心はのぞく)

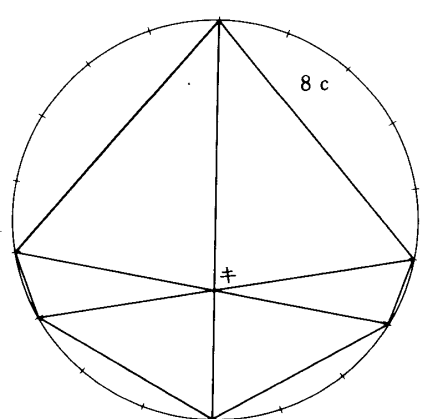
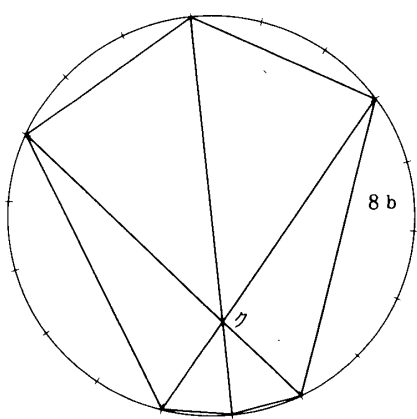
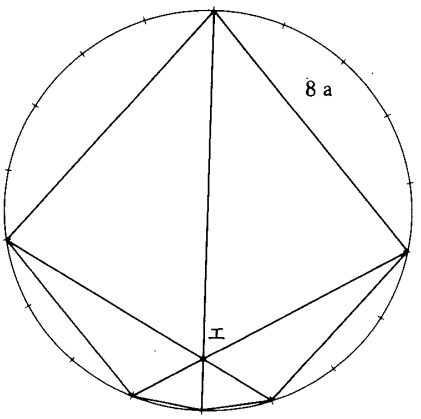
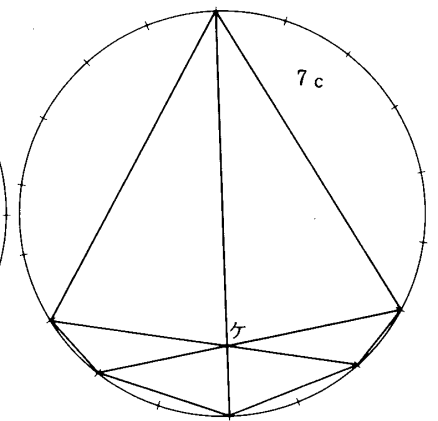
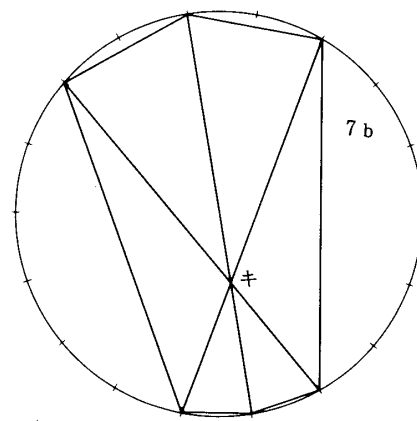
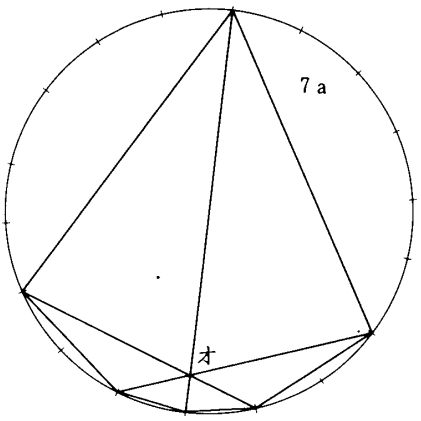
