ZUR UNENDLICHEN REIHEN BESSELSCHER FUNKTIONEN

Éi Iti TAKIZAWA und Keiko KOBAYASI

Institut für Luft- und Raum-Fahrtwissenschaft

(Eingegangen am 20. Oktober, 1962)

Einführung

Um das statistisch-dynamische Prozess in einer Gesammtheit der Partikeln zu behandeln, kann man zwei grundsätzliche Methoden in der Physik in Betracht kommen lassen, namentlich:

a) Methode der Brownschen Bewegung,

und

b) Methode der kinetischen Theorie.

Die erste ist einer der Diffusionsgleichungen, wie der Fokker-Planckschen Gleichung, oder um so allgemeine gesagt, der Onsagerschen Theorie des irreversibelen Prozesses, zu Grunde gelegt. Die äquivalente mathematische Formulierung ist die Differenzialgleichung von Langevin. Die zweite ist in die Boltzmannsche Gleichung mit dem Stoßterm kristallisiert. In den zwei obengenannten Methoden ist der wichtigste Punkt die Idee eines Brehmungskoeffizientes im Systeme der Gesammtheit der Partikeln. Weiter haben diese verschiedenen Gleichungen solchen Ansatz angenommen, wie den sogennanten „Stoßzahlansatz" und die Markoffsche Eigenschaft des Prozesses der Bewegung.

Bis jetzt sind viele Versuche gemacht worden, um diese Annahme in etwas Genauere und Genügendere umzusetzen; dabei fängt man mit der rein dynamischen Gleichung an, zu dem Zweck des Erreichens ihrer stochastischen Folgen. Einige Arbeiten in dieser Richtung sind von Kirkwood[1], Klein und Prigogine[2], und Hemmer[3], gemacht worden, mittels von der „coarse-graining in time", um die statistisch-dynamischen Gleichungen aus den rein dynamischen zu erreichen. Diese Richtung wäre wohl eine genügende Formulierung der statistischen Mechanik des irreversibelen Prozesses. In solcher Deduktion sollte man die Einführung des gewissen „gut definierten Mittelungsverfahlens" machen. Auf Grund dieser Idee haben die japanischen Physiker[4], wie Toda, Kogure, Takeno, Hori, Teramoto und Kashiwamura, auch die von Zeit abhängenden Probleme der imperfekten Kristallen behandelt. Wir haben auch die zeitlich ändernden Probleme im System einer linearen Kette der Oszillatoren diskutiert und die Korrelationsfunktionen[5] [6] [7] und das statistische Verhalten des Systems unter dem Einfluß einer äußeren Zufallkraft mit weißem Spektrum[8] berechnet.

Alle diese Erforscher haben die Kette von unendlicher Länge behandelt, damit das mathematische Berechnung leicht und einfach eingeführt wird. Die dynamische Wiederkehrung ist in diesem Falle verschwunden, und daher kann man nur das Erreichen des stationären Zustandes des Systems nach der unendlich langen Zeit diskutieren.

Dagegen könnte man sich einen Weg nach der mathematischen Formulierung des statistisch-dynamischen Verhaltens des Systems von endlicher Länge bahnen, falls man die folgenden Formeln feststellen läßt. Nach der Feststellung dieser Formeln kann man das statistisch-dynamische Verhalten des Systems der Kette von endlicher Länge mit den beiden festgelegten Enden oder mit den beiden frei gehaltenen Enden und das statistisch-dynamische Verhalten der an den Enden miteinander verbundenen Kette (der periodischen Kette) mathematisch leicht formulieren. Hier bemerkt man auch sofort[7) 9) 13)], daß man die stochastischen und dynamischen Probleme der eindimensionalen, unendlich langen Kette der Oszillatoren mit einigen Isotopen leicht behandeln kann.