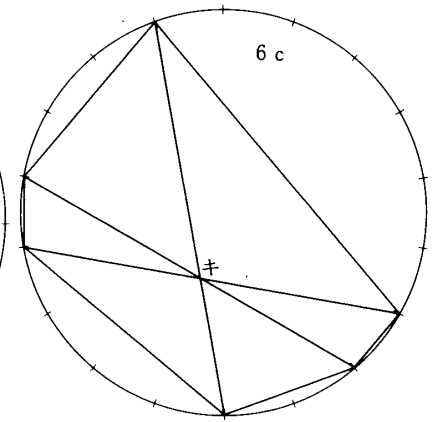
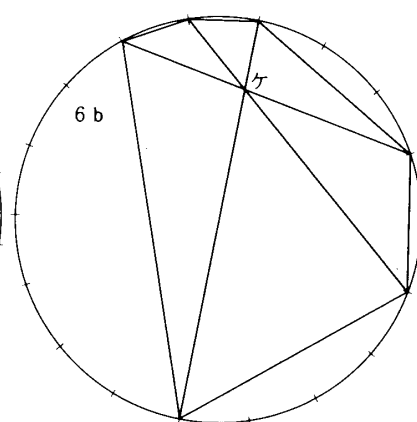
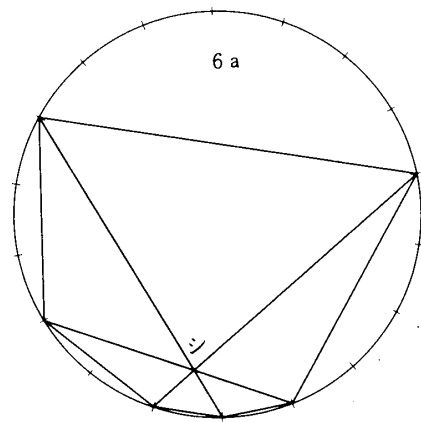
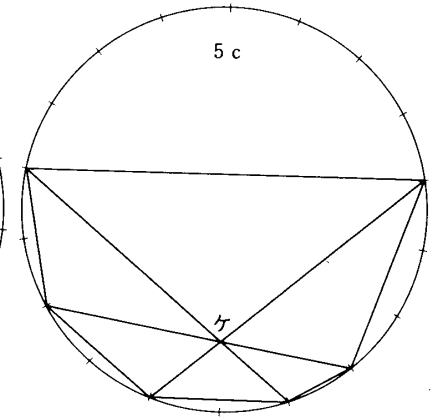
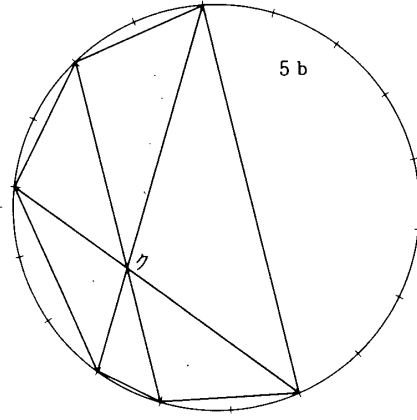
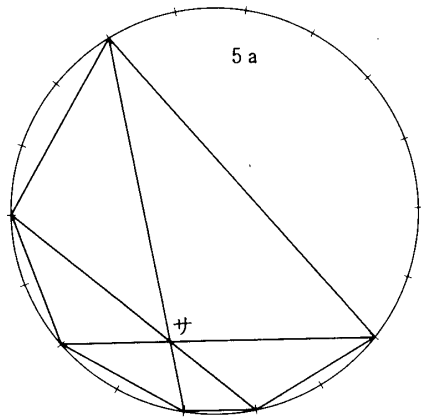