Satz 1

Es besteht

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} p^{rN} J_{rN+s}(z) = \frac{1}{Np^s}\cdot\sum_{k=0}^{N-1}\exp\Big[\frac{z}{2}(pe^{2k\pi i/N}-p^{-1}e^{-2k\pi i/N})\Big]\cdot e^{-2ks\pi i/N} \tag{1}$$

$$= \frac{1}{Np^s}\cdot\sum_{k=[-N/2]}^{[N/2]-1}\exp\Big[\frac{z}{2}(pe^{2k\pi i/N}-p^{-1}e^{-2k\pi i/N})\Big]\cdot e^{-2ks\pi i/N}, \tag{1'}$$

wobei $J_\nu(z)$ eine Besselsche Funktion ν-ter Ordnung und vom Argument z ist. N und s sind ganzzahlig. $[y]$ ist Gaußsches Zeichen und bedeutet die größte ganze Zahl, die nicht größer als y ist. $i=\sqrt{-1}$.

Beweiß

Man beweist den Satz 1 für positiv ganzzahliges N.

Aus der erzeugenden Funktion Besselscher Funktionen oder aus der Formel (4) auf Seite 20 vom Buch: „Watson, *Bessel Functions*“[10)], erhält man

$$\sum_{r=0}^{+\infty} p^{rN+s} J_{rN+s}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int^{(0+)} dt\cdot\exp\Big[\frac{z}{2}\Big(t-\frac{1}{t}\Big)\Big]\cdot t^{-s-1}\cdot p^s\cdot\sum_{r=0}^{+\infty} p^{rN}t^{-rN}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{L}}^{(0+)} dt\cdot\exp\Big[\frac{z}{2}\Big(t-\frac{1}{t}\Big)\Big]\cdot\frac{t^{-s-1+N}\cdot p^s}{t^N-p^N}, \tag{2}$$

wobei der Integrationsweg $\mathfrak{L}$ so angenommen zu werden ist, daß die Integration über $\mathfrak{L}$ im positiven Sinne um dem Anfangspunkte $t=0$ läuft und daß die abgeschlossene Kurve $\mathfrak{L}$ den Kreis $|t|=|p|$ enthält.

Der Integrand von (2) hat N einfachen Polen in den Punkten $t=qe^{i(\delta+(2k\pi/N))}$ ($k=0,1,2,\ldots,N-1$), (oder $k=[-N/2],[-N/2]+1,\ldots,[N/2]-1$), dessen Residuen beziehungsweise

$$\frac{1}{N}\cdot\exp\Big[\frac{z}{2}(qe^{i(\delta+(2k\pi/N))}-q^{-1}e^{-i(\delta+(2k\pi/N))})\Big]\cdot e^{-2ks\pi i/N}, \tag{3}$$

$$(k=0,1,2,\ldots,N-1)$$

$$(\text{oder } k=[-N/2],\ [-N/2]+1,\ldots,[N/2]-1)$$

sind, wobei

$$p=qe^{i\delta},$$

ist, mit q reell positiv und $0\le\delta<2\pi$.

Wenn man den Integrationsweg $\mathfrak{L}$ zu einer innerhalb der Kreis $|t|=|p|$

liegenden Integrationskurve $\mathfrak{L}_1$ umformt (*cf.* Abb. 1.), dann erhält man aus (2) und (3)

$$\sum_{r=0}^{+\infty} p^{rN+s} J_{rN+s}(z) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left[\frac{z}{2}\left(qe^{i(\delta+(2k\pi/N))} - q^{-1}e^{-i(\delta+(2k\pi/N))}\right)\right] \cdot e^{-2ks\pi i/N} + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{L}_1}^{(0+)} dt \cdot \exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] \cdot \frac{t^{-s-1+N}p^s}{t^N - p^N}. \tag{4}$$

Hier ist die Integration über $\mathfrak{L}_1$ im positiven Sinne um dem Anfangspunkte $t=0$ zu nehmen.