〔図1〕

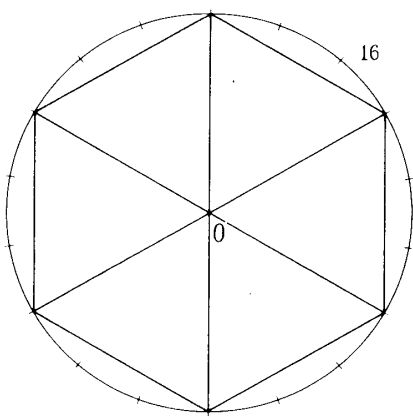
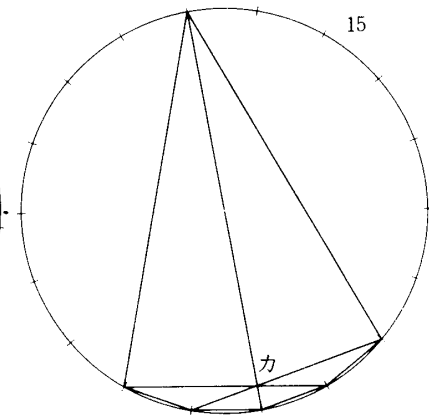
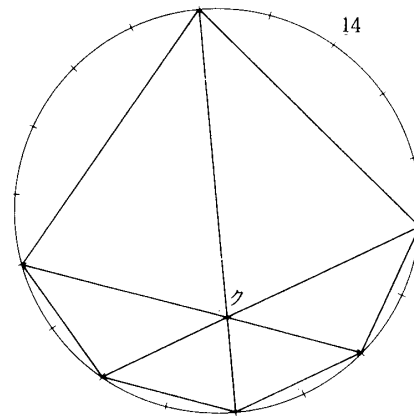
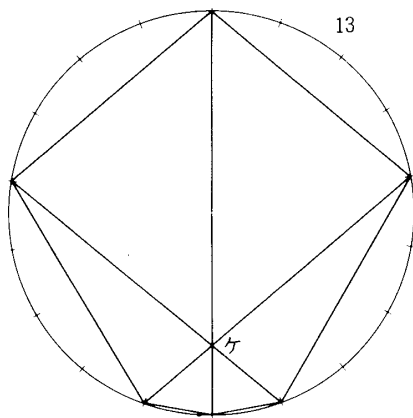
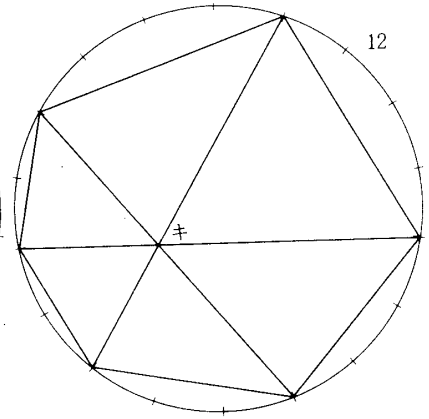
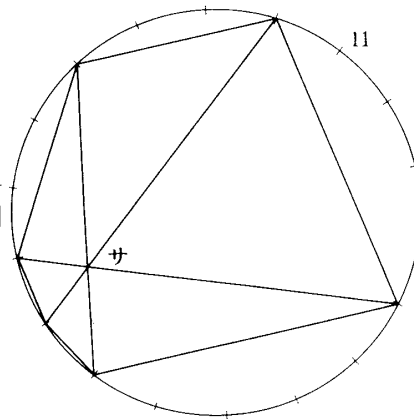
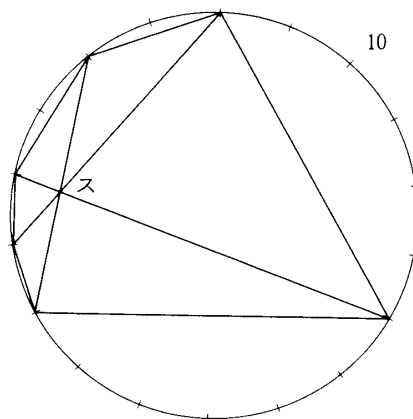
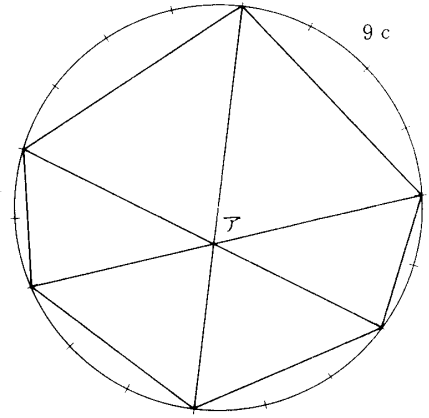
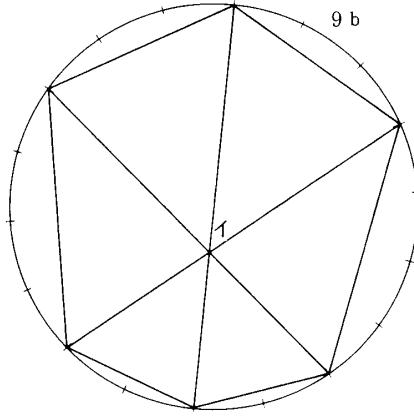
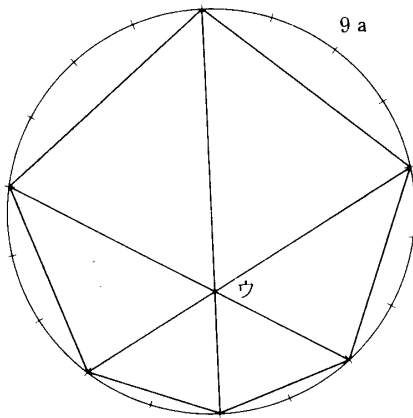
これらの点のおのおのについて、その点を通る3本の弦だけを残した図をかくと、次の1aから16までの34種ができる。(うらがえして同じになるものは1つと考えた)

辺と対角線のなす角がすべて 10° の整数倍である四角形について





辺と対角線のなす角がすべて 10° の整数倍である四角形について



これらの図形は、円周上の6点相互の間隔によって決定する。それぞれの図形において、3弦の交点と、円周上の連続する3点を頂点とする6個の四角形はいずれも標題の四角形である。それらの四角形に便宜的に番号をつけて、表にあらわすと、第1表のようになる。

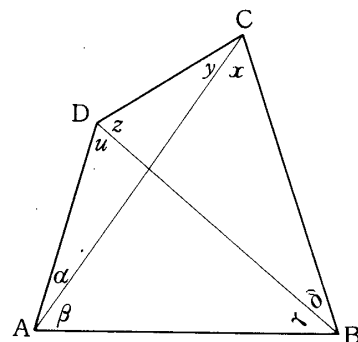
第 1 表

番 号		円周上の6点の間隔						所属する四角形のNo						3弦の交点
1	a	1	1	1	2	10	3	6	2	1	5	18	31	ソ
	b	1	1	2	1	3	10	6	17	1	13	18	30	シ
	c	1	1	3	1	2	10	5	17	31	13	2	30	ケ
2	a	1	1	2	4	7	3	9	11	4	28	59	42	セ
	b	1	1	4	2	3	7	9	47	4	46	59	51	ク
	c	1	2	3	1	4	7	28	47	42	46	11	51	コ
3	a	1	2	3	4	6	2	23	15	20	55	62	25	ケ
	b	2	1	4	3	2	6	23	50	20	45	62	52	キ
	c	1	2	3	2	6	4	55	50	25	45	15	52	ク
4	a	1	2	5	3	4	3	19	35	24	61	63	37	コ
	b	2	1	3	5	3	4	19	32	24	40	63	60	ク
	c	1	3	4	2	6	4	61	32	37	40	35	60	キ
5	a	1	2	2	3	8	2	21	12	16	43	49	22	サ
	b	2	1	3	2	2	8	21	34	16	29	49	41	ク
	c	1	2	2	2	8	3	43	34	22	29	12	41	ケ
6	a	1	1	2	3	7	4	10	14	3	26	53	48	シ
	b	1	1	3	2	4	7	10	39	3	33	53	58	ケ
	c	1	2	4	1	3	7	26	39	48	33	14	58	キ
7	a	1	1	2	6	6	2	7	◇28	7	27	◇17	27	オ
	b	1	1	6	2	2	6	7	◇18	7	36	◇17	36	キ
	c	1	2	2	1	6	6	27	◇18	27	36	◇28	36	ケ
8	a	1	1	3	5	5	3	8	◇27	8	44	◇20	44	エ
	b	1	1	5	3	3	5	8	◇22	8	56	◇20	56	ク
	c	1	3	3	1	5	5	44	◇22	44	56	◇27	56	キ
9	a	2	2	3	4	4	3	38	◇26	38	54	◇23	54	ウ
	b	2	2	4	3	3	4	38	◇24	38	57	◇23	57	イ
	c	2	3	3	2	4	4	54	◇24	54	57	◇26	57	ア
10		1	1	2	2	6	6	○10	◇2	○5	◇12	○1	◇6	ス
11		1	1	3	3	5	5	○12	◇3	○4	◇16	○2	◇5	サ
12		2	2	3	3	4	4	○11	◇9	○8	◇15	○7	◇10	キ
13		1	1	4	4	4	4	◇25	◇4	○3	◇19	○3	◇4	ケ
14		5	5	2	2	2	2	◇21	◇11	○9	◇8	○9	◇11	ク
15		7	7	1	1	1	1	◇13	◇7	○6	◇1	○6	◇7	カ
16		3	3	3	3	3	3	◇14	◇14	◇14	◇14	◇14	◇14	○