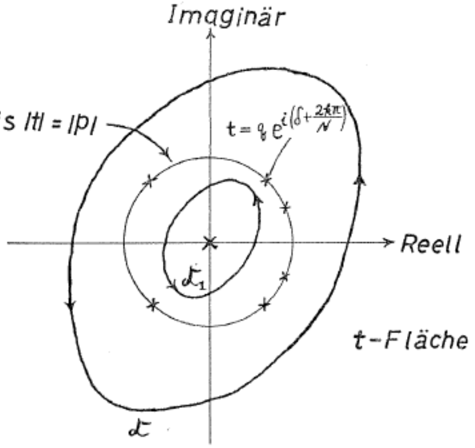

Abb. 1. Integrationsweg in (2) und (4).

Der zweite Term in der rechten Seite von (4) wird

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{L}_1}^{(0+)} dt \cdot \exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] \cdot \frac{t^{-s-1+N}p^s}{t^N - p^N}$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{L}_1}^{(0+)} dt \cdot \exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] \cdot \sum_{r=1}^{+\infty} p^{s-rN} \cdot t^{-s-1+rN}$$
$$= -\sum_{r=-\infty}^{-1} p^{rN+s} J_{rN+s}(z). \tag{5}$$

(*cf.* Watson: *Bessel functions*, Seite 20, Formel (4))

Die Ausdrücke (4) und (5) beweisen die Formel (1) für positiv ganzzahliges N.

Man bemerkt sofort daß der Satz 1 auch für ganzzahliges N verallgemeinert wird.

Satz 2

Es besteht

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} p^{rN} J_{rN+\alpha}(z) J_{rN+\alpha+\beta}(z)$$
$$= \frac{e^{-i\beta\pi/2}}{2Np^{(2\alpha+\beta)/2}} \cdot \sum_{k=0}^{2N-1} e^{-ik\pi(2\alpha+\beta)/N} \cdot J_\beta\{iz(p^{1/2}e^{ik\pi/N} - p^{-1/2}e^{-ik\pi/N})\} \tag{6}$$

$$= \frac{e^{-i\beta\pi/2}}{2\,Np^{(2\alpha+\beta)/2}} \cdot \sum_{k=-N}^{N-1} e^{-ik\pi(2\alpha+\beta)/N} \cdot J_\beta\{iz(p^{1/2}e^{ik\pi/N} - p^{-1/2}e^{-ik\pi/N})\}, \qquad (6')$$

wobei N, α, und β ganzzahlig sind, und $N>0$.

Beweiß

Nach der Formel vom Buch: „Watson, *Bessel Functions*, Seite 150" erhält man, für ganzzahlige N, α, und β,

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} p^{rN} J_{rN+\alpha}(z) J_{rN+\alpha+\beta}(z) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{r=-\infty}^{+\infty} p^{rN} \int_0^{\pi/2} d\theta \cdot J_{2rN+2\alpha+\beta}(2z\cos\theta) \cdot \cos\beta\theta, \qquad (7)$$

(für N, α, und β ganzzahlig)

wegen

$$J_{-\beta}(z) = (-1)^\beta J_\beta(z) = J_\beta(-z),$$

für ganzzahliges β.

Unter der Berücksichtigung von (1) erhält man sofort den Ausdruck:

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} p^{rN} J_{rN+\alpha}(z) J_{rN+\alpha+\beta}(z)$$

$$= \frac{1}{2\,Np^{(2\alpha+\beta)/2}} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{2N-1} e^{-ik\pi(2\alpha+\beta)/N} \times$$

$$\times \int_0^{\pi/2} d\theta \cdot \cos\beta\theta \cdot \exp[z\cos\theta \cdot \{p^{1/2}e^{ik\pi/N} - p^{-1/2}e^{-ik\pi/N}\}]$$

$$= \frac{e^{-i\beta\pi/2}}{2\,Np^{(2\alpha+\beta)/2}} \cdot \sum_{k=0}^{2N-1} e^{-ik\pi(2\alpha+\beta)/N} \cdot [J_\beta\{iz(p^{1/2}e^{ik\pi/N} - p^{-1/2}e^{-ik\pi/N})\} +$$

$$+ i\mathbf{E}_\beta\{iz(p^{1/2}e^{ik\pi/N} - p^{-1/2}e^{-ik\pi/N})\}]. \qquad (8)$$