さて、各Noの四角形の辺と対角線のなす角および4つの角の大きさは、つぎの表のようである。数字は10°の何倍かを表わす数である。(6ならば60°のこと)

第 2 表

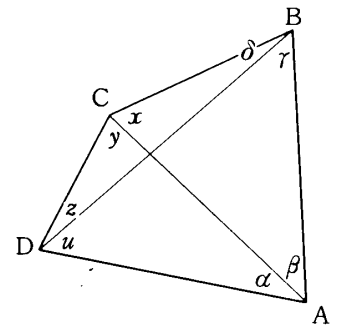
No.	α	β	r	δ	x	y	z	u	A	B	C	D	a	b	c
1	1	1	4	11	2	1	4	12	2	15	3	16	1	1	
2	1	1	3	11	3	1	3	13	2	14	4	16	1		1
3	1	1	6	8	3	2	5	10	2	14	5	15	6	6	
4	1	1	5	8	4	2	4	11	2	13	6	15	2	2	
5	1	1	3	4	10	2	2	13	2	7	12	15	1		1
6	1	1	4	3	10	3	2	12	2	7	13	14	1	1	
7	1	1	4	7	6	2	3	12	2	11	8	15	7	7	
8	1	1	6	6	5	3	4	10	2	12	8	14	8	8	
9	1	1	5	5	7	3	3	11	2	10	10	14	2	2	
10	1	1	6	4	7	4	3	10	2	10	11	13	6	6	
11	1	2	5	8	3	1	6	10	3	13	4	16	2		2
12	1	2	10	4	2	2	10	5	3	14	4	15	5		5
13	2	1	2	12	3	1	2	13	3	14	4	15		1	1
14	1	2	4	8	4	1	5	11	3	12	5	16	6		6
15	1	2	8	5	3	2	8	7	3	13	5	15	3		3
16	1	2	11	3	2	3	10	4	3	14	5	14	5	5	
17	1	2	2	4	10	1	3	13	3	6	11	16		1	1
18	1	2	4	2	10	3	3	11	3	6	13	14	1	1	
19	1	2	8	4	4	3	7	7	3	12	7	14	4	4	
20	1	2	10	3	3	4	8	5	3	13	7	13	3	3	
21	1	2	4	4	8	2	4	11	3	8	10	15	5	5	
22	1	2	5	3	8	3	4	10	3	8	11	14	5		5
23	1	2	5	5	6	2	5	10	3	10	8	15	3	3	
24	1	2	7	4	5	3	6	8	3	11	8	14	4	4	
25	1	2	7	3	6	4	5	8	3	10	10	13	3		3
26	2	1	4	6	7	3	2	11	3	10	10	13	6		6
27	1	2	8	2	6	6	4	7	3	10	12	11	7		7
28	2	1	5	5	7	4	2	10	3	10	11	12	2		2
29	1	3	10	3	2	2	11	4	4	13	4	15		5	5
30	1	3	2	3	10	1	4	12	4	5	11	16		1	1
31	1	3	3	2	10	2	4	11	4	5	12	15	1		1
32	1	3	7	4	4	2	8	7	4	11	6	15		4	4
33	1	3	11	2	2	4	10	3	4	13	6	13		6	6
34	1	3	4	3	8	2	5	10	4	7	10	15		5	5
35	1	3	6	4	5	2	7	8	4	10	7	15	4		4
36	2	2	2	8	6	1	3	12	4	10	7	15		7	7
37	1	3	8	3	4	3	8	6	4	11	7	14	4		4
38	2	2	6	6	4	3	5	8	4	12	7	13	9	9	
39	1	3	3	5	7	1	5	11	4	8	8	16		6	6
40	1	3	7	3	5	3	7	7	4	10	8	14		4	4
41	2	2	3	5	8	2	3	11	4	8	10	14		5	5
42	1	3	6	2	7	4	5	8	4	8	11	13	2		2
43	2	2	4	4	8	3	3	10	4	8	11	13	5		5