Gleichzeitig erhält man unter der Berücksichtigung von (1′)

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} p^{rN} J_{rN+\alpha}(z) J_{rN+\alpha+\beta}(z)$$

$$= \frac{e^{-i\beta\pi/2}}{2\,Np^{(2\alpha+\beta)/2}} \cdot \sum_{k=-N}^{N-1} e^{-ik\pi(2\alpha+\beta)/N} \cdot [J_\beta\{iz(p^{1/2}e^{ik\pi/N} - p^{-1/2}e^{-ik\pi/N})\} +$$

$$+ i\mathbf{E}_\beta\{iz(p^{1/2}e^{ik\pi/N} - p^{-1/2}e^{-ik\pi/N})\}]. \qquad (8')$$

Hier ist die folgende Formel gebraucht:

$$\exp\left[i\frac{\gamma\pi}{2}\right] \cdot \int_0^{\pi/2} d\theta \cdot \cos\gamma\theta \cdot \exp(-ip\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\exp\left[i\frac{\gamma\pi}{2}\right] \cdot \int_0^{\pi/2} d\theta \cdot [\exp\{i(\gamma\theta - p\cos\theta)\} + \exp\{i(-\gamma\theta - p\cos\theta)\}]$$

$$= \frac{1}{2}\exp\left[i\frac{\gamma\pi}{2}\right] \cdot \left[\int_0^{\pi/2} d\theta \cdot \exp\{i(\gamma\theta - p\cos\theta)\} - \int_0^{-\pi/2} d\theta \cdot \exp\{i(\gamma\theta - p\cos\theta)\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\exp\left[i\frac{\gamma\pi}{2}\right] \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cdot \exp[i(\gamma\theta - p\cos\theta)] = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\theta \cdot \exp[i(\gamma\theta - p\sin\theta)]$$

$$= \frac{\pi}{2}[\mathbf{J}_\gamma(p) + i\mathbf{E}_\gamma(p)], \qquad \text{(für nicht ganzzahliges } \gamma) \qquad (9)$$

wobei $\mathbf{J}_\gamma(z)$ und $\mathbf{E}_\gamma(z)$ beziehungsweise eine *Anger*sche Funktion γ-ter Ordnung und vom Argument z, und eine *Weber*sche Funktion γ-ter Ordnung und vom Argument z sind (*cf.* Watson: *Bessel Functions,* Seite 308).

Für ganzzahliges ß erhält man

$$\mathbf{J}_\beta(-z) = \mathbf{J}_{-\beta}(z) = (-1)^\beta \mathbf{J}_\beta(z) = (-1)^\beta J_\beta(z) = J_{-\beta}(z) = J_\beta(-z), \tag{10}$$

und

$$\mathbf{E}_{-\beta}(z) = (-1)^\beta \mathbf{E}_\beta(z) = -\mathbf{E}_\beta(-z). \tag{11}$$

Eine *Weber*sche Funktion ganzzahliger Ordnung hat eine Beziehung mit einer *Struve*schen Funktion derselben Ordnung (*cf.* Watson: *Bessel Functions,* Seite 336), namentlich;

$$\mathbf{E}_n(z) = \frac{1}{\pi}\cdot\sum_{m=0}^{<(1/2)n} \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}z\right)^{n-2m-1}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-m\right)} - \mathbf{H}_n(z),$$

und

$$\mathbf{E}_{-n}(z) = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\cdot\sum_{m=0}^{<(1/2)n} \frac{\Gamma\left(n-m-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}z\right)^{-n+2m+1}}{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)} - \mathbf{H}_{-n}(z),$$

für positiv ganzzahliges n, wobei $\mathbf{H}_n(z)$ eine *Struv* sche Funktion n-ter Ordung und vom Argument z ist.

Im Ausdruck (8) berechnet man weiter k-Summierung der rechten Seite und man erhält

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{2N-1} e^{-ik\pi(2\alpha+\beta)/N}\cdot[J_\beta\{iz(p^{1/2}e^{ik\pi/N}-p^{-1/2}e^{-ik\pi/N})\} + i\mathbf{E}_\beta\{iz(p^{1/2}e^{ik\pi/N}-p^{-1/2}e^{-ik\pi/N})\}] \\
&= \sum_{k=-N}^{N-1} e^{-i(k+N)(2\alpha+\beta)\pi/N}\cdot[J_\beta\{iz(p^{1/2}e^{i(k+N)\pi/N}-p^{-1/2}e^{-i(k+N)\pi/N})\} + \\
&\qquad + i\mathbf{E}_\beta\{iz(p^{1/2}e^{i(k+N)\pi/N}-p^{-1/2}e^{-i(k+N)\pi/N})\}] \\
&= (-1)^\beta \sum_{k=-N}^{N-1} e^{-ik\pi(2\alpha+\beta)/N}\cdot[J_\beta\{-iz(p^{1/2}e^{ik\pi/N}-p^{-1/2}e^{-ik\pi/N})\} + \\
&\qquad + i\mathbf{E}_\beta\{-iz(p^{1/2}e^{ik\pi/N}-p^{-1/2}e^{-ik\pi/N})\}].
\end{aligned}$$

Wegen (10) und (11) erhält man sofort

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{2N-1} e^{-ik\pi(2\alpha+\beta)/N}\cdot[J_\beta\{iz(p^{1/2}e^{ik\pi/N}-p^{-1/2}e^{-ik\pi/N})\} + i\mathbf{E}_\beta\{iz(p^{1/2}e^{ik\pi/N}-p^{-1/2}e^{-ik\pi/N})\}] \\
&= \sum_{k=-N}^{N-1} e^{-ik\pi(2\alpha+\beta)/N}\cdot[J_\beta\{iz(p^{1/2}e^{ik\pi/N}-p^{-1/2}e^{-ik\pi/N})\} - \\
&\qquad - i\mathbf{E}_\beta\{iz(p^{1/2}e^{ik\pi/N}-p^{-1/2}e^{-ik\pi/N})\}].
\end{aligned}$$

Vergleicht man (8) mit (8′) unter der Berücksichtigung von der oben erhaltenen Identität, dann erhält man die Formel:

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} p^{rN} J_{rN+\alpha}(z) J_{rN+\alpha+\beta}(z) =$$

$$= \frac{e^{-i\beta\pi/2}}{2Np^{(2\alpha+\beta)/2}} \cdot \sum_{k=0}^{2N-1} e^{-ik\pi(2\alpha+\beta)/N} \cdot J_\beta\{iz(p^{1/2}e^{ik\pi/N} - p^{-1/2}e^{-ik\pi/N})\}$$

$$= \frac{e^{-i\beta\pi/2}}{2Np^{(2\alpha+\beta)/2}} \cdot \sum_{k=-N}^{N-1} e^{-ik\pi(2\alpha+\beta)/N} \cdot J_\beta\{iz(p^{1/2}e^{ik\pi/N} - p^{-1/2}e^{-ik\pi/N})\},$$

die den Satz 2 beweist.