No.	α	β	γ	δ	x	y	z	u	A	B	C	D	a	b	c
44	1	3	8	2	5	5	6	6	4	10	10	12	8		8
45	1	4	8	3	3	2	10	5	5	11	5	15		3	3
46	1	4	10	2	2	3	11	3	5	12	5	14		2	2
47	1	4	3	4	7	1	6	10	5	7	8	16		2	2
48	1	4	5	2	7	3	6	8	5	7	10	14	6		6
49	2	3	3	4	8	2	4	10	5	7	10	14	5	5	
50	1	4	5	3	6	2	7	8	5	8	8	15		3	3
51	2	3	2	6	7	1	4	11	5	8	8	15		2	2
52	3	2	3	7	6	2	3	10	5	10	8	13		3	3
53	2	3	5	3	7	4	4	8	5	8	11	12	6	6	
54	2	3	7	4	4	4	6	6	5	11	8	12	9		9
55	3	2	5	5	6	4	3	8	5	10	10	11	3		3
56	1	5	8	2	3	3	10	4	6	10	6	14		8	8
57	2	4	7	4	3	3	8	5	6	11	6	13		9	9
58	2	4	2	5	7	1	5	10	6	7	8	15		6	6
59	2	4	4	3	7	3	5	8	6	7	10	13	2	2	
60	2	4	8	3	3	5	7	4	6	11	8	11		4	4
61	2	5	7	3	3	4	8	4	7	10	7	12	4		4
62	3	4	3	5	6	2	5	8	7	8	8	13	3	3	
63	4	3	4	6	5	3	4	7	7	10	8	11	4	4	

第 3 表

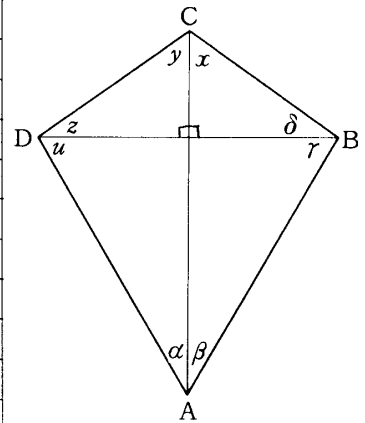
No.	α	β	γ	δ	x	y	z	u	A	B	C	D	所属
○ 1	2	4	6	1	7	8	2	6	6	7	15	8	10
○ 2	2	6	5	1	6	8	3	5	8	6	14	8	11
○ 3	2	8	4	1	5	8	4	4	10	5	13	8	13
○ 4	2	10	3	1	4	8	5	3	12	4	12	8	11
○ 5	2	12	2	1	3	8	6	2	14	3	11	8	10
○ 6	2	14	1	1	2	8	7	1	16	2	10	8	15
○ 7	4	6	4	2	6	7	3	4	10	6	13	7	12
○ 8	4	8	3	2	5	7	4	3	12	5	12	7	12
○ 9	4	10	2	2	4	7	5	2	14	4	11	7	14
○ 10	4	12	1	2	3	7	6	1	16	3	10	7	10
○ 11	6	8	2	3	5	6	4	2	14	5	11	6	12
○ 12	6	10	1	3	4	6	5	1	16	4	10	6	11