Spezialfälle von dem Satz 1 und dem Satz 2

1) Wenn man $N=2M$ und $p^N=A$ (reell) in (1) annimmt, erhält man

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} A^r J_{2rM+s}(z) =$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{1}{2MA^{s/(2M)}} \cdot \sum_{k=0}^{2M-1} \exp\left[\frac{z}{2}\left(A^{1/(2M)}e^{ik\pi/M} - A^{-1/(2M)}e^{-ik\pi/M}\right)\right] \cdot e^{-iks\pi/M} \\ &= \frac{1}{2MA^{s/(2M)}} \cdot \sum_{k=-M}^{M-1} \exp\left[\frac{z}{2}\left(A^{1/(2M)}e^{ik\pi/M} - A^{-1/(2M)}e^{-ik\pi/M}\right)\right] \cdot e^{-iks\pi/M} \\ &= \frac{(-1)^s}{2MA^{s/(2M)}} \cdot \sum_{k=-M}^{M-1} \exp\left[\frac{-z}{2}\left(A^{1/(2M)}e^{ik\pi/M} - A^{-1/(2M)}e^{-ik\pi/M}\right)\right] \cdot e^{-iks\pi/M}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Für $M=1$, $A<0$ und $s=$ganzzahlig gerade, ist diese Formel wesentlich nichts anderes als der von Kashiwamura[9] hergeleitete Ausdruck. (*cf.* Appendix B von seiner Abhandlung)

2) Wenn man $p=e^{i\delta}$ im Satz 1 und im Satz 2 annimmt, erhält man beziehungsweise

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} e^{irN\delta} J_{rN+s}(z) = \frac{1}{Ne^{is\delta}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left[iz\sin\left(\delta + \frac{2k\pi}{N}\right)\right] \cdot e^{-2ks\pi i/N} \tag{13}$$

$$= \frac{1}{Ne^{is\delta}} \cdot \sum_{k=[-N/2]}^{[N/2]-1} \exp\left[iz\sin\left(\delta + \frac{2k\pi}{N}\right)\right] \cdot e^{-2ks\pi i/N}, \tag{13'}$$

und

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} e^{irN\delta} J_{rN+\alpha}(z) J_{rN+\alpha+\beta}(z) =$$

$$= \frac{e^{-i\beta\pi/2}}{2Ne^{i(2\alpha+\beta)\delta/2}} \cdot \sum_{k=0}^{2N-1} e^{-ik\pi(2\alpha+\beta)/N} \cdot J_\beta\left\{-2z\sin\left(\delta + \frac{k\pi}{N}\right)\right\} \tag{14}$$

$$= \frac{e^{-i\beta\pi/2}}{2Ne^{i(2\alpha+\beta)\delta/2}} \cdot \sum_{k=-N}^{N-1} e^{-ik\pi(2\alpha+\beta)/N} \cdot J_\beta\left\{-2z\sin\left(\delta + \frac{k\pi}{N}\right)\right\}. \tag{14'}$$

3) Für $N=4M$ und $\delta=0$ in (13) erhält man sofort eine Formel:

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} J_{4rM+s}(z) = \frac{1}{4M} \cdot \sum_{k=0}^{4M-1} \exp\left[i\left(z\sin\frac{k\pi}{2M} - \frac{k\pi}{2M}s\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4M} \cdot \sum_{k=-2M}^{2M-1} \exp\left[i\left(z\sin\frac{k\pi}{2M} - \frac{k\pi}{2M}s\right)\right]$$

$$= \frac{(-1)^s}{4M} \cdot \sum_{k=-2M}^{2M-1} \exp\left[-i\left(z\sin\frac{k\pi}{2M} + \frac{k\pi}{2M}s\right)\right]$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{2M}\displaystyle\sum_{k=-M}^{M-1}\cos\left[z\sin\frac{k\pi}{2M}\right]\cdot\cos\frac{k\pi s}{2M}, \\ \qquad\qquad\qquad\text{(für ganzzahliges gerades } s) \\ \dfrac{1}{2M}\displaystyle\sum_{k=-M}^{M-1}\sin\left[z\sin\frac{k\pi}{2M}\right]\cdot\sin\frac{k\pi s}{2M}, \\ \qquad\qquad\qquad\text{(für ganzzahliges ungerades } s)\end{array}\right\} \tag{15}$$

die mit der von Hemmer[3] berechneten Formeln übereinstimmt (*cf.* Appendix 1 von seiner Abhandlung).

4) Für $N=2M$ und $\delta=0$ in (14) erhält man

$$\begin{aligned}&\sum_{r=-\infty}^{+\infty}J_{2rM+\alpha}(z)J_{2rM+\alpha+\beta}(z)= \\ &=\frac{(-1)^{\beta/2}}{4M}\cdot\sum_{k=-2M}^{2M-1}e^{-ik\pi(2\alpha+\beta)/(2M)}\cdot J_\beta\left(-2z\sin\frac{k\pi}{2M}\right) \\ &=\frac{(-1)^{\beta/2}}{2M}\cdot\sum_{k=-M}^{M-1}e^{-ik\pi(2\alpha+\beta)/(2M)}\cdot J_\beta\left(2z\sin\frac{k\pi}{2M}\right) \\ &=\frac{(-1)^{\beta/2}}{2M}\cdot\sum_{k=-M}^{M-1}\cos\frac{(2\alpha+\beta)k\pi}{2M}\cdot J_\beta\left(2z\sin\frac{k\pi}{2M}\right), \qquad (16) \\ &\qquad\qquad\text{(für ganzzahliges gerades } \beta)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\sum_{r=-\infty}^{+\infty}J_{2rM+\alpha}(z)J_{2rM+\alpha+\beta}(z)= \\ &=\frac{e^{-i\beta\pi/2}}{4M}\cdot\sum_{k=-2M}^{2M-1}e^{-ik\pi(2\alpha+\beta)/(2M)}\cdot J_\beta\left(-2z\sin\frac{k\pi}{2M}\right) \\ &=i\frac{(-1)^{(\beta-1)/2}}{2M}\cdot\sum_{k=-M}^{M-1}e^{-ik\pi(2\alpha+\beta)/(2M)}\cdot J_\beta\left(2z\sin\frac{k\pi}{2M}\right) \\ &=\frac{(-1)^{(\beta-1)/2}}{2M}\cdot\sum_{k=-M}^{M-1}\sin\frac{(2\alpha+\beta)k\pi}{2M}\cdot J_\beta\left(2z\sin\frac{k\pi}{2M}\right). \qquad (17) \\ &\qquad\qquad\text{(für ganzzahliges ungerades } \beta)\end{aligned}$$

Diese Formeln (16) und (17) stimmen mit den von uns gegebenen Formeln[11)12)] überein.

5) Für $p=A$ und $N=1$ in (6) erhält man

$$\begin{aligned}&\sum_{r=-\infty}^{+\infty}A^rJ_{r+\alpha}(z)J_{r+\alpha+\beta}(z)= \\ &=\frac{e^{-i\beta\pi/2}}{2A^{(2\alpha+\beta)/2}}\cdot[J_\beta\{iz(A^{1/2}-A^{-1/2})\}+(-1)^\beta J_\beta\{-iz(A^{1/2}-A^{-1/2})\}] \\ &=\frac{(-i)^\beta}{A^{(2\alpha+\beta)/2}}\cdot J_\beta\{iz(A^{1/2}-A^{-1/2})\}. \qquad (18)\end{aligned}$$

6) Für $A=a^2$ in (18),

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty}a^{2r}J_{r+\alpha}(z)J_{r+\alpha+\beta}(z)=\frac{(-i)^\beta}{a^{2\alpha+\beta}}\cdot J_\beta\left\{iz\left(a-\frac{1}{a}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{a^{2\alpha+\beta}} \cdot I_\beta\left\{z\left(a - \frac{1}{a}\right)\right\}, \tag{19}$$

wobei $I_\beta(z) = i^{-\beta} J_\beta(iz)$.

7) Für $a = ib$ in (19),

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} (-1)^r b^{2r} J_{r+\alpha}(z) J_{r+\alpha+\beta}(z) = \frac{(-1)^\alpha}{b^{2\alpha+\beta}} \cdot J_\beta\left\{z\left(b + \frac{1}{b}\right)\right\}. \tag{20}$$

Dieser Ausdruck mit $\alpha = 0$ stimmt mit der von Nielsen hergeleiteten Formel[14] überein, und hängt mit einer Additionsformel zusammen. D.h., man setzt x für bz und y für z/b in (20), so gewinnt man:

$$J_\beta(x+y) = (-1)^\alpha \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{(2\alpha+\beta)/2} \cdot \sum_{r=-\infty}^{+\infty} (-1)^r \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^r \cdot J_{r+\alpha}(\sqrt{xy}) J_{r+\alpha+\beta}(\sqrt{xy}). \tag{21}$$