$$\delta = \frac{\alpha}{2}, \quad z = \frac{\beta}{2}$$

第 4 表

No.	α	β	γ	δ	x	y	z	u	A	B	C	D	所属
◇ 1	1	1	8	8	1	1	8	8	2	16	2	16	15
◇ 2	1	1	8	7	2	2	7	8	2	15	4	15	10
◇ 3	1	1	8	6	3	3	6	8	2	14	6	14	11
◇ 4	1	1	8	5	4	4	5	8	2	13	8	13	13
◇ 5	1	1	8	4	5	5	4	8	2	12	10	12	11
◇ 6	1	1	8	3	6	6	3	8	2	11	12	11	10
◇ 7	1	1	8	2	7	7	2	8	2	10	14	10	15
◇ 8	2	2	7	7	2	2	7	7	4	14	4	14	14
◇ 9	2	2	7	6	3	3	6	7	4	13	6	13	12
◇ 10	2	2	7	5	4	4	5	7	4	12	8	12	12
◇ 11	2	2	7	4	5	5	4	7	4	11	10	11	14
◇ 12	2	2	7	3	6	6	3	7	4	10	12	10	10
◇ 13	2	2	7	1	8	8	1	7	4	8	16	8	15
◇ 14	3	3	6	6	3	3	6	6	6	12	6	12	16
◇ 15	3	3	6	5	4	4	5	6	6	11	8	11	12
◇ 16	3	3	6	4	5	5	4	6	6	10	10	10	11
◇ 17	3	3	6	2	7	7	2	6	6	8	14	8	7 a b
◇ 18	3	3	6	1	8	8	1	6	6	7	16	7	7 b c
◇ 19	4	4	5	5	4	4	5	5	8	10	8	10	13
◇ 20	4	4	5	3	6	6	3	5	8	8	12	8	8 a b
◇ 21	4	4	5	2	7	7	2	5	8	7	14	7	14
◇ 22	4	4	5	1	8	8	1	5	8	6	16	6	8 b c
◇ 23	5	5	4	3	6	6	3	4	10	7	12	7	9 a b
◇ 24	5	5	4	2	7	7	2	4	10	6	14	6	9 b c
◇ 25	5	5	4	1	8	8	1	4	10	5	16	5	13
◇ 26	6	6	3	2	7	7	2	3	12	5	14	5	9 a c
◇ 27	6	6	3	1	8	8	1	3	12	4	16	4	8 a c
◇ 28	7	7	2	1	8	8	1	2	14	3	16	3	7 a c



標題の四角形で円に内接するものについては、考えるまでもないのでとりあげない。また第3表は1つの頂点が他の3頂点を通る円の中心になっているもの、第4表は1つの対角線について対称なもので、これらの存在も簡単にわかる。興味あるのは第2表の63種で、これらの1つ1つを単独な問題として、初等幾何的うらづけをすることは大変興味深い、そしてなかなかの難問も多い。

〔附〕 第3表の三角形の存在性の理論的うらづけをするには、図1のカタカナの点を3本以上の弦が通っていることを示すことで足りる。直径上の点を直径について対称な2弦が交わることは明らかであるので、それ以外の場合について示せばよい。証明方法を示す図だけを並べておくことにする。