8) Für $p = 1$, $N = 1$, und $\beta = 0$ in (6) erhält man

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} J_{r+\alpha}^2(z) = J_0(0) = 1. \tag{22}$$

9) Für beliebiges ganzzahliges β,

$$\begin{aligned} &\sum_{r=-\infty}^{+\infty} J_{r+\alpha}(z) J_{r+\alpha+\beta}(z) \\ &= \frac{e^{-i\beta\pi/2}}{2} \cdot \sum_{k=0}^{1} e^{-ik\pi(2\alpha+\beta)} \cdot J_\beta\{iz(e^{ik\pi} - e^{-ik\pi})\} \\ &= \frac{(-i)^\beta}{2} [J_\beta(0) + (-1)^\beta J_\beta(0)] \\ &= \delta_{\beta,0}. \end{aligned} \tag{23}$$

10) Für $\alpha = -s$, $\alpha + \beta = s$, und $\beta = 2s$ in (23) erhält man

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} J_{r-s}(z) J_{r+s}(z) = \delta_{s,0}. \tag{24}$$

11) Man setzt $A = 1$ und $\beta = -2\alpha$ in (18) ein, multipliziert den Ausdruck mit $(-1)^{\alpha-1}$ und erhält die Formel:

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} (-1)^{r-1} J_{r+\alpha}(z) J_{\alpha-r}(z) = (-1)^{\alpha-1}\, \delta_{\alpha,0}, \tag{25}$$

die eigentlich nichts anderes als (24) ist. Dieser Ausdruck führt zur folgenden Formel:

$$\sum_{r=1}^{+\infty} (-1)^{r-1} J_{r+\alpha}(z) J_{\alpha-r}(z) = \frac{1}{2} [J_\alpha^2(z) - (-1)^\alpha\, \delta_{\alpha,0}], \tag{26}$$

die von Nielsen gegebenen Formel[14] enthält.

Diese Arbeit ist finanziell vom Tôkai Gakuzyutu Syôreikai unterstützt, wofür wir ihm unseren verbindlichen Dank aussprechen.

Literaturen

1) J. G. Kirkwood: Journ. Chem. Phys. **14** (1946), 180.
2) G. Klein und I. Prigogine: Physica **19** (1953), 1053.
3) P. Chr. Hemmer: Det Fysiske Seminar i Trondheim No. **2** (1959), 1.
4) Supplement of Progress Theoret. Phys. No. **23** (1962), 157.
5) É. I. Takizawa und K. Kobayasi: Memo. Fac. Engineering, Nagoya Univ. **15** (1963), 57.
6) É. I. Takizawa und K. Kobayasi: Chinese Journ. Phys. **1** (1963), 59.
É. I. Takizawa und K. Kobayasi: Progress Theoret. Phys. **31** (1964), 1176.
7) K. Kobayasi und É. I. Takizawa: Chinese Journ. Phys. **2** (1964), 10.
8) É. I. Takizawa und K. Kobayasi: Memo. Fac. Engineering, Nagoya Univ. **14** (1962), 138.
9) S. Kashiwamura: Progress Theoret. Phys. **27** (1962), 571.
10) G. N. Watson: *Theory of Bessel Functions* (1944), Cambridge Univ.
11) K. Kobayasi und É. I. Takizawa: Memo. Fac. Engineering, Nagoya Univ. **15** (1963), 52.
12) É. I. Takizawa und K. Kobayasi: Chinese Journ. Phys. **1** (1963), 83.
13) K. Kobayasi und É. I. Takizawa: Chinese Journ. Phys. **2** (1964). (im Druck)
14) N. Nielsen: *Cylinderfunktionen* (1904), Teubner, Leipzig. Seite 299.
Im Korrekturabzug addierten wir noch einige Literaturen.